ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Κ. Φαράκος, Ι. Ράπτης
Β΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 7 Δεκεμβρίου 2021
Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 23/12/21, οι 1, 2, 3, 4, 5, 6.
[ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και να αναρτηθούν, ως ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ PDF στις Εργασίες του Helios]

1. Θεωρείστε γνωστό ότι ένα ομογενές σφαιρικό κέλυφος με μάζα Δm, στα μεν σώματα που βρίσκονται στο εσωτερικό του δεν ασκεί καμία βαρυτική δύναμη, στα δε σώματα που βρίσκονται στο εξωτερικό του ασκεί την ίδια βαρυτική δύναμη που θα ασκούσε μία σημειακή μάζα Δm, συγκεντρωμένη στο κέντρο του σφαιρικού κελύφους. (α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται σε σημειακή μάζα, m_0, που βρίσκεται σε απόσταση *r*, από το κέντρο ομογενούς σφαίρας ακτίνας *R* και μάζας *M*, είτε $F_1(r)$για $r \geq R$, είτε $F_2(r)$για $0 < r \leq R$. (β) Ιδανικό εκκρεμές, μήκους *L* μάζας *m*, μεταφέρεται σε ύψος $H = xR,\ \ (x \geq 0)$, πάνω από την επιφάνεια της Γης, όπου η κυκλική συχνότητα ταλάντωσής του μετράται ίση με ω_H, και στη συνέχεια σε βάθος $D = yR,\ \ (0 \leq y < 1)$, κάτω από την επιφάνεια της Γης, όπου η κυκλική συχνότητα ταλάντωσής του μετράται ίση με ω_D. Η Γη θεωρείται ως ιδανική ομοιογενής σφαίρα ακτίνας *R*. Υπολογίστε το λόγο ω_D/ω_H συναρτήσει των {*x*, *y*}. [Δίνεται ο όγκος σφαίρας, ακτίνας *r*: $V(r) = 4\pi r^3/3$]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\frac{\omega_D}{\omega_H} = \sqrt{\frac{g_D}{g_H}}, \qquad F_H = G\frac{M_\Gamma m}{(1+x)^2 R^2} = g_H m, \qquad g_H = \frac{g_0}{(1+x)^2}$$

$$F_D = G\frac{M_D m}{(1-y)^2 R^2} = GM_\Gamma \frac{(1-y)^3 R^3}{R^3}\frac{m}{(1-y)^2 R^2} = G\frac{M_\Gamma}{R^2} m(1-y)$$

$$F_D = g_D m, \qquad g_D = g_0(1-y)$$

$$\frac{\omega_D}{\omega_H} = \sqrt{\frac{g_D}{g_H}}, \qquad g_H = \frac{g_0}{(1+x)^2}, \qquad g_D = g_0(1-y)$$

$$\frac{\omega_D}{\omega_H} = \sqrt{\frac{g_0(1-y)}{g_0}(1+x)^2} \Rightarrow \frac{\omega_D}{\omega_H} = \sqrt{(1+x)^2(1-y)}$$

ΥΠΟ-ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ
(β1) Βρείτε την κοινή τιμή *H*=*D*=?, για την οποία το ω_D/ω_H διέρχεται από ακρότατο.

$$H = D \Rightarrow x = y \Rightarrow \rho \equiv \frac{\omega_D}{\omega_H} = \sqrt{(1+x)^2(1-x)}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+x)(1-3x) = 0 \Rightarrow 0 < x = \frac{1}{3}$$

(β2) Βρείτε την κοινή τιμή *H*=*D*≠1, για την οποία οι δύο συχνότητες είναι ίδιες.

$$\left.\begin{cases} H = D \\ \omega_D = \omega_H \end{cases}\right\} \Rightarrow 1 = \sqrt{(1+x)^2(1-x)}$$

$$-x\left(x^2+x-1\right) = 0 \Rightarrow 0 < x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(β3) Βρείτε την τιμή H=2D≠2R, για την οποία το ω_D/ω_H διέρχεται από ακρότατο

$$H = 2D \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \rho \equiv \frac{\omega_D}{\omega_H} = \sqrt{(1+2y)^2(1-x)}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3-12y^2 = 0 \Rightarrow 0 < y = \frac{1}{2}$$

(β4) Βρείτε την τιμή H=5D≠5R, για την οποία το ω_D/ω_H διέρχεται από ακρότατο

$$H = 5D \Rightarrow x = 5y \Rightarrow \rho \equiv \frac{\omega_D}{\omega_H} = \sqrt{(1+5y)^2(1-x)}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 25y^2-10y-3 = 0 \Rightarrow 0 < y = \frac{3}{5}$$

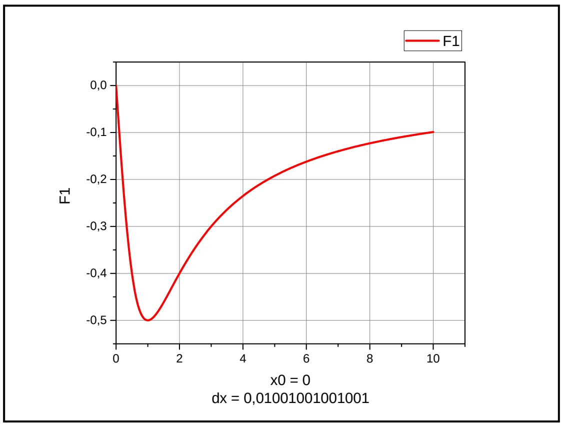
2. Σώμα μάζας m μπορεί να κινείται κατά μήκος του θετικού άξονα-x, $(x>0)$, σε περιοχή στην οποία η συνάρτηση δυναμικής ενέργεια δίνεται από την έκφραση $U(x) = -\dfrac{Ax}{b^2+x^2}$ όπου (A,b) θετικές σταθερές. (α) Υπολογίστε τα σημεία ισορροπίας του σώματος και το είδος της ισορροπίας, και σχεδιάστε ένα ποιοτικό σκαρίφημα της $U(x)$ (β) Θεωρήστε ότι, ενώ το σώμα βρίσκεται στο σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, του προσδίδεται μία μικρή κινητική ενέργεια, σε σχέση με την απόλυτη τιμή της δυναμικής του ενέργειας, και δείξτε ότι το σώμα θα εκτελέσει, με καλή προσέγγιση, αρμονική ταλάντωση, και υπολογίστε την κυκλική συχνότητα ω_0 αυτής της ταλάντωσης. (γ) Όταν το σώμαν βρίσκεται στο σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, να υπολογίστε την κρίσιμη ταχύτητα $\upsilon_{0\kappa\rho}$ του σώματος, κάτω από την οποία το σώμα εκτελεί κίνηση πεπερασμένου πλάτους (είναι δέσμιο) και πάνω από την οποία το σώμα εκτελεί κίνηση άπειρου πλάτους (είναι ελεύθερο). (δ) Υπολογίστε τα σημεία αναστροφής της πορείας του σώματος, (x_1, x_2) όταν αυτό αφεθεί στη θέση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας με ταχύτητα $\upsilon_0 = \upsilon_{0\kappa\rho}/2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$U(x) = -\frac{Ax}{b^2+x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dx} = A\frac{x^2-b^2}{\left(x^2+b^2\right)^2}$$

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} = 0 \Rightarrow x_0^2 - b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = b}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{4Ab^2x}{\left(x^2+b^2\right)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0=b} = \frac{4Ab^3}{2b^2} = 2Ab > 0,$$



Ευσταθής Ισορροπία με $U(b) = -\dfrac{A}{2b} < 0$

(β) Αναπτύσσοντας κατά Taylor την $U(x)$, περί το x_0=b, παίρνουμε :

$$U(x) \approx U(b) + 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0=b}(x-b)^2 \approx -\frac{A}{2b} + \frac{1}{2}(2Ab)(x-b)^2:$$ Αρμονικός Ταλαντωτής, με ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου 2*Ab*, επομένως, $\omega_0 = \sqrt{(2Ab)/m}$

(γ) Θα πρέπει $\frac{1}{2}m\upsilon_{0\kappa\rho}^2 + U(b) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{0\kappa\rho}^2 - \frac{A}{2b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{0\kappa\rho} = \sqrt{\frac{A}{mb}}$

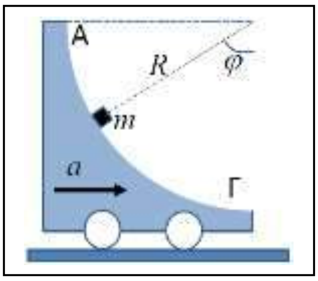
(δ) Αν $\upsilon_0 = \frac{\upsilon_{0\kappa\rho}}{2} = \sqrt{\frac{A}{4mb}} \quad \Rightarrow \quad E_{o\lambda} = U(b) + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -\frac{A}{2b} + \frac{1}{2}m\frac{A}{4mb} = -\frac{3A}{8b}$

Στα σημεία-x στα οποία μηδενίζεται η κινητική του ενέργεια (σημεία αναστροφής), ισχύει

$$U(x) = E_{o\lambda} \quad \Rightarrow -\frac{Ax}{b^2+x^2} = -\frac{3A}{8b} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{b^2+x^2} = \frac{3}{8b} \quad \Rightarrow \quad \frac{8bx}{3} = b^2 + x^2$$

$$x^2 - \frac{8bx}{3} + b^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}b \pm b\sqrt{\frac{64}{9} - \frac{36}{9}}\right] = \frac{b}{2}\left[\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{28}{9}}\right] = \frac{b}{2}\left[\frac{8}{3} \pm \frac{2\sqrt{7}}{3}\right]$$

Τελικά: $x_{1,2} = (b/6)\left(8 \pm 2\sqrt{7}\right)$

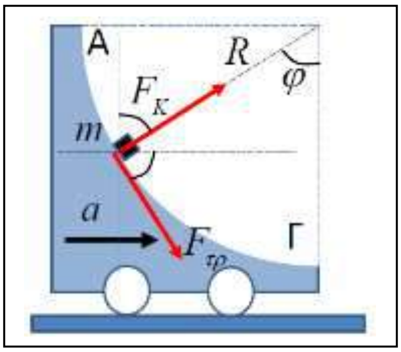


3. Το αμαξίδιο του σχήματος κινείται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση *a*. Μικρό σώμα μάζας *m* είναι πάνω στην τεταρτοκυκλική επιφάνεια ΑΓ του αμαξιδίου, ακτίνας R. (α) Βρείτε τη γωνία $\varphi=\varphi_0$,ώστε η μάζα *m* να είναι ακίνητη ως προς το αμαξίδιο, όταν η επιφάνεια είναι λεία. (β) Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ της μάζας και της επιφάνειας του αμαξιδίου είναι μ, βρείτε την μέγιστη επιτάχυνση a_{max} του αμαξιδίου ώστε η μάζα *m* να παραμένει ακίνητη πάνω στο αμαξίδιο, στη γωνία $\varphi=\varphi_0$ (που προκύπτει από το ερώτημα-α). (γ) Εάν το αμαξίδιο κινηθεί με επιτάχυνση $a_0=2a$, και η επιφάνεια είναι λεία, να βρείτε την επιτάχυνση που αποκτά η μάζα *m* ως προς το αμαξίδιο συναρτήσει της γωνίας φ και την δύναμη *N* που δέχεται η μάζα *m* από την επιφάνεια ΑΓ του αμαξιδίου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $\left\{\begin{matrix} F_K\cos\varphi_0 = mg \\ F_K\sin\varphi_0 = ma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \tan\varphi_0 = \frac{a}{g}$

(β) $F_K\sin\varphi_0 + F_{\tau\rho}\cos\varphi_0 = ma_{\max}$, $\qquad F_K\cos\varphi_0 = F_{\tau\rho}\sin\varphi_0 + mg$



Επειδή αναζητούμε την $a_{\max}$, η τριβή έχει τη μέγιστη τιμή της, άρα

$$F_K\sin\varphi_0 + \mu F_K\cos\varphi_0 = ma_{\max} \Rightarrow ma_{\max} = F_K\left(\sin\varphi_0 + \mu\cos\varphi_0\right)$$

$$F_K\left(\cos\varphi_0 - \mu\sin\varphi_0\right) = mg \Rightarrow F_K = \frac{mg}{\left(\cos\varphi_0 - \mu\sin\varphi_0\right)}$$

$$\Rightarrow a_{\max} = g\frac{\left(\sin\varphi_0 + \mu\cos\varphi_0\right)}{\left(\cos\varphi_0 - \mu\sin\varphi_0\right)}$$

Προφανώς:

$$a_{\max} = g\frac{(\sin\varphi_0 + \mu\cos\varphi_0)}{(\cos\varphi_0 - \mu\sin\varphi_0)} > a \Rightarrow g\frac{(a/g)+\mu}{1-\mu(a/g)} > a \Rightarrow \mu\left(1+(a/g)^2\right) > 0: \text{που ισχύει πάντα}$$

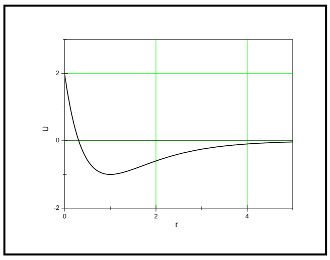
(γ) $$m\vec{a}_{/\alpha\mu\alpha\xi} = \vec{F}_{o\lambda/\alpha\mu\alpha\xi} = (-F_K + mg\cos\varphi_0 + 2ma\sin\varphi_0)\hat{r} + (2ma\cos\varphi_0 - mg\sin\varphi_0)\hat{\varphi}$$

$$a_{r/\alpha\mu\alpha\xi} = 0 \Rightarrow -F_K + mg\cos\varphi_0 + 2ma\sin\varphi_0 = 0 \Rightarrow F_K = m(g\cos\varphi_0 + 2a\sin\varphi_0)$$

$$a_{\varphi/\alpha\mu\alpha\xi} = 2a\cos\varphi_0 - g\sin\varphi_0 = \cos\varphi_0(2a - g\tan\varphi_0) = a\cos\varphi_0$$

4. Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου είναι ίση με $U(r) = -U_0 + U_0\left(1-e^{-a(r-r_0)}\right)^2$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων και U_0 και a είναι θετικές σταθερές. Έστω ότι το ένα άτομο παραμένει ακίνητο στη θέση $r=0$. **(α)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$. **(β)** Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε για ποια r είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική. **(γ)** Το ελεύθερο άτομο βρίσκεται αρχικά στη θέση $r = 3r_0/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Περιγράψετε την κίνηση που θα επακολουθήσει. **(δ)** Αν μπορούσαμε να συμπιέσουμε τα δύο άτομα, έτσι ώστε να πλησιάσουν σε απόσταση μικρότερη από την απόσταση ευσταθούς ισορροπίας τους, πόση πρέπει να γίνει η μεταξύ τους απόσταση ώστε, όταν αφεθούν ελεύθερα, να απομακρυνθούν με τρόπο ώστε να διασπασθεί το μόριο; $a > \ln 2/r_0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



$$U(r) = -U_0 + U_0\left(1-e^{-a(r-r_0)}\right)^2 \Rightarrow U(0) = -U_0 + U_0\left(1-e^{ar_0}\right)^2$$

$$U(r_0) = -U_0, \qquad U(r\to\infty) = 0$$

$$\frac{dU}{dr} = 2aU_0e^{-a(r-r_0)}\left[1-e^{-a(r-r_0)}\right]$$

$$\frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow \left[1-e^{-a(r-r_0)}\right] = 0 \Rightarrow 1 = e^{-a(r-r_0)} \Rightarrow (r-r_0) = 0 \Rightarrow r = r_0$$

$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0$, άρα, στο $r = r_0$ έχουμε ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας

(β) Η δύναμη είναι

$$F = -\frac{dU}{dr} = -2aU_0e^{-a(r-r_0)}\left[1-e^{-a(r-r_0)}\right]$$

$F > 0 \Rightarrow r < r_0$ απωστική δύναμη

$F < 0 \Rightarrow r > r_0$ ελκτική δύναμη

(γ) Το ελεύθερο άτομο κρατείται στη θέση $r = 3r_0/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική αρχική ταχύτητα. Σε αυτή τη θέση έχει δυναμική ενέργεια $U\left(\frac{3}{2}r_0\right) = -U_0 + U_0\left[1-e^{ar_0/2}\right]^2$.

Το άτομο υφίσταται ελκτική δύναμη και κινείται προς μικρότερα r. Θα αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητα στο σημείο r_0, όπου έχει ελάχιστο η δυναμική του ενέργεια, οπότε που θα

$$U\left(\frac{3}{2}r_0\right) = -U_0 + U_0\left[1-e^{ar_0/2}\right]^2 = U(r_0) + \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 = -U_0 + \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$U_0\left[1-e^{ar_0/2}\right]^2=\frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 \Rightarrow \upsilon_{\max}=\sqrt{\frac{2}{m}U_0\left[1-e^{ar_0/2}\right]^2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\max}=\left[1-e^{ar_0/2}\right]\sqrt{\frac{2}{m}U_0}}$$

Στη συνέχεια θα κινηθεί, επιβραδυνόμενο προς μικρότερα r, μέχρις ότου μηδενιστεί η ταχύτητά του

(δ) Αν τα δύο άτομα συμπιεσθούν, υπάρχει μία απόσταση r_1 τέτοια ώστε η δυναμική τους ενέργεια να μηδενισθεί. Αν αφεθούν ελεύθερα από αυτή τη θέση θα αρχίσουν να απομακρύνονται λόγω απωστικής δύναμης. Όταν φθάσουν στην κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, θα συνεχίσουν να απομακρύνονται λόγω της ταχύτητας που έχουν αποκτήσει. Η κινητική τους ενέργεια, στη θέση ισορροπίας είναι ίση με την ενέργεια που χρειάζονται για να απομακρυνθούν στο άπειρο. Αλλά στο άπειρο θα έχουν μηδενική ενέργεια και, επειδή θα αισθάνονται ελκτική δύναμη, αυτή η κίνηση (r_1,∞) θα επαναλαμβάνεται επ' άπειρον. Η διάσπαση του μορίου επιτυγχάνεται για συσπείρωση σε αποστάσεις $r<r_1$. Τα σημεία μηδενισμού της U προσδιορίζονται ως εξής:

$$U(r)=0 \Rightarrow -U_0+U_0\left(1-e^{-a(x-r_0)}\right)^2=0 \Rightarrow \left(1-e^{-a(x-r_0)}\right)^2=1 \Rightarrow 1-e^{-a(x-r_0)}=\pm 1$$

Το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί σε $r\to\infty$ και το αρνητικό σε $r_1=r_0-(\ln 2)/a$.

Για θετική τιμή ακτίνας όπου μηδενίζεται το δυναμικό $r_1=r_0-(\ln 2)/a>0 \Rightarrow \boxed{a>\ln 2/r_0}$

Άρα, προκειμένου να έχουμε διάσπαση του μορίου χρειάζεται συμπίεση σε: $r<r_0-(\ln 2)/a$.

5. Σημειακή μάζα m είναι συνδεδεμένη σε ακλόνητο στήριγμα με ελατήριο σταθεράς s και μηχανισμό που ασκεί τριβή της μορφής $\vec{F}_{\tau\rho}=-r\vec{\upsilon}$, με r τέτοιο ώστε να έχουμε κρίσιμη απόσβεση, οπότε η συνάρτηση της απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας είναι της μορφής $x(t)=(A+Bt)e^{-\gamma t},(\gamma=r/2m)$, $\left(\gamma^2=\omega_0^2\equiv\frac{s}{m}\Rightarrow r=2\sqrt{sm}\right)$.

(α) Αν το σύστημα ξεκινά την κίνησή του την χρονική στιγμή $t=0$, με αρχική απομάκρυνση x_0 και αρχική ταχύτητα υ_0, υπολογίστε τις σταθερές *A* και *B*.

(β) Αν $\upsilon_0=-2\omega_0 x_0$, δείξτε ότι το σύστημα <u>διέρχεται</u> από την θέση ισορροπίας μία μόνο φορά, υπολογίστε την αντίστοιχη χρονική στιγμή t_0, και την αντίστοιχη ταχύτητα διέλευσης.

(γ) Αν μεταβάλουμε τον συντελεστή τριβής σε νέα τιμή $r=\sqrt{sm}/2$, δείξτε ότι το σύστημα θα εκτελέσει ταλάντωση με ασθενή απόσβεση και υπολογίστε τη συχνότητα αυτής της ταλάντωσης και τον συντελεστή ποιότητας *Q*.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εφαρμογή των αρχικών συνθηκών στη σχέση κρίσιμης απόσβεσης: $x(t)=(A+Bt)e^{-\frac{rt}{2m}}$

Για την αρχική θέση: $x(0)=x_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=x_0}$. Από την αρχική ταχύτητα:

$$\dot{x}=Be^{-\frac{rt}{2m}}-\frac{r}{2m}(x_0+Bt)e^{-\frac{rt}{2m}} \Rightarrow \dot{x}(0)=B-\frac{r}{2m}x_0=\upsilon_0 \Rightarrow B=\frac{r}{2m}x_0+\upsilon_0 \Rightarrow \boxed{B=\gamma x_0+\upsilon_0}$$

Οπότε, τελικά : $x(t)=\left(x_0+(\gamma x_0+\upsilon_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$

(β) Λόγω της συνθήκης κρίσιμης απόσβεσης $\left(\gamma^2=\omega_0^2\Rightarrow\gamma=\omega_0\right)$, σχέσης, από (α), $x(t)=\left(x_0+(\gamma x_0+\upsilon_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$, και της σχέσης των αρχικών συνθηκών $\upsilon_0=-2\omega_0 x_0$, έχουμε:

$$x(t)=\left(x_0+\left(\gamma x_0+\upsilon_0\right)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}=\left(x_0+\left(\omega_0 x_0-2\omega_0 x_0\right)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}=\left(x_0-\omega_0 x_0 t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$$

Συνθήκη διέλευσης από τη θέση ισορροπίας: $x(t_0)=0\Rightarrow x_0\left(1-\omega_0 t_0\right)e^{-\frac{rt}{2m}}=0\Rightarrow \boxed{t_0=\dfrac{1}{\omega_0}}$

Η ταχύτητα είχε υπολογιστεί στο (α): $\dot{x}=\left(\gamma x_0+\upsilon_0\right)e^{-\frac{rt}{2m}}-\gamma\left(x_0+\left(\gamma x_0+\upsilon_0\right)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$

$$\dot{x}=\left(\omega_0 x_0-2\omega_0 x_0\right)e^{-\frac{rt}{2m}}-\omega_0\left(x_0+\left(\omega_0 x_0-2\omega_0 x_0\right)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}=-\omega_0 x_0 e^{-\frac{rt}{2m}}-\omega_0\left(x_0-\omega_0 x_0 t\right)e^{-\frac{rt}{2m}},$$

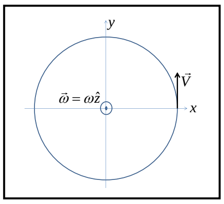
και για $t_0=1/\omega_0$: $\dot{x}(t_0)=-\omega_0 x_0 e^{-1}-\omega_0\left(x_0-x_0\right)e^{-\frac{rt}{2m}}\Rightarrow \boxed{\dot{x}(t_0)=-\omega_0 x_0/e}$

(γ) Αφού η συνθήκη κρίσιμης απόσβεσης είναι $\left(\gamma^2\equiv\left(\dfrac{r}{2m}\right)^2=\omega_0^2\equiv\dfrac{s}{m}\Rightarrow r=2\sqrt{sm}\right)$, για οποιοδήποτε $r<2\sqrt{sm}$, έχουμε ασθενή απόσβεση (άρα. και για το $r<\sqrt{sm}/2$), με συχνότητα $\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\left(r/2m\right)^2}=\sqrt{\omega_0^2-\left(\sqrt{s/m}/4\right)^2}\Rightarrow\boxed{\omega'=\omega_0\sqrt{15}/4}$.

Ο συντελεστής ποιότητας $Q=\dfrac{\omega'}{r/m}=\dfrac{\omega'}{\sqrt{sm}/2m}=\dfrac{2\omega'}{\sqrt{s/m}}=\dfrac{2\omega_0\sqrt{15}}{\omega_0 4}\Rightarrow\boxed{Q=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\approx 2}$

6. Υπολογίστε τη Φυγόκεντρο «δύναμη» και τη «δύναμη» Coriolis, τις οποίες οφείλει να παραδεχτεί ένας παρατηρητής που βρίσκεται στη Γη, προκειμένου να εξηγήσει την δυναμική συμπεριφορά ενός αεροπλάνου το οποίο κινείται παράλληλα στην επιφάνεια της Γης, με ταχύτητα σταθερού μέτρου V, ως προς την επιφάνεια της Γης, στις παρακάτω περιπτώσεις: (α) κατά μήκος του Ισημερινού κύκλου, (β) κατά μήκος ενός μεσημβρινού κύκλου, ενώ διέρχεται πάνω από τον Ισημερινό κύκλο, (γ) κατά μήκος ενός μεσημβρινού κύκλου, ενώ βρίσκεται σε βόρειο γεωγραφικό πλάτος 45^o, (δ) κατά μήκος ενός μεσημβρινού κύκλου, ενώ διέρχεται από το Βόρειο Πόλο, (ε) κατά μήκος ενός παραλλήλου που βρίσκεται σε βόρειο γεωγραφικό πλάτος 45^o.

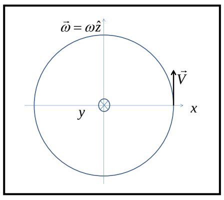
ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Θεωρούμε μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς που έχει την αρχή του στο κέντρο της Γης, τον συχνότητα περιστροφής της Γης. Θεωρούμε, επίσης, ότι το επίπεδο x-z είναι επιλεγμένο έτσι ώστε να περιέχει στιγμιαία το αεροπλάνο.



(α) $\vec{F}_C=-2m\vec{\omega}\times\vec{V}=-2m\omega V\left(\hat{z}\times\hat{y}\right)=2m\omega V\hat{x}$

$\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma}=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=-m\omega^2 R\,\hat{z}\times\left(\hat{z}\times\hat{x}\right)=m\omega^2 R\hat{x}$

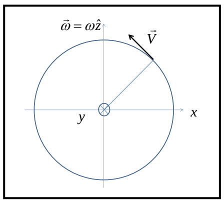
$\vec{F}_{o\lambda}=\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma}+\vec{F}_C=\left(m\omega^2 R+2m\omega V\right)\hat{x}$



(β) $\vec{F}_C=-2m\vec{\omega}\times\vec{V}=-2m\omega V\left(\hat{z}\times\hat{z}\right)=0$

$\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma}=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=-m\omega^2 R\,\hat{z}\times\left(\hat{z}\times\hat{x}\right)=m\omega^2 R\hat{x}$

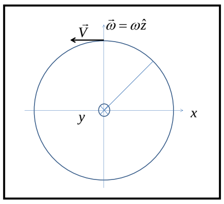
$\vec{F}_{o\lambda}=\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma}+\vec{F}_C=\left(m\omega^2 R\right)\hat{x}$



$$(\gamma)\ \ \vec{F}_C=-2m\vec{\omega}\times\vec{V}=-2m\omega\left(V/\sqrt{2}\right)\left(\hat{z}\times(-\hat{x})\right)=-\hat{y}\sqrt{2}m\omega V$$

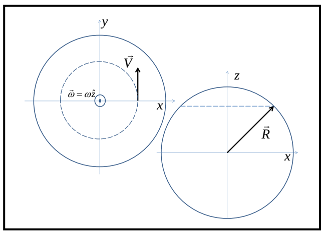
$$\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma}=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=-m\omega^2\hat{z}\times\left(\hat{z}\times\left(R/\sqrt{2}\right)\hat{x}\right)=\left(m\omega^2R/\sqrt{2}\right)\hat{x}$$

$$\vec{F}_{o\lambda}=\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma}+\vec{F}_C=\left(m\omega^2R/\sqrt{2}\right)\hat{x}-\hat{y}\sqrt{2}m\omega V$$



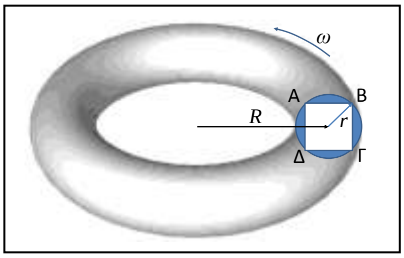
$$(\delta)\ \ \vec{F}_C=-2m\vec{\omega}\times\vec{V}=-2m\omega\left(V\right)\left(\hat{z}\times(-\hat{x})\right)=-\hat{y}2m\omega V$$

$$\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma}=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=-m\omega^2R\,\hat{z}\times\left(\hat{z}\times\hat{z}\right)=0$$



$$(\varepsilon)\ \ \vec{F}_C=-2m\vec{\omega}\times\vec{V}=-2m\omega\left(V\right)\left(\hat{z}\times\hat{y}\right)=-\hat{x}\,2m\omega V$$

$$\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma}=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=-m\omega^2R/\sqrt{2}\ \hat{z}\times\left(\hat{z}\times\hat{x}\right)=-\hat{x}\,m\omega^2R/\sqrt{2}$$



7. Διαστημικός Σταθμός (ΔΣ) έχει τη μορφή τόρου (κυλινδρικού δακτυλίου) μέσης ακτίνας R, ο ωφέλιμος χώρος του οποίου έχει τετραγωνική διατομή ΑΒΓΔ εγγεγραμμένη στην κυκλική διατομή του δακτυλίου ακτίνας r, όπως στο σχήμα. Ο Σταθμός περιστρέφεται αντι-ωρολογιακά, μακριά από άλλα σώματα, με γωνιακή ταχύτητα ω περί τον άξονα συμμετρίας του για την δημιουργία τεχνητού βαρυτικού πεδίου. **(α)** Προσδιορίστε ποιά πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι το «δάπεδο» και ποιά είναι η «οροφή» του διαδρόμου του Σταθμού, σε σχέση με το τεχνητό βαρυτικό πεδίο. **(β)** Βρείτε τη σχέση του ω με την επιτάχυνση της τεχνητής βαρύτητας, g_τ, στο κέντρο συμμετρίας του ΑΒΓΔ. **(γ)** Υπολογίστε το πηλίκο της τεχνητής βαρύτητας μεταξύ «οροφής» και «δαπέδου», στο μέσον του διαδρόμου. **(δ)** Υπολογίστε, διανυσματικά $\left(\hat{R},\hat{\varphi},\hat{z}\right)$, τις δυνάμεις που αισθάνεται ένας αστροναύτης, μάζας m, όταν «ανεβαίνει» κατά μήκος μίας «κατακόρυφης» σκάλας, από το «δάπεδο» προς την «οροφή», την ώρα που διέρχεται από το κέντρο του ΑΒΓΔ, με σχετική ταχύτητα (ως προς τον ΔΣ) ίση με υ_0. Ποιές δυνάμεις μεταβάλλονται όταν ο ΔΣ αλλάζει φορά περιστροφής; [Δεδομένα: R = 90 m, r = 10 m, $g_\tau = g_\Gamma/10 \approx 1$ m/s^2, υ_0 = 2m/s, m = 75 kg]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Λόγω της φυγόκεντρης δύναμης : $\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma}=-m\left[\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)\right]=m\omega^2R\hat{R}$

Η φυγόκεντρος έχει φορά προς τα έξω: «δάπεδο»=ΒΓ και «οροφή»=ΑΔ

$$(\beta)\ \ g_\tau=g_{\varphi\upsilon\gamma}=\omega^2R\Rightarrow\boxed{\omega=\sqrt{g_\tau/R}}\Rightarrow\omega=\sqrt{1\,ms^{-2}/100\,m}\Rightarrow\omega=0.1s^{-1}$$

$$(\gamma)\ \ g_\tau=\omega^2r'\Rightarrow\frac{g_{\tau,o\rho\varphi}}{g_{\tau,\delta\alpha\pi}}=\frac{R-\left(r/\sqrt{2}\right)}{R+\left(r/\sqrt{2}\right)}=\frac{R\sqrt{2}-r}{R\sqrt{2}+r}$$

(δ) $\vec{F}_{ολ} = m\left[-\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)-2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}'\right] = 75kg\left[\omega^2 R\hat{R} - 2\omega\upsilon_0\left(-\hat{\varphi}\right)\right]$

$$\vec{F}_{ολ} = 75kg\left[0.001\,s^{-2}100m\hat{R} - 0.02s^{-1}2ms^{-1}\left(-\hat{\varphi}\right)\right] = 7.5Nt\left[\hat{R}+0.4\hat{\varphi}\right]$$

Κατά την αλλαγή φοράς περιστροφής, αλλάζει πρόσημο μόνο η Coriolis.

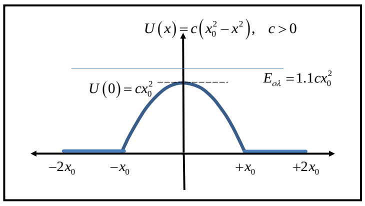
8. Σωματίδιο μάζας m μπορεί να κινηθεί σε 1-διάσταση (x) μέσα σε διατηρητικό πεδίο δυνάμεων, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του οποίου είναι μηδέν παντού πλήν της περιοχής $-x_0 \le x \le x_0$, εντός της οποίας έχει τη μορφή $U(x) = c\left(x_0^2 - x^2\right), \quad c > 0$.

(α) Σχεδιάστε την $U(x)$. Προσδιορίστε τα σημεία και το είδος ισορροπίας του πεδίου.

(β) Το σωματίδιο αφήνεται στη σημείο $x_1 = -2x_0$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = +\hat{x}\left(x_0\sqrt{2.2c/m}\right)$. Δείξτε ότι το σωματίδιο θα περάσει από το x=0, υπολογίστε την ταχύτητα διέλευσης, και μελετήστε την κίνηση του σωματιδίου στη συνέχεια.

(γ) Αν $U(x) = c\left(x^2 - x_0^2\right), \quad c > 0$, και τη στιγμή $t = 0$ αφήσουμε το σωματίδιο στο σημείο $x_1 = -2x_0$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = +\hat{x}\left(x_0\sqrt{2c/m}\right)$, δείξτε ότι το σωματίδιο θα περάσει από το σημείο $x_2 = +2x_0$ και υπολογίστε τη χρονική στιγμή και την ταχύτητα διέλευσης από αυτό το σημείο. $\left[\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arctan\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\right]$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) $U(x) = c\left(x_0^2 - x^2\right) \Rightarrow U(0) = cx_0^2 \;\; U(\pm x_0) = 0$

Επίσης $\frac{dU}{dx} = -2cx, \quad \Rightarrow \frac{dU}{dx} = 0 \quad \Rightarrow x = 0$: ***<u>Ακρότατο</u>***

και $\frac{d^2U}{dx^2} = -2c, \quad \Rightarrow \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = -2c < 0$:***<u>Μέγιστο, Ασταθής</u>***

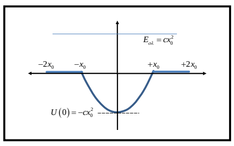
(β) Στο $x = -2x_0$: $U = 0 \Rightarrow E_{ολ} = E_{κιν} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = 1.1cx_0^2$

Από $x = -2x_0$ μέχρι $x = -x_0$, το σωματίδιο κινείται ισοταχώς με την αρχική ταχύτητα. Από το $x = -x_0$ μέχρι το $x = 0$ το σωματίδιο κινείται επιβραδυνόμενο, και το x=0 :

$$x = 0: \quad U = cx_0^2 \Rightarrow E_{κιν} = E_{ολ} - U = 1.1cx_0^2 - cx_0^2 = 0.1cx_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon(x=0) = x_0\sqrt{0.2c/m}$$

Από $x = 0$ μέχρι $x = +x_0$, επιταχύνεται. Για $[+x_0, +\infty)$ κινείται με την αρχική ταχύτητα.

(γ) Στο $x = 0$: τοπικό ελάχιστο, με $U(0) = -cx_0^2$



και με $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = 2c > 0$, άρα: αρμονική ταλάντωση.

Το συνολικό διάστημα από $x_1 = -2x_0$ μέχρι $x_2 = +2x_0$ αποτελείται από δύο διαστήματα ισοταχούς κίνησης: $2\Delta t_1 = 2\frac{x_0}{\upsilon_0} = 2\sqrt{\frac{m}{2c}}$, και τμήμα αρμονικής ταλάντωσης $2\Delta t_2$:

$$\Delta t_2 : m\upsilon_0^2/2 = m\upsilon^2/2 + c\left(x^2 - x_0^2\right) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2c/m}\sqrt{2x_0^2 - x^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2c}}\int_{-x_0}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{2x_0^2 - x^2}} = \int_0^{\Delta t_2} dt$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{m}{2c}}\int_{-x_0}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{2x_0^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{m}{2c}}\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2c}}$$

$\Delta t_{o\lambda} = 2\Delta t_1 + \Delta t_2 = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{m}{2c}}$. Διέλευση από $x_2 = +2x_0$ με την αρχική ταχύτητα.

9. Απλός αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση, με μάζα *m* και σταθερά ελατηρίου *s*, διεγείρεται από μία δύναμη $F=F_0\sin(\omega t)$. α) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση $x=x(t)$, στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες είναι $x(t=0)=0$ και $\dot{x}(t=0)=\upsilon_0$. β) Για συχνότητες διέγερσης κοντά στη συχνότητα $\omega_0=\sqrt{s/m}$, θεωρείστε ότι $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ (όπου $\Delta\omega$ μικρό και τέτοιο ώστε $\Delta\omega\ t<<1$). Αναπτύσσοντας τη λύση του ερωτήματος (α) γύρω από το ω_0, να δείξετε ότι το πλάτος της μετατόπιση αυξάνει γραμμικά με το χρόνο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Διαφορική εξίσωση κίνησης $m\ddot{x} + sx = F_0\sin\left(\omega t\right)$

Γενική Λύση Μη-Ομογενούς = Γενική Λύση Ομογενούς + Ειδική Λύση Μη-Ομογενούς

Γενική Λύση Ομογενούς : $x_{\Gamma\Lambda\mathrm{O}} = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$

Ειδική Λύση Μη-Ομογενούς (με τη μορφή του Μη-Ομογενούς όρου): $x_{\mathrm{E}\Lambda\mathrm{M-O}} = B\sin\left(\omega t\right)$

$$-\omega^2 mB\sin\left(\omega t\right) + sB\sin\left(\omega t\right) = F_0\sin\left(\omega t\right) \Rightarrow B\left(-\omega^2 + s/m\right) = F_0/m \Rightarrow \boxed{B = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Επομένως, η Γενική Λύση της Μη-Ομογενούς (πλήρους διαφορικής) γράφεται:

$$x_{\Gamma\Lambda M-\mathrm{O}} = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\left(\omega t\right)$$

Ισχύει περίπου: $\omega_0^2 - \omega^2 = \left(\omega_0 - \omega\right)\left(\omega_0 + \omega\right) \approx \left(\Delta\omega\right)\left(2\omega_0\right)$, οπότε:

$$x_{\Gamma\Lambda M-\mathrm{O}} \simeq A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{F_0/m}{2\omega_0\Delta\omega}\sin\left(\left(\omega_0 - \Delta\omega\right)t\right), \qquad \left[\Delta\omega\, t << 1\right]$$

$$x_{\Gamma\Lambda M-\mathrm{O}} \simeq A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{F_0/m}{2\omega_0\Delta\omega}\left[\sin\left(\omega_0 t\right)\cos\left(-\Delta\omega t\right) + \cos\left(\omega_0 t\right)\sin\left(-\Delta\omega t\right)\right]$$

$$x_{\Gamma\Lambda M-\mathrm{O}} \approx A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{F_0/m}{2\omega_0\Delta\omega}\left[\sin\left(\omega_0 t\right)1 + \cos\left(\omega_0 t\right)\left(-\Delta\omega t\right)\right]$$

Άρα, υπάρχει ένα όρος: $\left(-\Delta\omega t\right)\frac{F_0/m}{2\omega_0\Delta\omega}\cos\left(\omega_0 t\right)$, που αυξάνει γραμμικά με το χρόνο, και του οποίου το πλάτος, μάλιστα, είναι αντιστρόφως ανάλογο της <u>μικρής ποσότητας Δω</u>.