ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 31/1/2022

Θέμα 1. (α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη, γράψτε τον γενικό τύπο του πολυωνύμου Taylor της f τάξης n με κέντρο ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \cosh x$ τάξης $n = 4$ με κέντρο το $x_0 = 0$. (Υπενθυμίζεται ότι $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$)

(γ) Γράψτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης e^x με κέντρο το $x_0 = 0$. Ποιό είναι το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Το πολυώνυμο Taylor της $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

(ii) Έχουμε $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ και άρα $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$, $f''(x) = (\sinh x)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$, $f^{(3)}(x) = (\cosh x)' = \sinh x$ και $f^{(4)}(x) = (\sinh x)' = \cosh x$. Συνεπώς, $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 1$, και $f'(0) = f^{(3)}(0) = 0$. Άρα

$$T_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

(γ) Έχουμε

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Παρατηρούμε ότι για $x = -\frac{1}{2}$, $e^{-\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ και άρα το ζητούμενο άθροισμα ισούται με $e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Θέμα 2. (α) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. Ποιό είναι το $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$?

(Υπενθυμίζεται ότι $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$)

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Θέτουμε $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$. Τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

και άρα

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

Από το κριτήριο Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ συγκλίνει.

Αφού η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ συγλίνει έχουμε ότι $\lim \dfrac{2^n n!}{n^n} = 0$.

(β) Έχουμε

$$\lim \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Θέμα 3. Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$.

(α) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς και εξετάστε την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm R$. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει?

(β) Γράψτε την δυναμοσειρά που αναπαριστά την f' και δείξτε ότι $f'(x) = \frac{1}{2-x}$, για κάθε $x \in (-R, R)$. (Υπενθυμίζεται ότι $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}$, για κάθε $t \in (-1, 1)$.)

Δείξτε ότι $\left(\ln\left(\frac{2}{2-x}\right)\right)' = \frac{1}{2-x}$ για κάθε $x < 2$ και στην συνέχεια βρείτε τον τύπο της f.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Έχουμε

$$\rho = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{2^n n}} = \frac{1}{2 \lim \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$$

και άρα $R = \frac{1}{\rho} = 2$.

Για $x = -2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(-1)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά, η οποία ως γνωστόν συγκλίνει (από το κριτήριο Leibniz).

Για $x = 2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά η οποία αποκλίνει.

Άρα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά αποτελούν το διάστημα $[-2, 2)$.

(β) Είναι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$$

(γ) Έχουμε $\left(\ln\left(\frac{2}{2-x}\right)\right)' = (\ln 2 - \ln(2-x))' = (-\ln(2-x))' = \frac{1}{2-x}$. Άρα από το (γ), οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\ln\left(\frac{2}{2-x}\right)$ έχουν την ίδια παράγωγο για κάθε $x \in (-2, 2)$. Συνεπώς υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{2-x}\right) + c$$

για κάθε $x \in (-2, 2)$. Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε ότι $c = 0$ και άρα $f(x) = \ln\left(\frac{2}{2-x}\right)$.

Θέμα 4. (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα: (i) $\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx$ (ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$

(β) Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) (i) Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\ dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\ dx.$$

Θέτουμε $t = x+2$ και $dt = dx$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx = \int \frac{t-2}{t^2+1}\ dt = \int \frac{t}{t^2+1}\ dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}\ dt$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = t^2+1$ και άρα $du = 2tdt \Rightarrow tdt = du/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{t}{t^2+1}\ dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln\sqrt{t^2+1} = \ln\sqrt{(x+2)^2+1}.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{t^2+1}\ dt = \arctan t = \arctan(x+2).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx = \ln\sqrt{(x+2)^2+1} - 2\arctan(x+2).$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\sin x)'\ dx &= [\cos x \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)' \sin x\ dx \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)' \sin x\ dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin x\ dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)\ dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx = \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x
\end{aligned}$$

Άρα θέτοντας $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$ έχουμε ότι $I = \pi - I \Leftrightarrow 2I = \pi \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2}$.

(β) Έχουμε

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y, \quad f_y(x,y) = 3y^2 - 3x f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{yy}(x,y) = 6y, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -3$$

Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0$$
$$f_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Άρα έχουμε δύο πιθανά ακρότατα, τα $(0,0)$ και $(1,1)$. Για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = 36xy - 9$$

Έχουμε $\Delta(0,0) = -9 < 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(1,1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$. Άρα το $(1,1)$ είναι τοπικό ελάχιστο.