

ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΣΑΤΜ, 31/1/2022

ΕΠΙΛΕΞΤΕ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΤΡΙΑ ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. (α) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη, γράψτε τον γενικό τύπο του πολυωνύμου Taylor της f τάξης n με κέντρο ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \cosh x$ τάξης $n = 4$ με κέντρο το $x_0 = 0$. (Υπενθυμίζεται ότι $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)

(γ) Γράψτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης e^x με κέντρο το $x_0 = 0$. Ποιό είναι το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$?

Θέμα 2. (α) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. Ποιό είναι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$?

(Υπενθυμίζεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$)

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Θέμα 3. Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$.

(α) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς και εξετάστε την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm R$. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει?

(β) Γράψτε την δυναμοσειρά που αναπαριστά την f' και δείξτε ότι $f'(x) = \frac{1}{2-x}$, για κάθε $x \in (-R, R)$.

(Υπενθυμίζεται ότι $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}$, για κάθε $t \in (-1, 1)$.)

(γ) Δείξτε ότι $\left(\ln\left(\frac{2}{2-x}\right)\right)' = \frac{1}{2-x}$ για κάθε $x < 2$ και στην συνέχεια βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 4. (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα: (i) $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx$ (ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

(β) Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.