ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΓΡΗΓΟΡΙΑΔΗΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 157 80, Αθήνα

Ηλεκτρονική Διεύθυνση: vgregoriades@math.ntua.gr

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1. Ορολογία και συμβολισμοί

Με $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ εννοούμε τα σύνολα των φυσικών, ακεραίων, ρητών και πραγματικών αριθμών αντίστοιχα, όπου στο $\mathbb{N}$ συμπεριλαμβάνουμε και το 0, έτσι που

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Το **δυναμοσύνολο** $\mathcal{P}(X)$ ενός συνόλου X είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X.

Δοσμένων δύο μη κενών συνόλων X και Y συμβολίζουμε με Y^X το **σύνολο όλων των συναρτήσεων** από το X στο Y. Αν $(X_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια μη κενών συνόλων συμβολίζουμε με $\prod_{i\in I} X_i$ την οικογένεια όλων των συναρτήσεων $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ με $f(i) \in X_i$ για κάθε $i \in I$. Στην περίπτωση όπου $X_i = X$ για κάθε $i \in I$ τότε το σύνολο $\prod_{i\in I} X_i$ είναι προφανώς το X^I. Θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα σύνολα της μορφής $X^{\mathbb{N}}$.

Μια ένα-προς-ένα συνάρτηση θα καλείται και **μονομορφισμός** ενώ μια επί συνάρτηση θα καλείται και **επιμορφισμός**. Με τον όρο **ισομορφισμός** ή **αντιστοιχία** εννοούμε μια συνάρτηση που είναι ένα-προς-ένα και επί. Επίσης συμβολίζουμε

$$\begin{aligned} f : X \rightarrowtail Y &\iff \text{η } f \text{ είναι μονομορφισμός,}\\ f : X \twoheadrightarrow Y &\iff \text{η } f \text{ είναι επιμορφισμός,}\\ f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Y &\iff \text{η } f \text{ είναι ισομορφισμός.} \end{aligned}$$

Αν $f \in Y^X$, $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$ συμβολίζουμε με $f[A]$ την **εικόνα** του A κάτω από την f και με $f^{-1}[B]$ την **αντίστροφη εικόνα** του B κάτω από την f, δηλαδή

$$\begin{aligned} f[A] &= \{y \in Y \mid \text{υπάρχει } x \in X \text{ με } f(x) = y\}\\ f^{-1}[B] &= \{x \in X \mid f(x) \in B\}. \end{aligned}$$

Ο **περιορισμός** μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ στο σύνολο $A \subseteq X$ συμβολίζεται με $f|A$. Στις συναρτήσεις $f : X \to Y$ συμπεριλαμβάνουμε και τις περιπτώσεις όπου τα X, Y είναι τα κενά σύνολα. Αν $X = \varnothing$ ή $Y = \varnothing$ τότε θα λέμε πως η $f : X \to Y$ είναι η **κενή συνάρτηση**. Θεωρούμε ότι η κενή συνάρτηση είναι πάντα μονομορφισμός και πως η $f : \varnothing \to \varnothing$ είναι ισομορφισμός.

Πολλές φορές όταν γράφουμε μαθηματικές προτάσεις θα χρησιμοποιούμε τους λογικούς τελεστές της **διάζευξης** $\vee$, **σύζευξης** $\&$, **άρνησης** $\neg$, και λογικής **συνεπαγωγής** $\longrightarrow$, που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} P(x) \ \vee\ Q(y) &\iff \text{το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ ή το } y \text{ την } Q\\ P(x) \ \&\ Q(y) &\iff \text{το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ και το } y \text{ την } Q\\ \neg P(x) &\iff \text{το } x \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P\\ P(x) \ \longrightarrow Q(y) &\iff \text{αν το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ τότε το } y \text{ έχει την } Q. \end{aligned}$$

Με τον όρο "ποσοδείκτης" εννοούμε είτε το $\exists$ (υπαρξιακός ποσοδείκτης) είτε το $\forall$ (καθολικός ποσοδείκτης). Όταν γράφουμε λογικές προτάσεις με σύμβολα θα παραλείπουμε τις παρενθέσεις όσο είναι δυνατόν. Για παράδειγμα με

$$\exists i \in I \; \forall j \in J \; (i, j) \in A$$

εννοούμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο i του I έτσι ώστε για κάθε στοιχείο j του J ισχύει $(i, j) \in A$.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι ποσοδείκτες με "κενό πεδίο" δηλαδή οι εκφράσεις $\exists i \in I$ και $\forall i \in I$ όπου I είναι το κενό σύνολο. Κάθε έκφραση της μορφής

$$\exists i \in I \; P(i)$$

για $I = \varnothing$ είναι πάντα ψευδής γιατί είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists i \; (i \in \varnothing \; \& \; P(i))$. Από την άλλη κάθε έκφραση της μορφής

$$\forall i \in I \; P(i)$$

για $I = \varnothing$ είναι πάντα αληθής γιατί είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall i \; (i \notin \varnothing \; \vee \; P(i))$.

1.2. Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Δύο σύνολα A, B ονομάζονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $A =_c B$. Αντιλαμβανόμαστε τη σχέση $=_c$ ως μαθηματική έκφραση της διαισθητικής έννοιας "το A έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το B". Η θεώρησή μας ότι η κενή συνάρτηση $f : \varnothing \to \varnothing$ είναι ένα-προς-ένα και επί εκφράζει τη βασική αρχή ότι το κενό σύνολο έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με τον εαυτό του, συγκεκριμένα καθόλου στοιχεία.

Θα λέμε ότι το σύνολο A έχει **πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο** από το B και θα γράφουμε $A \leqslant_c B$ αν υπάρχει μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $f : A \rightarrowtail B$. Αντιλαμβανόμαστε την έκφραση $\leqslant_c$ ως μαθηματική έκφραση της διαισθητικής έννοιας "το A έχει μικρότερο ή ίσο πλήθος στοιχείων από το B". Η θεώρησή μας ότι η κενή συνάρτηση $f : \varnothing \to B$ είναι πάντα ένα-προς-ένα εκφράζει τη βασική αρχή ότι το κενό σύνολο έχει πάντα λιγότερα στοιχεία από οποιοδήποτε μη κενό σύνολο.

Οι πιο πάνω ορισμοί θα είχαν μικρό νόημα αν δεν επαλήθευαν την εξής θεμελιώδη απαίτηση:

αν

> το A έχει μικρότερο ή ίσο πλήθος στοιχείων από το B και
>
> το B έχει μικρότερο ή ίσο πλήθος στοιχείων από το A

τότε

> το A και το B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Αυτό ικανοποιείται για τους πιο πάνω ορισμούς από το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.2.1 (Schröder-Bernstein)**.** *Για όλα τα σύνολα A, B αν $A \leqslant_c B$ και $B \leqslant_c A$ τότε $A =_c B$.*

Ένα σύνολο A είναι **πεπερασμένο** αν είναι είναι ισοπληθικό με το σύνολο $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Όταν $n = 0$ το τελευταίο σύνολο είναι το κενό έτσι που το κενό σύνολο είναι πεπερασμένο. Το A είναι **αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$. Όπως είναι γνωστό τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- το A είναι αριθμήσιμο,
- $A \leqslant_c \mathbb{N}$,
- $A = \varnothing$ ή υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ (όχι απαραίτητα ένα-προς-ένα).

Ο τελευταίος χαρακτηρισμός λέει ότι τα αριθμήσιμα σύνολα είναι ακριβώς αυτά που επιδέχονται μια απαρίθμηση $A = \{\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(n), \ldots\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, χωρίς να μας απασχολεί αν κάποιες τιμές επαναλαμβάνονται, δηλαδή επιτρέπουμε $\pi(n) = \pi(m)$ για $n \neq m$.

Μερικά βασικά αποτελέσματα στα αριθμήσιμα σύνολα είναι τα εξής:

- Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από αριθμήσιμα σύνολα τότε η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.
- Αν τα A_0,..., A_n είναι αριθμήσιμα σύνολα τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A_0 \times \cdots \times A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.
- Αν το B είναι αριθμήσιμο σύνολο και $A \leqslant_c B$ τότε το A είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Από τα προηγούμενα προκύπτει εύκολα ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-1) \cdot \mathbb{N}$ και οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q} \leqslant_c \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμα σύνολα. Συνεπώς $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$. Άλλες γνωστές ισοπληθικότητες είναι:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} =_c \text{το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών},\\
&\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\\
&\mathbb{R} =_c (a,b) =_c [a,b) =_c (a,b] =_c [a,b] \quad \text{όπου } a < b,\\
&\mathbb{R} =_c C([0,1]) = \text{το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων } f : [0,1] \to \mathbb{R},\\
&\mathbb{R} =_c \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \text{το σύνολο όλων των άρρητων αριθμών}.
\end{aligned}$$

Θα λέμε ότι ένα σύνολο A **έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς** αν $A =_c \mathbb{R}$ και ότι το A **έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς** αν $A \leqslant_c \mathbb{R}$.

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ότι όπου έχουμε ένα άπειρο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ισχύει είτε $A =_c \mathbb{N}$ είτε $A =_c \mathbb{R}$. Ο Cantor, θεμελιωτής της θεωρίας συνόλων, έθεσε το ερώτημα κατά πόσον αυτό το συμπέρασμα ισχύει για όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αυτή η πρόταση έγινε γνωστή ως

Υπόθεση του Συνεχούς (Continuum Hypothesis).
Για κάθε άπειρο $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει είτε $A =_c \mathbb{N}$ είτε $A =_c \mathbb{R}$.

Όπως αποδείχθηκε από τους Gödel (1940) και Cohen (1963) η Υπόθεση του Συνεχούς είναι *ανεξάρτητη* από τα συνήθη αξιώματα των μαθηματικών. Δηλαδή δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί (Cohen) αλλά ούτε και να διαψευστεί (Gödel) με εργαλεία τα συνηθισμένα αξιώματα που δεχόμαστε στα μαθηματικά.

Από την άλλη έγινε γρήγορα γνωστό πως κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς. Βλέπουμε λοιπόν ότι η προσθήκη μιας τοπολογικής συνθήκης απαντά θετικά στο πρόβλημα. Θα δούμε ότι η Υπόθεση του Συνεχούς επαληθεύεται από πολύ περισσότερα "ορίσιμα" σύνολα.

Τέλος αναφέρουμε το γνωστό αποτέλεσμα του Cantor ότι για κάθε σύνολο A έχουμε $A <_c \mathcal{P}(A)$, δηλαδή $A \leqslant_c \mathcal{P}(A)$ και $A \neq_c \mathcal{P}(A)$. Συνεπώς υπάρχουν σύνολα με μεγαλύτερη πληθικότητα από το $\mathbb{R}$, το $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ για παράδειγμα. Από την άλλη τα σύνολα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι συνήθως $\leqslant_c \mathbb{R}$.

1.3. Στοιχεία μετρικών χώρων και τοπολογίας

Δίνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των εννοιών που θα χρειαστούμε. **Μετρική** σε ένα μη κενό σύνολο X είναι μια συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned}
&d(x,y) \geqslant 0 \text{ και } d(x,y) = 0 \iff x = y\\
&d(x,y) = d(y,x)\\
&d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,x)
\end{aligned}$$

όπου $x, y \in X$. Το ζεύγος (X, d) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Η **διακριτή μετρική** σε ένα σύνολο X είναι η

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \neq y, \\ 0, \text{αν } x = y, \end{cases} \qquad \text{όπου } x, y \in X.$$

Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά θα θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ με τη **συνήθη μετρική** της απόστασης $\sigma(x,y) = |x-y|$.

Στους επόμενους ορισμούς θεωρούμε ότι μας δίνεται ένας μετρικός χώρος (X,d). Για κάθε μη κενό $Y \subseteq X$ μπορούμε να πάρουμε τον *περιορισμό* d_Y της μετρικής d στο σύνολο Y, δηλαδή $d_Y(x,y) = d(x,y)$ για κάθε $x, y \in Y$. Ο (Y, d_Y) θα λέγεται **υπόχωρος** του (X,d).

Αν $x \in X$ και $r > 0$ η **ανοικτή μπάλα** κέντρου x και ακτίνας r στον (X,d) είναι το σύνολο

$$B_d^X(x,r) \equiv B_d(x,r) \equiv B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

Το σημείο x είναι **εσωτερικό σημείο** του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r > 0$ με $B_d(x,r) \subseteq A$. Το A είναι **ανοικτό** αν κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A.

Το **εσωτερικό** A° του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A, ισοδύναμα

$$A^\circ = \bigcup \{V \subseteq X \mid V\text{: ανοικτό και } V \subseteq A\}.$$

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X **συγκλίνει** στο $x \in X$ ως προς την μετρική d αν $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) \to 0$. Γράφουμε $x_n \xrightarrow{d} x$ ή πιο απλά $x_n \to x$ όταν η d είναι σαφής από το κείμενο, για να δηλώσουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x. Λέμε ότι η $(_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $A \subseteq X$ είναι **συγκλίνουσα** στο A αν υπάρχει $x \in A$ με $x_n \to x$.

Ένα $x \in X$ είναι **οριακό σημείο** του $A \subseteq X$ αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$ ως προς d. Επιτρέπουμε $x_n = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έτσι που κάθε στοιχείο του A είναι και οριακό σημείο του A. Το x είναι **σημείο συσσώρευσης** του A αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$ και $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το σημείο $x \in A$ είναι **μεμονωμένο σημείο** του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r > 0$ με $B(x,r) \cap A = \{x\}$. Είναι σαφές ότι τα οριακά σημεία του A είναι ακριβώς τα μεμονωμένα σημεία μαζί με τα σημεία συσσώρευσης του A.

Το A είναι **κλειστό** αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία (ισοδύναμα περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής τους) ενώ το A είναι **τέλειο** αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι το σύνολο όλων των οριακών σημείων του A, ισοδύναμα

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F\text{: κλειστό και } F \supseteq A\}.$$

Προφανώς $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$, το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A = A^\circ$ και το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$. Όπως είναι γνωστό το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν το συμπλήρωμα $X \backslash A$ είναι κλειστό.

Ένα $D \subseteq X$ είναι **πυκνό** στον (X,d) αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ ισχύει $B_d(x,r) \cap D \neq \varnothing$. Προφανώς αν το D είναι πυκνό υποσύνολο του (X,d) τότε κάθε στοιχείο του X είναι όριο ακολουθίας του D. Ο μετρικός χώρος (X,d) είναι **διαχωρίσιμος** αν έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Ένα $K \subseteq X$ είναι **συμπαγές** αν για κάθε οικογένεια $(V_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ υπάρχουν $i_1, \ldots, i_n \in I$ με $K \subseteq \bigcup_{t=1}^n V_{i_t}$, δηλαδή για κάθε ανοικτό κάλυμμα του K υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Η συμπάγεια στους μετρικούς χώρους είναι ισοδύναμη με την **ακολουθιακή συμπάγεια**, δηλαδή το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του υπάρχει υπακολουθία $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο $x \in K$. Κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό.

Μια συνάρτηση $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ ανάμεσα σε μετρικούς χώρους είναι **συνεχής στο σημείο** $x \in X$ αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f[B_d(x,\delta)] \subseteq$

$B_\rho(f(x), r)$, ισοδύναμα για κάθε $V \subseteq Y$ που είναι ρ-ανοικτό υπάρχει $W \subseteq X$ που είναι d-ανοικτό έτσι ώστε $f[W] \subseteq Y$. Σύμφωνα με την *Αρχή Μεταφοράς* η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με $x_n \xrightarrow{d} x$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$.

Η συνάρτηση f είναι **συνεχής** αν είναι συνεχής *σε κάθε* $x \in X$ ή ισοδύναμα για κάθε ανοικτό $V \subseteq Y$ η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[V]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Τέλος θα λέμε ότι η f είναι **τοπολογικός ισομορφισμός**.

Δύο μετρικές d_1 και d_2 στο σύνολο X είναι **ισοδύναμες**, συμβολικά $d_1 \sim d_2$ αν παράγουν την ίδια τοπολογία, δηλαδή για κάθε $V \subseteq X$ το V είναι d_1-ανοικτό αν και μόνο αν το V είναι d_2-ανοικτό. Ισοδύναμα $d_1 \sim d_2$ αν και μόνο αν η **ταυτοτική συνάρτηση**

$$\mathrm{id} : (X, d_1) \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow (X, d_2)$$

είναι τοπολογικός ισομορφισμός, ισοδύναμα για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο σύνολο X και κάθε $x \in X$ ισχύει

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \iff x_n \xrightarrow{d_2} x.$$

Για κάθε μετρικό χώρο (X, d_1) οι συναρτήσεις

$$d_2 = \min\{d_1, 1\} \quad \text{και} \quad d_3 = \frac{d_1}{1 + d_1}$$

είναι μετρικές ισοδύναμες με την d_1. Παρατηρούμε ότι $d_2, d_3 \leqslant 1$, γι' αυτό είναι σύνηθες να θεωρείται ότι η μετρική παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες από τη μονάδα.

Η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X ικανοποιεί τις εξής βασικές ιδιότητες: (α) το κενό σύνολο $\varnothing$ και το X είναι ανοικτά συνόλα, (β) οποιαδήποτε ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό, και (γ) η πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό.

Μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X ονομάζεται **τοπολογία** στο X αν περιέχει το κενό σύνολο $\varnothing$ και το X, για κάθε οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ συνόλων της $\mathcal{T}$ έχουμε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$, και για κάθε $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ έχουμε $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{T}$. Με άλλα λόγια μια τοπολογία ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες (α), (β), (γ) των ανοικτών συνόλων ή αλλιώς η οικογένεια των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου αποτελεί τοπολογία. Αυτή την οικογένεια, δηλαδή την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X, d) θα τη λέμε **η τοπολογία του** (X, d).

Ένα ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται **τοπολογικός χώρος** αν το $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X. Τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται **ανοικτά** σύνολα του τοπολογικού χώρου. Τα **κλειστά** υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου είναι τα συμπληρώματα ανοικτών. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι **μετρικοποιήσιμος** ή πιο απλά η $\mathcal{T}$ είναι **μετρικοποιήσιμη** αν υπάρχει μετρική d στο X ώστε η $\mathcal{T}$ να είναι η τοπολογία του (X, d), δηλαδή η οικογένεια των d-ανοικτών υποσυνόλων του X.

Δεν θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα τοπολογικοί χώροι που δεν είναι μετρικοποιήσιμοι αλλά είναι χρήσιμο να δούμε μερικές έννοιες μέσα στο πλαίσιο των τοπολογιών χώρων. Για παράδειγμα οι έννοιες της σύγκλισης και συνέχειας επεκτείνονται στο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων αντικαθιστώντας τα d-ανοικτά σύνολα με τα στοιχεία της τοπολογίας.

Μια οικογένεια $\mathcal{V}$ από υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι **βάση της τοπολογίας** του X ή πιο απλά **βάση** του X αν $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ και κάθε $U \in \mathcal{T}$ είναι ίσο με ένωση (πεπερασμένη ή άπειρη) στοιχείων της $\mathcal{V}$, δηλαδή υπάρχει οικογένεια $(B_i)_{i\in I}$ στοιχείων της $\mathcal{V}$ με $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Στους μετρικούς χώρους αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{V}$ είναι ανοικτό σύνολο και κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{V}$.

Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) τότε το σύνολο

$$\mathcal{V} = \{B_d(x, q) \mid q \in \mathbb{Q},\ q > 0\}$$

αποτελεί βάση για την τοπολογία του (X, d). Ειδικότερα αν ο X είναι διαχωρίσιμος τότε η τοπολογία του έχει αριθμήσιμη βάση (χρησιμοποιούμε ότι το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο). Ισχύει και το αντίστροφο: κάθε μετρικός χώρος που έχει αριθμήσιμη βάση είναι διαχωρίσιμος.

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (X,d) είναι **Cauchy** ή **βασική** αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n, m \geqslant n_0$ ισχύει $d(x_n, x_m) < r$. Ο μετρικός χώρος (X,d) είναι **πλήρης** αν κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα στον (X,d).

Όπως είναι γνωστό η ιδιότητα της πληρότητας *δεν διατηρείται* κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς ακόμα και αν ο ισομορφισμός είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Ως παράδειγμα θεωρούμε το σύνολο $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ με τις μετρικές

$$\rho(x,y) = |x-y|$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \neq y, \\ 0, \text{αν } x = y, \end{cases} \qquad \text{(διακριτή μετρική).}$$

Τότε κάθε $A \subseteq X$ είναι ρ-ανοικτό όπως επίσης και d-ανοικτό. Ειδικότερα οι δύο μετρικές είναι ισοδύναμες και η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id} : (X,\rho) \to (X,d)$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός. Επιπλέον ο (X,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος. Από την άλλη η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ρ-Cauchy η οποία όμως δεν συγκλίνει ως προς την ρ σε κάποιο $x \in X$.

Προκύπτει από τα πιο πάνω ότι η πληρότητα δεν επεκτείνεται στους τοπολογικούς χώρους. Συγκεκριμένα *δεν υπάρχει* ιδιότητα τοπολογικών χώρων P έτσι ώστε *για κάθε* μετρική d αν η $\mathcal{T}$ είναι μετρικοποιήσιμη από την d τότε

$$\text{ο } (X,\mathcal{T}) \text{ έχει την } P \iff \text{ο } (X,d) \text{ είναι πλήρης μετρικός χώρος.}$$

Για να το δούμε αυτό παίρνουμε τους μετρικούς χώρους (X,ρ) και (X,d) του προηγούμενου παραδείγματος και βλέπουμε ότι εφόσον οι μετρικές είναι ισοδύναμες τότε παράγουν την ίδια τοπολογία $\mathcal{T}$. Από την άλλη ο ένας μετρικός χώρος είναι πλήρης ενώ ο άλλος όχι.

Από την άλλη όπως είναι γνωστό οι ιδιότητες της διαχωρισιμότητας και της συμπάγειας διατηρούνται κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς, ή αλλιώς λέμε ότι είναι **τοπολογικές ιδιότητες**.

Τέλος αναφερόμαστε σε κάποιες συγκεκριμένες κατασκευές μετρικών χώρων από ήδη δοσμένους. Το **ευθύ άθροισμα** δύο μετρικών χώρων (X, d_X) και (Y, d_Y) είναι ο μετρικός χώρος (Z,d) με

$$Z = (\{0\} \times X) \bigcup (\{1\} \times Y)$$

$$d((i,x),(j,y)) = \begin{cases} d_X(x,y), \text{ αν } i = j = 0 \\ d_Y(x,y), \text{ αν } i = j = 1 \\ 1, \text{ αν } i \neq j. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια θεωρούμε δύο ξένα αντίτυπα των X, Y και τα τοποθετούμε σε μια θετική απόσταση (π.χ. 1) το ένα από το άλλο. Θα συμβολίζουμε το ευθύ άθροισμα των (X, d_X) και (Y, d_Y) με $X \oplus Y$ και θα το εννοούμε πάντα με την πιο πάνω μετρική d.

Το **καρτεσιανό γινόμενο** των χώρων (X, d_X) και (Y, d_Y) είναι το σύνολο $X \times Y$ με τη μετρική

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,y_1) + d_Y(x_2,y_2).$$

Εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά θα θεωρούμε τον $X \times Y$ με την πιο πάνω μετρική d. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε το πεπερασμένο καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times \cdots \times X_n$ μετρικών χώρων. Ειδικότερα στον $\mathbb{R}^n$ θα θεωρούμε τη μετρική

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \text{όπου } \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n), \vec{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Όπου θεωρούμε την ισοδύναμη Ευκλείδια μετρική θα το αναφέρουμε.

Αν έχουμε μια ακολουθία μετρικών χώρων $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ τότε θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ με τη μετρική

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \min\{d_n(x(n), y(n)), 1\},$$
$$\text{όπου } x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Αν $\mathcal{V}_n$ είναι βάση για την τοπολογία (ενδεχομένως και η ίδια η τοπολογία) του X_n, $n \in \mathbb{N}$, τότε μια βάση για την τοπολογία του $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ είναι η οικογένεια $\mathcal{V}$ όλων των συνόλων της μορφής

$$V_0 \times \cdots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots,$$

όπου $V_i \in \mathcal{V}_i$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$ και $n \in \mathbb{N}$.

Αν $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων του $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ με $x_i = (x_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, και $x = (x(n))_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ τότε

$$x_i \to x \text{ στον } \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \iff \text{για κάθε } n \text{ ισχύει } x_i(n) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x(n) \text{ στον } X_n.$$

Οι προηγούμενες κατασκευές μετρικών χώρων σέβονται την πληρότητα και τη διαχωρισιμότητα. Δηλαδή το *ευθύ άθροισμα, πεπερασμένο και άπειρο-αριθμήσιμο γινόμενο πλήρων και διαχωρίσιμων μετρικών χώρων είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος*.

Επίσης οι προηγούμενες κατασκευές *επεκτείνονται και στους τοπολογικούς χώρους* με τρόπο που *σέβεται τη μετρικοποιησιμότητα*.

Εξηγούμε το προηγούμενο αναλυτικά. Για το ευθύ άθροισμα δύο τοπολογικών χώρων $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ παίρνουμε όπως πιο πάνω $X \oplus Y = (\{0\} \times X) \bigcup (\{1\} \times Y)$ και ορίζουμε

$$V \in \mathcal{T}_{X\oplus Y} \iff V \cap X \in \mathcal{T}_X \text{ και } V \cap Y \in \mathcal{T}_Y, \quad \text{όπου } V \subseteq X \oplus Y.$$

Τότε η $\mathcal{T}_{X\oplus Y}$ είναι τοπολογία στο $X \oplus Y$. Μάλιστα αν οι X, Y είναι μετρικοποιήσιμοι τότε ο $(X \oplus Y, \mathcal{T}_{X\oplus Y})$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική που αναφέραμε πιο πάνω.

Για το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ ορίζουμε

$$V \in \mathcal{V}_{X\times Y} \iff V = V_X \times V_Y$$

όπου $V_X \in \mathcal{T}_X$ και $V_Y \in \mathcal{T}_Y$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{T}_{X\times Y}$ που προκύπτει από όλες τις ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{V}_{X\times Y}$. Τότε η $\mathcal{T}_{X\times Y}$ είναι τοπολογία στο $X \times Y$ με βάση τη $\mathcal{V}_{X\times Y}$. Αν οι X, Y είναι μετρικοποιήσιμοι τότε ο $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική που αναφέραμε πιο πάνω.

Το άπειρο γινόμενο ορίζεται όμοια με πριν. Αν έχουμε τοπολογικούς χώρους $(X_n, \mathcal{T}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε τη $\mathcal{V}_\infty$ ως την οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής

$$V_0 \times \cdots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots, \tag{1.1}$$

όπου $V_i \in \mathcal{T}_i$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$ και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{T}_\infty$ όλων των ενώσεων από στοιχεία της $\mathcal{V}_\infty$. Τότε η $\mathcal{T}_\infty$ είναι τοπολογία στο σύνολο $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, γνωστή και ως **τοπολογία γινόμενο**, η οποία έχει βάση την οικογένεια $\mathcal{V}_\infty$. Αν οι X_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μετρικοποιήσιμοι τότε ο $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \mathcal{T}_\infty)$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική που αναφέραμε πιο πάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Πολωνικοί Χώροι

2.1. Ορισμός και αρχικά αποτελέσματα

Ορισμός 2.1.1. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι **Πολωνικός χώρος** αν υπάρχει μετρική d που παράγει την $\mathcal{T}$ και ο (X, d) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Μια μετρική d όπως πιο πάνω θα λέγεται **συμβατή** ή **κατάλληλη** μετρική για τον $\mathcal{X}$. Συνήθως θα συμβολίζουμε τους Πολωνικούς χώρους με $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, και $\mathcal{Z}$.

Μερικά απλά παραδείγματα Πολωνικών χώρων είναι το $\mathbb{R}$ το $\mathbb{C}$ και τα κλειστά υποσύνολά τους, όλα με τη συνήθη τοπολογία. Ένα τετριμμένο αλλά χρήσιμο παράδειγμα Πολωνικού χώρου είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με τη συνήθη μετρική, η οποία είναι ισοδύναμη με τη διακριτή και κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι ανοικτό.

Το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ με τη συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος αλλά όχι πλήρης μετρικός χώρος. Όπως θα δούμε πιο κάτω υπάρχει μια ισοδύναμη μετρική ως προς την οποία είναι πλήρες και συνεπώς το $(0, 1)$ είναι Πολωνικός χώρος.

Πρόταση 2.1.2. *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και ένας τοπολογικός χώρος Y. Αν οι $\mathcal{X}$, Y είναι τοπολογικά ισομορφικοί τότε και ο Y είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική d για τον $\mathcal{X}$ και έναν τοπολογικό ισομορφισμό $f : Y \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}$ με

$$\rho(y_1, y_2) = d(f(x_1), f(x_2)).$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η ρ είναι μετρική στο Y. Εξ ορισμού η

$$f : (Y, \rho) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$$

είναι ισομετρία και επί. Προκύπτει ότι ο (Y, ρ) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (Άσκηση 2.1.10).

Τέλος δείχνουμε ότι η ρ παράγει την τοπολογία του Y. Για κάθε $A \subseteq Y$ που είναι ανοικτό στην τοπολογία του Y το σύνολο $\left(f^{-1}\right)^{-1}[A] = f[A]$ είναι d-ανοικτό γιατί η $f^{-1} : (\mathcal{X}, d) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Y$ είναι συνεχής. Επομένως το σύνολο $A = f^{-1}[f[A]]$ είναι ρ-ανοικτό γιατί η $f : (Y, \rho) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$ είναι συνεχής. Αντίστροφα θεωρούμε ότι το $B \subseteq Y$ είναι ρ-ανοικτό. Επειδή η $f^{-1} : (\mathcal{X}, d) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (Y, \rho)$ είναι συνεχής το σύνολο $\left(f^{-1}\right)^{-1}[B] = f[B]$ είναι d-ανοικτό και εφόσον η $f : Y \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$ είναι συνεχής το $B = f^{-1}[f[B]]$ είναι ανοικτό στην τοπολογία του Y. ▫

Πόρισμα 2.1.3. *Κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) με $a < b$ του $\mathbb{R}$ με την τοπολογία που παράγει η συνήθης μετρική της απόστασης είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός και από την Πρόταση 2.1.2 το διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι Πολωνικός χώρος. (Μάλιστα από την απόδειξη της πρότασης μπορούμε να δούμε ότι μια κατάλληλη μετρική είναι η $\rho(x, y) = |\tan x - \tan y|$.)

Το ζητούμενο προκύπτει από το γεγονός ότι όλα τα μη τετριμμένα ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τοπολογικά ισομορφικά μεταξύ τους. ▫

Δοσμένου ενός μετρικού χώρου (X, d) και μη κενού $A \subseteq X$ ορίζεται η συνάρτηση της **απόστασης από το σύνολο** A,

$$f : X \to \mathbb{R} : f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, z) \mid z \in A\}. \tag{2.1}$$

Όπως είναι γνωστό η f είναι συνεχής συνάρτηση, για την ακρίβεια ισχύει

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y), \quad x, y \in A.$$

Ορισμός 2.1.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A είναι F_σ υποσύνολο του X αν υπάρχει ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από κλειστά υποσύνολα του X με $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Επίσης το A είναι G_δ υποσύνολο του X αν υπάρχει ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά υποσύνολα του X με $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Είναι σαφές ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι F_σ ακριβώς όταν το συμπλήρωμά του $X \setminus A$ είναι G_δ. Επιπλέον είναι ξεκάθαρο ότι κάθε κλειστό σύνολο F είναι F_σ καθώς μπορούμε να πάρουμε $F_n = F$, $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα κάθε ανοικτό σύνολο είναι G_δ.

Τέλος παρατηρούμε ότι η αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων είναι επίσης F_σ σύνολο, γιατί αν $A_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_n^i$, όπου $n \in \mathbb{N}$ κάθε F_n^i είναι κλειστό, τότε η $\mathcal{A} = \{F_n^i \mid i, n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών συνόλων και $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup \mathcal{A}$.

Προκύπτει ότι και η αριθμήσιμη τομή G_δ συνόλων είναι G_δ.

Ορισμός 2.1.5. Αν έχουμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ και G ένα μη κενό υποσύνολο του X τότε μπορούμε να δούμε το G ως τοπολογικό χώρο με τη **σχετική τοπολογία** του X, δηλαδή την τοπολογία $\mathcal{T}_G$ που ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{T}_G = \{V \cap G \mid V \in \mathcal{T}\}.$$

Το ζεύγος $(G, \mathcal{T}_G)$ ονομάζεται **υπόχωρος** του $(X, \mathcal{T})$. Στην περίπτωση όπου ο $(X, \mathcal{T})$ μετρικοποιείται από την d τότε ο $(G, \mathcal{T}_G)$ μετρικοποιείται από τον περιορισμό $d|(G \times G)$ της d στο G.

Πρόταση 2.1.6. *Αν ο X είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος τότε κάθε κλειστό σύνολό του, εκτός από F_σ, είναι και G_δ.*

Ισοδύναμα κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι G_δ και F_σ.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα κλειστό $F \subseteq X$, μια μετρική d που παράγει την τοπολογία του X, και τη συνάρτηση της απόστασης από το F, $f = (x \mapsto d(x, F))$ από το (2.1) πιο πάνω. (Υποθέτουμε ότι $F \neq \varnothing$ αλλιώς το συμπέρασμα είναι προφανές.) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$U_n = \{x \in X \mid d(x, F) < 2^{-n}\}.$$

Τότε $U_n = f^{-1}[(-1, 2^{-n})]$ και αφού η f είναι συνεχής το σύνολο U_n είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή $d(x, F) = 0$ για κάθε $x \in F$ είναι σαφές ότι $F \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Υποθέτουμε ότι $x \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μέσα από το F με $d(x, x_n) < 2^{-n}$ για κάθε n. Επομένως $x_n \to x$ και αφού το F είναι κλειστό έχουμε $x \in F$.

Καταλήγουμε ότι $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ και άρα το F είναι G_δ σύνολο. □

Θεώρημα 2.1.7. *Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $\varnothing \neq G \subseteq \mathcal{X}$. Τότε το G με τη σχετική τοπολογία του $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος αν και μόνο αν το G είναι G_δ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το G είναι Πολωνικός χώρος με τη σχετική τοπολογία του $\mathcal{X}$. Σταθεροποιούμε μια κατάλληλη μετρική d για τον $\mathcal{X}$ και d_G για τον G. (Δεν έχουμε απαραίτητα ότι η d_G είναι ο περιορισμός της d στο G.) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$V_n = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists \text{ ανοικτό } U \text{ με } x \in U \text{ και } \forall y, z \in U \cap G \text{ ισχύει } d_G(y, z) < 2^{-n}\}.$$

Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι κάθε V_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Έστω $x \in V_n$, τότε υπάρχει ένα ανοικτό U με $x \in U$ και για κάθε $y, z \in U$ ισχύει $d_G(y,z) < 2^{-n}$. Υπάρχει $r > 0$ με $B_d(x,r) \subseteq U$. Για κάθε $x' \in B_d(x,r)$ το σύνολο $U' = B_d(x,r)$ είναι ανοικτό που περιέχει το x'. Επειδή $U' \subseteq U$ έχουμε επίσης ότι για κάθε $y, z \in U'$ ισχύει $d_G(y,z) < 2^{-n}$. Άρα $x' \in V_n$ για κάθε $x' \in B_d(x,r)$ και το $x \in V_n$ είναι εσωτερικό σημείο του V_n.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap \overline{G}. \tag{2.2}$$

Από την πιο πάνω ισότητα και την Πρόταση 2.1.6 (τα κλειστά σύνολα είναι G_δ) προκύπτει ότι το G είναι η τομή δύο G_δ συνόλων και συνεπώς είναι G_δ.

Ξεκινάμε με τον εγκλεισμό $G \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap \overline{G}$. Έστω $x \in G$ και $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $x \in \overline{G}$, δείχνουμε ότι $x \in V_n$. Η μπάλα $B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)})$ του G είναι ανοικτό υποσύνολο του G επομένως υπάρχει U ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ με

$$B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)}) = U \cap G.$$

Τότε για κάθε για κάθε $y, z \in U \cap G$ έχουμε $y, z \in B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)})$ και συνεπώς

$$d_G(y,z) \leqslant d_G(y,x) + d_G(x,z) < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}.$$

Άρα $x \in V_n$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{G}$ με $x \in V_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x \in U_n$ και έτσι ώστε $y, z \in U \cap G$ ισχύει $d_G(y,z) < 2^{-n}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, αλλιώς αντικαθιστούμε κάθε U_n με την τομή $\bigcap_{k=0}^{n} U_k$.

Αφού $x \in \overline{G} \cap U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από το G με $y_n \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $d(y_n, x) \to 0$. Για κάθε $n \geqslant m$ έχουμε $y_n \in U_n \subseteq U_m$ και αφού $y_m \in U_m$ ισχύει $d_G(y_n, y_m) < 2^{-m}$. Αυτό δείχνει ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d_G-Cauchy και αφού ο (G, d_G) είναι πλήρης υπάρχει $y \in G$ με $d_G(y_n, y) \to 0$.

Από την άλλη η τοπολογία του (G, d_G) είναι η ίδια με τη σχετική τοπολογία του G που παίρνει από τον $\mathcal{X}$. Προκύπτει ότι $d(y_n, y) \to 0$ και αφού $d(y_n, x) \to 0$ έχουμε $x = y \in G$. Έτσι έχουμε και τον άλλο εγκλεισμό της (2.2) και αποδείξαμε τη μία κατεύθυνση του θεωρήματος.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το G είναι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και θέτουμε $F_n = \mathcal{X} \setminus U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο.

Θεωρούμε d μια κατάλληλη μετρική στον $\mathcal{X}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τη συνάρτηση $(x \mapsto d(x, F_n))$ της απόστασης του x από το F_n όπως στο (2.1). Ορίζουμε

$$d_G(x,y) = d(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, \left|d(x,F_n)^{-1} - d(y,F_n)^{-1}\right|\right\}$$

όπου $x, y \in G$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in G$ τότε $x \in U_n$ και άρα $x \notin F_n$ για κάθε n. Επομένως $d(x, F_n) > 0$ και άρα ορίζεται ο αντίστροφος αριθμός $d(x, F_n)^{-1} > 0$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η d_G είναι μετρική στο G. Δείχνουμε ότι η d_G παράγει τη σχετική τοπολογία στο G. Ισοδύναμα δείχνουμε ότι η μετρική d_G και ο περιορισμός $d|(G \times G)$ της d στο $G \times G$ είναι ισοδύναμες μετρικές. Θεωρούμε μια ακολουθία $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο G και $y \in G$. Δείχνουμε ότι

$$y_i \xrightarrow{d_G} y \iff y_i \xrightarrow{d} y. \tag{2.3}$$

Η ευθεία κατεύθυνση είναι σαφής επειδή $d \leqslant d_G$ στο $G \times G$. Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $d(y_i, y) \to 0$ και έστω $r > 0$. Τότε υπάρχει i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ ισχύει

$$d(y_i, y) < r/3. \tag{2.4}$$

Η ιδέα είναι να χωρίσουμε το άπειρο άθροισμα στον ορισμό της d_G σε δύο μέρη, όπου το κάθε ένα είναι μικρότερο του $r/3$. Για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, \left|d(z,F_n)^{-1} - d(w,F_n)^{-1}\right|\right\} \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{n_0}$$

όπου $z, w \in G$. Οπότε λαμβάνοντας αρκετά μεγάλο $n_0 \in \mathbb{N}$ έχουμε για κάθε $z, w \in G$,

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, \left|d(z,F_n)^{-1} - d(w,F_n)^{-1}\right|\right\} < r/3. \tag{2.5}$$

Για κάθε $k \leqslant n_0$ ισχύει $d(y_i, F_k) \to d(y, F_k)$ επειδή η συνάρτηση της απόστασης σημείου από σύνολο είναι συνεχής. Αφού τα y_i, y ανήκουν στο G όπως αναφέραμε πιο πάνω έχουμε $d(y_i, F_k)$, $d(y, F_k) > 0$. Άρα $d(y_i, F_k)^{-1} \to d(y, F_k)^{-1}$.

Επομένως υπάρχει i_1 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_1$ και κάθε $k = 0, \ldots, n_0$ ισχύει

$$\left|d(y_i,F_k)^{-1} - d(y_i,F_k)^{-1}\right| < \min\{2^{-n},\ r/3 \cdot (n_0+1)^{-1}\}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{n_0} \min\left\{2^{-n}, \left|d(y_i,F_k)^{-1} - d(y,F_k)^{-1}\right|\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{n_0} \left|d(y_i,F_k)^{-1} - d(y,F_k)^{-1}\right| \\
&< \sum_{n=0}^{n_0} r/3 \cdot (n_0+1)^{-1} = r/3.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Από τις (2.4), (2.5), (2.6) και τον ορισμό της d_G έχουμε για κάθε $i \geqslant \max\{i_0, i_1\}$ ότι $d_G(y_i, y) < r$. Συνεπώς $y_i \xrightarrow{d_G} y$ και οι μετρικές είναι ισοδύναμες.

Αφού η τοπολογία του (G, d_G) είναι η σχετική τοπολογία στο G και ο $\mathcal{X}$ είναι διαχωρίσιμος είναι σαφές ότι ο μετρικός χώρος (G, d_G) είναι διαχωρίσιμος (υπόχωρος διαχωρίσιμου *μετρικού* χώρου είναι διαχωρίσιμος).

Τέλος δείχνουμε ότι ο (G, d_G) είναι πλήρης. Έστω $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d_G-Cauchy ακολουθία στον G. Εφόσον $d \leqslant d_G$ στο $G \times G$ η $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι και d-Cauchy. Αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης υπάρχει $y \in \overline{G}$ με $y_i \xrightarrow{d} y$. Δείχνουμε ότι $y \in G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ και ότι $y_i \xrightarrow{d_G} y$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε $d(y_i, F_n) \xrightarrow{i} d(y, F_n)$. Αν είχαμε $y \in F_n$ θα ίσχυε $d(y, F_n) = 0$ και άρα

$$d(y_i, F_n) \xrightarrow{\ i\ } 0.$$

Επομένως $d(y_i, F_n)^{-1} \xrightarrow{\ i\ } +\infty$. Ειδικότερα για κάθε $i \in \mathbb{N}$ θα υπήρχαν $j, s \geqslant i$ με

$$|d(y_j,F_n)^{-1} - d(y_s,F_n)^{-1}| > 2^{-n}$$

και

$$d_G(y_j, y_s) \geqslant \min\left\{2^{-n}, \left|d(y_j,F_n)^{-1} - d(y_s,F_n)^{-1}\right|\right\} = 2^{-n}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι d_G-Cauchy. Επομένως $y \notin F_n = \mathcal{X} \backslash U_n$ δηλαδή $y \in U_n$. Επειδή το n είναι τυχαίο καταλήγουμε $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$.

Αφού$y_i \xrightarrow{d} y$ και $y_i, y \in G$, $i \in \mathbb{N}$, προκύπτει από την (2.3) ότι $y_i \xrightarrow{d_G} y$ και ο (G, d_G) είναι πλήρης. □

Το προηγούμενο θεώρημα δίνει μια δεύτερη απόδειξη του ότι κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικός χώρος καθώς ως ανοικτό σύνολο είναι G_δ.

Πόρισμα 2.1.8. *Οι άρρητοι αριθμοί $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι Πολωνικός χώρος ενώ οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q}$ δεν είναι Πολωνικός χώρος με την σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ενώ το $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ (γνωστή εφαρμογή του Θεωρήματος του Baire). Το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.7. □

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1.9. Για κάθε μετρικό χώρο (X, d) οι συναρτήσεις

$$\rho = \min\{d, 1\} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{d}{1+d}$$

είναι μετρικές ισοδύναμες με την d και αν ο (X, d) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος τότε οι χώροι (X, ρ) και (X, σ) είναι επίσης πλήρεις και διαχωρίσιμοι.

Συμπεράνετε ότι κάθε Πολωνικός χώρος επιδέχεται συμβατή μετρική $d \leqslant 1$.

Άσκηση 2.1.10. Δίνονται δύο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) και

$$f : (Y, \rho) \twoheadrightarrow (X, d)$$

επιμορφισμός. Αν η f είναι ισομετρία, δηλαδή αν ικανοποιεί

$$\rho(y_1, y_2) = d(f(x_1), f(x_2)), \quad y_1, y_2 \in Y,$$

τότε η f είναι τοπολογικός ισομορφισμός. Μάλιστα αν ο (X, d) είναι πλήρης τότε και ο (Y, ρ) είναι πλήρης.

Άσκηση 2.1.11. Το σύνολο $C([a, b])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων από το $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$, όπου $a < b$ είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.12. Οι ακολουθιακοί χώροι ℓ^p με $1 \leqslant p < \infty$ με την τοπολογία της p-νόρμας είναι Πολωνικοί χώροι.

Άσκηση 2.1.13. Αν οι (X, d) και (Y, ρ) είναι πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι τότε οι $X \oplus Y$ και $X \times Y$ με τις μετρικές που αναφέραμε στην Εισαγωγή είναι επίσης πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι.

Συμπεράνετε ότι το ευθύ άθροισμα και το πεπερασμένο γινόμενο Πολωνικών χώρων είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.14. Αν $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία πλήρων και διαχωρίσιμων μετρικών χώρων τότε ο $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ με τη μετρική που αναφέραμε στην Εισαγωγή είναι επίσης πλήρης και διαχωρίσιμος.

Συμπεράνετε ότι το άπειρο αριθμήσιμο γινόμενο Πολωνικών χώρων είναι επίσης Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.15. Οι χώροι $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ με την τοπολογία της συνήθους Ευκλείδιας μετρικής και ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι Πολωνικοί χώροι.

Άσκηση 2.1.16. Το σύνολο των σημείων συνέχειας μιας τυχαίας συνάρτησης

$$f : (X, d) \to (Y, \rho)$$

είναι G_δ σύνολο.

Άσκηση 2.1.17. Τα σύνολα $(0, 1]$ και $[0, 1)$ με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικοί χώροι.

Το $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}^2$ δεν είναι Πολωνικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

2.2. Πεπερασμένες ακολουθίες

Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X. Με τον όρο **πεπερασμένη ακολουθία** στο X είναι μια συνάρτηση $u : \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \to X$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε μια τέτοια u με $(u(0), \ldots, u(n-1))$. Συμπεριλαμβάνουμε στις πεπερασμένες ακολουθίες και την **κενή ακολουθία**, την οποία συμβολίζουμε με Λ. Αυτή προκύπτει από τον προηγούμενο ορισμό για $n = 0$ όπου το πεδίο ορισμού $\{i \in \mathbb{N} \mid i < 0\}$ της u είναι το κενό σύνολο.

Συμβολίζουμε με $X^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών στο X. Είναι σαφές ότι το προηγούμενο n στον ορισμό της πεπερασμένης ακολουθίας είναι μοναδικό. Το **μήκος** μιας πεπερασμένης ακολουθίας $u : \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \to X$ είναι ακριβώς αυτό το μοναδικό n και συμβολίζεται με $|u|$. Έτσι έχουμε

$$|u| = 0 \iff u = \Lambda \quad \text{και}$$
$$u = (u(0), \ldots, u(|u|-1)), \quad \text{για κάθε } u \in X^{<\mathbb{N}}.$$

Η **παράθεση** (concatenation) της $u \in X^{<\mathbb{N}}$ με την $v \in X^{<\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία

$$u * v = (u(0), \ldots, u(|u|-1), v(0), \ldots, v(|v|-1)).$$

Για παράδειγμα αν $u = (a, b, c)$ και $v = (d, e)$ τότε

$$u * v = (a, b, c, d, e) \quad \text{και} \quad v * u = (d, e, a, b, c).$$

Είναι σαφές ότι $u * \Lambda = \Lambda * u = u$ για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$.

Στο σύνολο $X^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε τη διμελή σχέση $\sqsubseteq$ ως εξής,

$$u \sqsubseteq v \iff |u| \leqslant |v| \text{ και } \forall i < |u| \, (u(i) = v(i)).$$

Για παράδειγμα $(a, b) \sqsubseteq (a, b, c)$. Επίσης $\Lambda \sqsubseteq u$ για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ (καθολικός ποσοδείκτης με κενό πεδίο).

Είναι σαφές ότι η σχέση $\sqsubseteq$ ικανοποιεί τις τρεις **ιδιότητες της διάταξης**,

$$u \sqsubseteq u$$
$$(u \sqsubseteq v \ \& \ v \sqsubseteq u) \longrightarrow u = v$$
$$(u \sqsubseteq v \ \& \ v \sqsubseteq w) \longrightarrow u \sqsubseteq v$$

για κάθε $u, v, w \in X^{<\mathbb{N}}$. Το **αυστηρό μέρος** της $\sqsubseteq$ είναι η σχέση $\sqsubsetneq$ με

$$u \sqsubsetneq v \iff u \sqsubseteq v \ \& \ u \neq v.$$

Για παράδειγμα $(a, b) \sqsubsetneq (a, b, c)$. Είναι σαφές ότι $u \sqsubsetneq v$ αν και μόνο αν $u \sqsubseteq v$ και $|u| < |v|$. Θα λέμε ότι η $u \in X^{<\mathbb{N}}$ είναι **αρχικό τμήμα** της $v \in X^{<\mathbb{N}}$ ή ότι η v είναι **επέκταση** της u αν $u \sqsubseteq v$. Θα λέμε επίσης ότι η u είναι **γνήσιο αρχικό τμήμα** της v ή ότι η v είναι **γνήσια επέκταση** της u αν $u \sqsubsetneq v$. Το v είναι **άμεση επέκταση της** u αν $v = u * (x)$ για κάποιο $x \in X$.

Δύο πεπερασμένες ακολουθίες u, v λέγονται **συμβατές**, συμβολικά $u||v$ αν $u \sqsubseteq v$ ή $v \sqsubseteq u$.

Θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου $X = \mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από φυσικούς αριθμούς με μήκος n. Για παράδειγμα $A_0 = \{\Lambda\}$, $A_1 = \{(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ κ.ο.κ. Τότε

$$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Είναι σαφές ότι υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα στο A_n και στο πεπερασμένο γινόμενο $\mathbb{N}^n$ για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε κάθε A_n είναι αριθμήσιμο και επομένως και το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Είναι χρήσιμο να απομονώσουμε μια συγκεκριμένη απαρίθμηση του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αρχικά θεωρούμε την αύξουσα απαρίθμηση των *πρώτων αριθμών*

$$\mathrm{p}_0 < \mathrm{p}_1 < \mathrm{p}_2 < \cdots < \mathrm{p}_n < \ldots,$$

δηλαδή $\mathrm{p}_0 = 2$, $\mathrm{p}_1 = 3$, $\mathrm{p}_2 = 5$, $\mathrm{p}_3 = 7$, $\mathrm{p}_4 = 11$, κ.ο.κ. Ορίζουμε τη **συνάρτηση κωδικοποίησης**

$$\langle \cdot \rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : u = (u(0), \dots, u(n-1)) \mapsto \langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle$$

με τον εξής τρόπο:

$$\langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle = \begin{cases} \mathrm{p}_0^{u(0)+1} \cdot \dots \cdot \mathrm{p}_{n-1}^{u(n-1)+1}, & \text{αν } n \geqslant 1 \\ 1, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Για παράδειγμα

$$\langle 4, 0, 1 \rangle = 2^{4+1} \cdot 3^{0+1} \cdot 5^{1+1} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 32 \cdot 3 \cdot 25 = 2400.$$

Αντίστροφα αν πάρουμε τον αριθμό 120 τότε μπορούμε να τον φέρουμε στη μορφή $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ και επομένως βλέπουμε ότι $120 = \langle 2, 0, 0 \rangle$.

Είναι σημαντικό να προσθέτουμε τη μονάδα στους εκθέτες των δυνάμεων γιατί έτσι μπορούμε να ανακτήσουμε την αρχική ακολουθία. Αλλιώς δεν θα είχαμε τρόπο να γνωρίζουμε αν ο αριθμός $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0$ αντιστοιχεί στο $(3, 1, 1)$ ή στο $(3, 1, 1, 0)$ ή στο $(3, 1, 1, 0, 0)$ κ.τ.λ.

Για την ακρίβεια από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής (μοναδικότητα γραφής ως γινόμενο πρώτων) η συνάρτηση $\langle \cdot \rangle$ είναι ένα-προς-ένα (Άσκηση 2.2.1). Από την άλλη η $\langle \cdot \rangle$ δεν είναι επιμορφισμός. Για παράδειγμα δεν παίρνει την τιμή 0. Μάλιστα επειδή $\mathrm{p}_0^{k+1} = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ βλέπουμε ότι πέραν της μονάδας η $\langle \cdot \rangle$ παίρνει μόνο άρτιες τιμές, δηλαδή ο αριθμός $\langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle$ είναι άρτιος ακριβώς όταν η ακολουθία $u = (u(0), \dots, u(n-1))$ δεν είναι η κενή ακολουθία.

Συμβολίζουμε με $\mathtt{Seq}$ το σύνολο όλων των τιμών της $\langle \cdot \rangle$,

$$\mathtt{Seq} = \{ s \in \mathbb{N} \mid \exists u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \; s = \langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle \}.$$

Ορίζουμε τη **φυσική απαρίθμηση** $(\mathrm{u}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ως προς των κωδικοποίηση $\langle \cdot \rangle$ ως εξής:

$$\mathrm{u}_s = \begin{cases} (k_0, \dots, k_{n-1}), & \text{αν } s = \langle k_0, \dots, k_{n-1} \rangle \in \mathtt{Seq}, \\ \Lambda, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για κάθε $s = \langle k_0, \dots, k_{n-1} \rangle$ και κάθε $i < n$ ορίζουμε

$$(s)_i = k_i.$$

Με άλλα λόγια το $(s)_i$ είναι ο μοναδικός φυσικός αριθμός k για τον οποίο υπάρχουν $k_0, \dots, k_{i-1}$ και $k_{i+1}, \dots, k_{n-1}$ για κάποιο $n \geqslant 1$ έτσι ώστε

$$s = \langle k_0, \dots, k_{i-1}, k, k_{i+1}, \dots, k_{n-1} \rangle,$$

εφόσον φυσικά υπάρχει τέτοιος k. Επεκτείνουμε τον ορισμό $(s)_i$ και στις περιπτώσεις όπου $s = \langle k_0, \dots, k_{n-1} \rangle \in \mathtt{Seq}$ και $i \geqslant n$ ή $s \notin \mathtt{Seq}$ θέτοντας τότε $(s)_i = 0$.

Έχουμε λοιπόν

$$(s)_i = \begin{cases} k, & \text{αν υπάρχουν } k_0, \dots, k_{i-1}, k_i, \dots, k_{n-1} \text{ για κάποιο } n > i \\ & \text{με } s = \langle k_0, \dots, k_{i-1}, k, k_{i+1}, \dots, k_{n-1} \rangle, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα $(2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^4 \cdot 7^2)_2 = (\langle 2, 0, 3, 1 \rangle)_2 = 3$.

Με τη βοήθεια των πιο πάνω συναρτήσεων μπορούμε να εκφράσουμε προτάσεις που αναφέρονται σε πεπερασμένες ακολουθίες φυσικών αριθμών *οσοδήποτε μεγάλου μήκους* σε προτάσεις με ποσοδείκτες που αναφέρονται σε φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα αν $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τότε η πρόταση

"για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο P_n περιέχει τουλάχιστον n διαφορετικά στοιχεία" είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists s \in \mathbb{N}\, \forall i, j < n\ (\ (s)_i \in P_n\ \&\ (i \neq j \ \longrightarrow\ (s)_i \neq (s)_j)\ ).$$

Τέλος αναφέρουμε ότι θα θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με την τοπολογία που παράγεται από τη διακριτή μετρική όπου κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι ανοικτό. Εφόσον το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο προκύπτει ότι είναι Πολωνικός χώρος.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.2.1. Η συνάρτηση

$$\langle\ \cdot\ \rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : u = (u(0), \dots, u(n-1)) \mapsto \langle u(0), \dots, u(n-1) \rangle$$

είναι μονομορφισμός.

Άσκηση 2.2.2. Βρείτε έναν άρτιο αριθμό που δεν λαμβάνεται ως τιμή της συνάρτησης $\langle\ \cdot\ \rangle$.

Άσκηση 2.2.3. Θεωρούμε ένα $Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Εκφράστε με τη βοήθεια ποσοδεικτών στο $\mathbb{N}$ την πρόταση

"για κάθε n υπάρχουν $k_1, \dots, k_{2n} \in \mathbb{N}$ διαφορετικά ανά δύο
με $(n, \langle n, k_i \rangle) \in Q$, για κάθε $i = 0, \dots, 2n$."

2.3. Οι χώροι του Baire και Cantor

Ορισμός 2.3.1 (Ο χώρος του Baire)**.** Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$ (άπειρες ακολουθίες). Συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με τα μικρά ελληνικά γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ και το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με $\mathcal{N}$.

Για $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha \neq \beta$ θέτουμε

$$n(\alpha, \beta) = \text{ο ελάχιστος } n \in \mathbb{N} \text{ με } \alpha(n) \neq \beta(n).$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $d_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$,

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2^{-n(\alpha,\beta)}, & \text{αν } \alpha \neq \beta \\ 0, & \text{αν } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Τότε η συνάρτηση $d_{\mathcal{N}}$ είναι μετρική στο $\mathcal{N}$ (Άσκηση 2.3.12). Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ ονομάζεται **ο χώρος του Baire**.

Θα καλούμε επίσης χώρο του Baire τον *τοπολογικό χώρο* που προκύπτει από τη μετρική $d_{\mathcal{N}}$.

Ορισμός 2.3.2 (Περαιτέρω Συμβολισμοί)**.**

Ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ θα συμβολίζεται επίσης με $(\alpha(0), \dots, \alpha(n), \dots)$. Επεκτείνουμε τους ορισμούς των $*$ και $\sqsubseteq$ ανάμεσα σε πεπερασμένες και άπειρες ακολουθίες με τον προφανή τρόπο,

$$\begin{aligned} u * \alpha &= (u(0), \dots, u(|u|-1), \alpha(0), \dots, \alpha(n), \dots) \\ u \sqsubseteq \alpha &\iff \forall i < |u|\ u(i) = \alpha(i), \end{aligned}$$

όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$.

Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε τη **βασική περιοχή** του χώρου του Baire,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_u &= \{\alpha \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq \alpha\} \\ &= \{u(0)\} \times \cdots \times \{u(|u|-1)\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Δοσμένων $\alpha \in \mathcal{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\alpha^* = (\alpha(1), \dots, \alpha(n), \dots) \in \mathcal{N} \tag{2.8}$$

$$\alpha|n = (\alpha(0), \dots, \alpha(n-1)) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \tag{2.9}$$

$$\overline{\alpha(n)} = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle \in \mathbb{N} \tag{2.10}$$

$$(\alpha)_n = (\alpha(\langle n, 0 \rangle), \alpha(\langle n, 1 \rangle), \dots, \alpha(\langle n, t \rangle), \dots) \in \mathcal{N}. \tag{2.11}$$

Μάλιστα οι πιο πάνω πράξεις ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις (Άσκηση 2.3.13).

Παρατηρούμε ότι για κάθε $r > 0$ αν n είναι ο ελάχιστος φυσικός με $2^{-n} < r$ τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$,

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) < r \iff \forall i < n \; \alpha(i) = \beta(i).$$

Συνεπώς η $d_{\mathcal{N}}$-ανοικτή μπάλα κέντρου $\alpha \in \mathcal{N}$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο όλων των $\beta \in \mathcal{N}$ που συμφωνούν με το α μέχρι και το $n-1$, δηλαδή

$$\begin{aligned} B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r) &= \mathcal{N}_{\alpha|n} \\ &= \{\alpha(0)\} \times \{\alpha(1)\} \times \cdots \times \{\alpha(n-1)\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Στην περίπτωση όπου $n = 0$ τότε $\mathcal{N}_{\alpha|0} = \mathcal{N}_\Lambda = \mathcal{N}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε ανοικτή μπάλα στον $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι ένα σύνολο της μορφής $\mathcal{N}_u$ και αντίστροφα: κάθε σύνολο της μορφής $\mathcal{N}_u$ είναι μια ανοικτή μπάλα, συγκεκριμένα η $B_{d_{\mathcal{N}}}(u * (0, 0, \dots), 2^{-(|u|-1)})$.

Αφού οι ανοικτές μπάλες σε έναν μετρικό χώρο αποτελούν βάση για την τοπολογία ενός μετρικού χώρου προκύπτει από το πιο πάνω ότι τα σύνολα $\mathcal{N}_u$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, αποτελούν βάση για την τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$.

Επιπλέον, αφού τα μονοσύνολα στο $\mathbb{N}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{N}$, έχουμε από την (1.1) στην Εισαγωγή ότι τα $\mathcal{N}_u$ αποτελούν βάση για την τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Καταλήγουμε στο εξής.

Πρόταση 2.3.3. *Η τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Τέλος είναι άμεση συνέπεια της (2.12) ότι για κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στον $\mathcal{N}$ και κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ έχουμε

$$\alpha_i \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha \iff \forall n \; \lim_{i \to \infty} \alpha_i(n) = \alpha(n). \tag{2.13}$$

Το πιο πάνω μπορούμε επίσης να το δούμε από το ότι η σύγκλιση στην τοπολογία γινόμενο είναι η κατά σημείο σύγκλιση.

Πρόταση 2.3.4. *Ο $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Συνεπώς ο χώρος του Baire είναι Πολωνικός.*

Απόδειξη. Οι τελικά μηδενικές ακολουθίες

$$\alpha_u = u * (0, 0, \dots) = (u(0), \dots, u(|u|-1), 0, 0, \dots) \quad (u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$$

αποτελούν ένα αριθμήσιμο και πυκνό σύνολο του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$, επομένως ο χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Για την πληρότητα θεωρούμε μια $d_{\mathcal{N}}$-Cauchy ακολουθία $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένα $i_n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $i, j \geqslant i_n$ έχουμε $d_{\mathcal{N}}(\alpha_i, \alpha_j) < 2^{-n}$. Συνεπάγεται ότι

$$\alpha_i(k) = \alpha_j(k) \text{ για κάθε } k = 0, \dots, n \text{ και κάθε } i, j \geqslant i_n. \tag{2.14}$$

Ειδικότερα η ακολουθία φυσικών αριθμών $(\alpha_i(n))_{i \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και ίση με τον αριθμό $\alpha_{i_n}(n)$.

Επομένως ορίζουμε

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \alpha(n) = \lim_{i \to \infty} \alpha_i(n) = \alpha_{i_n}(n)$$

όπου i_n είναι όπως πιο πάνω.

Είναι σαφές από την (2.14) ότι $\alpha_i(k) = \alpha_{i_n}(k) = \alpha(k)$ για κάθε $i \geqslant i_n$ και κάθε $k = 0, \dots, n$. Από την (2.13) προκύπτει $\alpha_i \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha$. ◻

Θα δούμε αργότερα (??) ότι ο χώρος του Baire είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον Πολωνικό χώρο των άρρητων αριθμών.

Θεώρημα 2.3.5. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κατάλληλη μετρική d στο $\mathcal{X}$ και ένα σύνολο

$$D = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

που είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Κάθε $x \in \mathcal{X}$ είναι το όριο μιας ακολουθίας $(r_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η ιδέα είναι να πάρουμε $\alpha = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και τότε θα έχουμε $x = \lim_{n\to\infty} r_{\alpha(n)}$. Το τελευταίο όριο θα είναι η τιμή της π στο α.

Ένα πρόβλημα που ανακύπτει είναι πως για τυχαίο $\alpha \in \mathcal{N}$ η ακολουθία $(r_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ μπορεί να μην συγκλίνει. Για να το διορθώσουμε αυτό θα αντικαταστήσουμε την ακολουθία $(r_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ με μια άλλη, ας τη συμβολίσουμε με $(x^\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία συγκλίνει για κάθε α και η συνάρτηση $\alpha \mapsto \lim_{n\to\infty} x^\alpha_n$ είναι συνεχής. Επιπλέον για μια επαρκώς μεγάλη συλλογή $\alpha \in \mathcal{N}$ η $(x^\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν διαφέρει ουσιαστικά από την $(r_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Έχοντας αυτά υπόψη προχωράμε στην κατασκευή της π. Αρχικά ορίζουμε μια οικογένεια $(x_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\setminus\{\Lambda\}}$ στοιχείων του $\mathcal{X}$ με επαγωγή στο μήκος $|u|$ του $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\Lambda\}$.

Για $|u| = 1$ με $u = (k_0)$, ορίζουμε $x_u = x_{(k_0)} = r_{k_0}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n > 1$ έχουν οριστεί x_v για κάθε $w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $1 \leqslant |w| < n$.

Θεωρούμε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$. Θέτουμε προσωρινά $w = (u(0), \dots, u(n-2))$ και $k = u(|u|-1)$ έτσι που

$$u = w * (k).$$

Προφανώς $|w| = n - 1$ και από την Επαγωγική Υπόθεση έχει οριστεί το x_w. Ορίζουμε

$$x_u = \begin{cases} r_k, & \text{αν } d(x_w, r_k) < 2^{-n}, \\ x_w, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έτσι έχει οριστεί η οικογένεια $(x_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\setminus\{\Lambda\}}$.

Είναι σαφές από τον πιο πάνω ορισμό ότι $d(x_w, x_u) < 2^{-|u|}$ όπου $u = w * u(|u|-1)$. Προκύπτει ότι για κάθε $w \subsetneq u$ με $u = w * (k_0, \dots, k_m)$,

$$\begin{aligned} d(x_w, x_u) &\leqslant d(x_w, x_{w*(k_0)}) + \dots + d(x_{w*(k_0,\dots,k_{m-1})}, x_u) \\ &< 2^{-(|w|+1)} + \dots + 2^{-|u|} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(|w|+k)} = 2^{-|w|}. \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ και κάθε $1 \leqslant n \leqslant m$ ισχύει

$$d(x_{\alpha|n}, x_{\alpha|m}) < 2^{-n}. \tag{2.15}$$

Άρα για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ η ακολουθία $(x_{\alpha|n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy. Αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης ορίζεται η συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n}.$$

Παίρνοντας όριο $m \to \infty$ στην (2.15) έχουμε $d(x_{\alpha|n}, \pi(\alpha)) \leqslant 2^{-n}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Επομένως αν αν $\beta \in \mathcal{N}_{\alpha|n}$, δηλαδή αν $\beta|n = \alpha|n$ ισχύει

$$d(\pi(\alpha), \pi(\beta)) \leqslant d(\pi(\alpha), x_{\alpha|n}) + d(x_{\alpha|n}, \pi(\beta)) \leqslant 2^{-n+1}$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Είναι τότε άμεσο ότι η π είναι συνεχής (και μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής).

Τέλος δείχνουμε ότι η π είναι επιμορφισμός. Αν $x \in \mathcal{X}$ ορίζουμε το $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ως εξής:

$$\alpha(n) = \text{ο ελάχιστος } k \in \mathbb{N} \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+2)}.$$

Τότε $d(r_{\alpha(n)}, x) < 2^{-(n+2)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$d(r_{\alpha(n-1)}, r_{\alpha(n)}) \leqslant d(r_{\alpha(n-1)}, x) + d(x, r_{\alpha(n)}) < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)} < 2^{-n}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Προκύπτει με επαγωγή ότι

$$x_{\alpha|(n+1)} = r_{\alpha(n)} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(Για το συγκεκριμένο α συμβαίνει πάντα η δεύτερη περίπτωση του ορισμού της $x_{\alpha|n}$.)

Επομένως

$$\pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n} = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|(n+1)} = \lim_{n\to\infty} r_{\alpha(n)} = x$$

και η π είναι επιμορφισμός. □

Παρατήρηση 2.3.6. Η συνάρτηση $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ της προηγούμενης απόδειξης επιδέχεται αντίστροφη συνάρτηση. Δηλαδή υπάρχει μονομορφισμός $\tau : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{N}$ με

$$\pi(\tau(x)) = x \text{ για κάθε } x \in \mathcal{X} \quad \text{και} \quad \tau(\pi(\alpha)) = \alpha \text{ για κάθε } \alpha \in \tau[\mathcal{X}].$$

Η συνάρτηση τ δίνεται στην προηγούμενη απόδειξη,

$$\tau(x)(n) = \text{ο ελάχιστος } k \in \mathbb{N} \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+2)}, \quad x \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N}.$$

Αν θέσουμε $\alpha = \tau(x)$ τότε όπως δείξαμε $\pi(\alpha) = x$, δηλαδή $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Από αυτό προκύπτει ότι η τ είναι μονομορφισμός,

$$\tau(x_1) = \tau(x_2) \implies \pi(\tau(x_1)) = \pi(\tau(x_2)) \implies x_1 = x_2.$$

Επιπλέον για κάθε $\alpha = \tau(x)$ έχουμε

$$\tau(\pi(\alpha)) = \tau(\pi(\tau(x))) = \tau(x) = \alpha.$$

Πόρισμα 2.3.7. *Κάθε Πολωνικός χώρος έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς.*

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 2.3.6 για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει μονομορφισμός $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Άρα $\mathcal{X} \leqslant_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$. □

Υπάρχουν φυσικά Πολωνικοί χώροι που δεν είναι ισοπληθικοί με τον $\mathbb{R}$ όπως για παράδειγμα ο $\mathbb{N}$. Θα δούμε ότι τα δύο τελευταία σύνολα αποτελούν τις μοναδικές “πληθικότητες” Πολωνικών χώρων έτσι που η τελευταία κλάση συνόλων ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς.

Ορισμός 2.3.8. Το σύνολο όλων των **δυαδικών (άπειρων) ακολουθιών** είναι το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ το οποίο συμβολίζεται και ως $2^{\mathbb{N}}$. Προφανώς αυτό είναι υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και θεωρούμε σε αυτό τη μετρική

$$d_{2^{\mathbb{N}}} = d_{\mathcal{N}} | (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}).$$

Ο **χώρος του Cantor** είναι ο μετρικός χώρος $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο όρο και για τον τοπολογικό χώρο που προκύπτει.

Πρόταση 2.3.9. *Ο $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και συνεπώς ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος είναι Πολωνικός.*

Απόδειξη. Αν δείξουμε ότι ο $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, ισοδύναμα ότι το $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$, θα έχουμε επίσης ότι το $2^{\mathbb{N}}$ είναι κλειστό στον $\mathcal{N}$. Συνεπώς θα έχουμε ότι ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός χώρος.

Ένας τρόπος για να δείξουμε τη συμπάγεια είναι να παρατηρήσουμε ότι $2^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$. Γνωρίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο (για τυχαίο γινόμενο τοπολογικών χώρων χρειάζεται το *Θεώρημα Tychonoff* εδώ έχουμε όμως μόνο αριθμήσιμο γινόμενο). Αφού το $\{0,1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχουμε ότι το $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο. Αυτή όμως είναι η τοπολογία του χώρου του Baire άρα το $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Δίνουμε μία ακόμα απόδειξη, η οποία στην ουσία εξηγεί γιατί το αριθμήσιμο γινόμενο συμπαγών μετρικών χώρων είναι συμπαγές σύνολο. Δείχνουμε ότι κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $2^{\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Θεωρούμε αρχικά την ακολουθία $(\alpha_i(0))_{i\in\mathbb{N}}$. Αφού το $\{0,1\}$ είναι πεπερασμένο υπάρχει υπακολουθία $(\alpha_{k_i^0}(0))_{i\in\mathbb{N}}$ που είναι σταθερή στο $\{0,1\}$.

Έπειτα θεωρούμε την ακολουθία $(\alpha_{k_i^0}(1))_{i\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχει μια περαιτέρω υπακολουθία $(\alpha_{k_i^1}(1))_{i\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι τελικά σταθερή. Συνεχίζοντας αναδρομικά βρίσκουμε μια φθίνουσα ακολουθία

$$\begin{aligned} &L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_n \supseteq \dots \\ &L_n = \{k_i^n \mid i\in\mathbb{N}\} = \{k_0^n < \cdots < k_i^n < \dots\}, \quad n\in\mathbb{N}, \end{aligned}$$

από άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε n η ακολουθία $(\alpha_{k_i^n}(n))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή.

Για κάθε $n < m$ οι φυσικοί αριθμοί $k_0^m < \cdots < k_m^m$ ανήκουν στο σύνολο $L_n = \{k_0^n < \cdots < k_i^n < \dots\}$. Προκύπτει ότι $k_m^m = k_i^n$ για κάποιο $i \geqslant m$. Επομένως

$$k_m^m = k_i^n \geqslant k_m^n > k_n^n.$$

Άρα η $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k_i^i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών

Ορίζουμε

$$\alpha(n) = \alpha_{k_n^n}(n)$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε $\alpha\in 2^{\mathbb{N}}$.

Δείχνουμε ότι $\alpha_{s_i}\to\alpha$. Έστω $n\in\mathbb{N}$, τότε για κάθε $i\geqslant n$ έχουμε

$$\alpha_{s_i}(n) = \alpha_{k_i^i}(n) = \alpha_{k_j^n}(n) \quad \text{για κάποιο } j,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $L_i \subseteq L_n$. Επειδή για κάθε n η ακολουθία $(\alpha_{k_i^n}(n))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή έχουμε

$$\alpha_{k_j^n}(n) = \alpha_{k_n^n}(n) = \alpha(n).$$

Άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $\lim_{i\to\infty}\alpha_{s_i}(n) = \alpha(n)$ και από την (2.13) έχουμε $\alpha_{s_i}\xrightarrow{d_{\mathcal{N}}}\alpha$. Αφού τα α_i, $i\in\mathbb{N}$ και το α είναι στοιχεία του $2^{\mathbb{N}}$ και η μετρική $d_{2^{\mathbb{N}}}$ είναι ο περιορισμός της $d_{\mathcal{N}}$ στο $2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}}$ προκύπτει ότι $\alpha_{s_i}\xrightarrow{d_{2^{\mathbb{N}}}}\alpha$. □

Θεώρημα 2.3.10. *Για κάθε τέλειο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $I = \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ και σταθεροποιούμε μια συμβατή μετρική d στον $\mathcal{X}$.

Κατασκευάζουμε αναδρομικά μια οικογένεια $(V_u)_{u\in I}$ από d-ανοικτές μπάλες του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
\text{ακτίνα}(V_u) &\leqslant 2^{-|u|}\\
\overline{V_{u*(i)}} &\subseteq \overline{V_u}, \quad i=0,1\\
\overline{V_{u*(0)}} \cap \overline{V_{u*(1)}} &= \varnothing
\end{aligned}$$

για κάθε $u \in I$.

Στο αρχικό βήμα επιλέγουμε ένα $x_0 \in \mathcal{X}$ και παίρνουμε $V_\Lambda = B_d(x_0, 1)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ έχουμε ορίσει V_u όπως πιο πάνω για όλα τα $w \in I$ με $1 \leqslant |w| < n$.

Ορίζουμε τα $V_{w*(i)}$, $i = 0, 1$, για όλα τα $w \in I$ με $|w| = n - 1$. Θεωρούμε ένα τέτοιο w. Η μπάλα V_w δεν μπορεί να περιέχει μόνο το κέντρο της, αλλιώς αυτό θα ήταν μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{X}$. Επομένως υπάρχουν στοιχεία x_0^w, x_1^w της V_w με $x_0^w \neq x_1^w$. Αφού το V_w είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχουν ανοικτές μπάλες B_0^w και B_1^w με κέντρα τα x_0^w, x_1^w αντίστοιχα, με ακτίνες μικρότερες ή ίσες του 2^{-n}, που ικανοποιούν επίσης

$$\overline{B_0^w} \cap \overline{B_1^w} = \varnothing \quad \text{και} \quad \overline{B_i^w} \subseteq V_w \subseteq \overline{V_w} \quad i = 0, 1.$$

Οπότε ορίζουμε $V_{w*(i)} = B_i^w$, $i = 0, 1$. Είναι σαφές ότι ικανοποιούνται πιο πάνω ιδιότητες. Αυτό ολοκληρώνει την κατασκευή.

Για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ η $(\overline{V_{\alpha|n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων των οποίων η διάμετρος συγκλίνει στο 0. Αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης, από ένα γνωστό θεώρημα του Cantor, η τομή

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{\alpha|n}}$$

είναι μονοσύνολο. Ορίζουμε

$$\tau : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : \{\tau(\alpha)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{\alpha|n}}.$$

Αν τα $\alpha \neq \beta$ είναι στοιχεία του $2^{\mathbb{N}}$ και n είναι ο ελάχιστος k με $\alpha(k) \neq \beta(k)$ τότε

$$\alpha|n = \beta|n \quad \text{και} \quad \alpha(n) \neq \beta(n).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\alpha(n) = 0$ και $\beta(n) = 1$. Επίσης θέτουμε $w = \alpha|n = \beta|n$. Τότε $\tau(\alpha) \in \overline{V_{\alpha|(n+1)}}$, $\tau(\beta) \in \overline{V_{\beta|(n+1)}}$, και

$$\overline{V_{\alpha|(n+1)}} \cap \overline{V_{\beta|(n+1)}} = \overline{V_{w*(0)}} \cap \overline{V_{w*(1)}} = \varnothing.$$

Επομένως $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$. Τέλος δείχνουμε ότι η τ είναι συνεχής. Θέτουμε

$$x_u = \text{το κέντρο της ανοικτής μπάλας } V_u.$$

Έστω $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε n έχουμε $\tau(\alpha) \in \overline{V_{\alpha|n}}$ και επομένως

$$d(\tau(\alpha), x_{\alpha|n}) \leqslant 2 \cdot \text{ακτίνα}(V_{\alpha|n}) \leqslant 2 \cdot 2^{-n} = 2^{-n+1}.$$

Συνεπώς αν $\beta \in \mathcal{N}_{\alpha|n}$, δηλαδή αν $\beta|n = \alpha|n$ τότε

$$d(\tau(\alpha), \tau(\beta)) \leqslant d(\tau(\alpha), x_{\alpha|n}) + d(x_{\alpha|n}, \tau(\beta)) \leqslant 2 \cdot 2^{-n+1} = 2^{-n+2}.$$

Προκύπτει από το πιο πάνω ότι η τ είναι συνεχής. □

Η αντίστοιχη πληθαριθμική συνέπεια είναι η εξής.

Πόρισμα 2.3.11. *Κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς.*

Απόδειξη. Αν $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος και P είναι μη κενό τέλειο υποσύνολό του τότε ο P με τη σχετική τοπολογία είναι τέλειος Πολωνικός χώρος.

Από το Θεώρημα 2.3.10 υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail P$ και ειδικότερα $2^{\mathbb{N}} \leqslant_c P$. Άρα

$$\mathbb{R} =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}} \leqslant_c P \leqslant_c \mathbb{R}$$

όπου στην τελευταία σχέση $\leqslant_c$ χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 2.3.7. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein $P =_c \mathbb{R}$. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 2.3.12. Η συνάρτηση $d_{\mathcal{N}}$ είναι μετρική στο $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.3.13. Οι συναρτήσεις

$$s : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : s(\alpha) = \alpha^*$$
$$f : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : f(\alpha, n) = \alpha|n$$
$$g : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : g(\alpha, n) = \overline{\alpha(n)}$$
$$h : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : g(\alpha, n) = (\alpha)_n$$

όπως δίνονται στις (2.8) - (2.11) είναι συνεχείς.

2.4. Το Θεώρημα Cantor-Bendixson

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει τη σχέση ανάμεσα στα κλειστά και τέλεια υποσύνολα ενός Πολωνικού χώρου.

Θεώρημα 2.4.1 (Cantor-Bendixson)**.** *Για κάθε κλειστό υποσύνολο C ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ υπάρχουν δύο σύνολα $P, S \subseteq C$, με το P τέλειο (ενδεχομένως κενό), το S αριθμήσιμο, $P \cap S = \varnothing$ και $C = P \cup S$.*

Μάλιστα η πιο πάνω διάσπαση είναι μοναδική, δηλαδή αν P', S' είναι δύο ξένα υποσύνολα του C με το P' τέλειο, το S' αριθμήσιμο και $P' \cup S' = C$ τότε $P' = P$ και $S' = S$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το κλειστό $C \subseteq \mathcal{X}$ και μια αριθμήσιμη βάση $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για την τοπολογία του $\mathcal{X}$. Ορίζουμε

$$P = \{x \in C \mid \forall n \text{ με } x \in V_n \text{ το σύνολο } V_n \cap C \text{ είναι υπεραριθμήσιμο}\}$$
$$S = C \setminus P.$$

Είναι σαφές ότι $P \cap C = \varnothing$ και ότι $C = P \cup S$. Δείχνουμε ότι το S είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \notin P$ και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x \in V_n$ και το σύνολο $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο. Ορίζουμε $n(x)$ να είναι ο ελάχιστος τέτοιος n και $I = \{n(x) \in \mathbb{N} \mid x \in S\}$. Τότε το I είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Επίσης

$$S \subseteq \bigcup_{n\in I}(V_n \cap C)$$

ακριβώς γιατί $x \in V_{n(x)}$ για κάθε $x \in S \subseteq C$. Αφού το $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο για κάθε $n \in I$ έχουμε ότι το σύνολο S περιέχεται σε μια αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Συνεπώς το S είναι αριθμήσιμο.

Έπειτα δείχνουμε ότι το P είναι κλειστό σύνολο. Έστω $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μέσα από το P που συγκλίνει στο $x \in \mathcal{X}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n$ υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ με $x_i \in V_n$. Αφού $x_i \in P$ έχουμε ότι το σύνολο $V_n \cap C$ είναι υπεραριθμήσιμο. Άρα $x \in P$ και το P είναι κλειστό.

Επίσης το P δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Θεωρούμε $x \in P$ και $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n$. Το σύνολο

$$V_n \cap C = (V_n \cap P) \cup (V_n \cap S)$$

είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το $V_n \cap S$ είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του S. Συνεπώς το $V_n \cap P$ είναι υπεραριθμήσιμο και ειδικότερα υπάρχει $y \in V_n \cap P$ που είναι διάφορο του x. Άρα το x δεν είναι μεμονωμένο σημείο του P.

Τέλος δείχνουμε τη μοναδικότητα. Θεωρούμε ένα τέλειο P' και ένα αριθμήσιμο S' με $P' \cap S' = \varnothing$ και

$$P' \cup S' = P \cup S.$$

Αν $x \in P'$ και $x \in V_n$ τότε, χρησιμοποιώντας μια κατάλληλα μικρή ανοικτή μπάλα του $\mathcal{X}$, μπορούμε να βρούμε m έτσι ώστε $x \in V_m \subseteq \overline{V_m} \subseteq V_n$. Τότε το $\overline{V_m \cap P'}$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\overline{V_m} \cap P' \subseteq V_n \cap C$. Από την άλλη το $\overline{V_m \cap P'}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία (Άσκηση 2.4.7), άρα είναι μη κενό τέλειο σύνολο. Ειδικότερα είναι υπεραριθμήσιμο (Πόρισμα 2.3.11) και συνεπώς το υπερσύνολο $V_n \cap C$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αυτό σημαίνει ότι $x \in P$. Αυτό αποδεικνύει ότι $P' \subseteq P$.

Αν $x \in S'$ τότε $x \notin P'$ και αφού το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό υπάρχει n με $x \in V_n$ και $V_n \cap P' = \varnothing$. Άρα $V_n \cap C = V_n \cap S' \subseteq S'$ και το σύνολο $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο. Προκύπτει ότι $x \in S$ και συνεπώς $S' \subseteq S$. Ισοδύναμα $P \subseteq P'$.

Καταλήγουμε ότι $P = P'$ και $S = S'$. ▫

Ορισμός 2.4.2. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $C \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό. Θεωρούμε τα σύνολα P, S όπως στο Θεώρημα Cantor-Bendixson. Δηλαδή το P είναι τέλειο, το S είναι αριθμήσιμο, $P \cap S = \varnothing$ και $P \cup S = C$.

Το μοναδικό P όπως πιο πάνω είναι ο **τέλειος πυρήνας** (perfect kernel) του C και το μοναδικό S όπως πιο πάνω είναι το **διάσπαρτο μέρος** (scattered part) του C.

Μια άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος Cantor-Bendixson είναι η επέκταση του Θεωρήματος 2.3.10 στους υπεραριθμήσιμους Πολωνικούς χώρους.

Πόρισμα 2.4.3. *Για κάθε υπεπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Cantor-Bendixson το κλειστό σύνολο $\mathcal{X}$ διασπάται στον τέλειό του πυρήνα P και στο διάσπαρτό του μέρος S. Αν είχαμε $P = \varnothing$ τότε το $\mathcal{X} = S$ θα ήταν αριθμήσιμο σύνολο, άτοπο.

Άρα $P \neq \varnothing$. Αφού το P είναι κλειστό προκύπτει ότι είναι Πολωνικός χώρος και μάλιστα τέλειος. Από το Θεώρημα 2.3.10 υπάρχει ένας συνεχής επιμορφισμός

$$\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail P \subseteq \mathcal{X}.$$

Η τ είναι η ζητούμενη συνάρτηση. ▫

Μια άλλη εφαρμογή του Θεωρήματος Cantor-Bendixson είναι η εξής.

Πόρισμα 2.4.4. *Τα κλειστά υποσύνολα Πολωνικών χώρων ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $C \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό. Θεωρούμε τον τέλειο πυρήνα P και το διάσπαρτο μέρος S του C.

Αν $P = \varnothing$ τότε $C = P \cup S = S$ και άρα το C είναι αριθμήσιμο. Αν $P \neq \varnothing$ από τα Πορίσματα 2.3.11 και 2.3.7 έχουμε

$$\mathbb{R} \leqslant_c P \leqslant_c C \leqslant_c \mathcal{X} \leqslant_c \mathbb{R},$$

όπου στη δεύτερη και τρίτη σχέση $\leqslant_c$ πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την ταυτοτική συνάρτηση. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύπτει ότι $C =_c \mathbb{R}$. ▫

Αξίζει να απομονώσουμε τον εξής χαρακτηρισμό των κλειστών υποσυνόλων Πολωνικών χώρων που είναι αριθμήσιμα, ο οποίος προκύπτει από τα επιχειρήματα της προηγούμενης απόδειξης:

Αν το C είναι κλειστό υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$, τότε το C είναι αριθμήσιμο αν και μόνο αν ο τέλειος πυρήνας του είναι το κενό σύνολο.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.5. Βρείτε τον τέλειο πυρήνα και το διάσπαρτο μέρος των κλειστών συνόλων

$$A = [0,1] \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$B = A \cup \{1 + 2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$
$$C = \{1\} \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Άσκηση 2.4.6. Τα μεμονωμένα σημεία ενός κλειστού συνόλου περιέχονται στο διάσπαρτο μέρος του. Ισχύει το αντίστροφο;

Άσκηση 2.4.7. Αν (X,d) είναι μετρικός χώρος και το $P \subseteq X$ είναι τέλειο, τότε για κάθε ανοικτό V το σύνολο $\overline{V \cap P}$ είναι τέλειο (ενδεχομένως κενό).

Άσκηση 2.4.8. Ο τέλειος πυρήνας ενός κλειστού υποσυνόλου Πολωνικού χώρου είναι το μεγαλύτερο τέλειο υποσύνολό του. Δηλαδή αν ο $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος, το $C \subseteq \mathcal{X}$ είναι κλειστό και το $P_0 \subseteq C$ είναι τέλειο τότε το P_0 περιέχεται στον τέλειο πυρήνα του C.

Άσκηση 2.4.9. Τα G_δ υποσύνολα Πολωνικών χώρων ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς.

2.5. Δένδρα

Ορισμός 2.5.1. Έστω X μη κενό σύνολο. Ένα $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ είναι **δένδρο** στο X αν είναι μη κενό και κλειστό προς τα κάτω ως προς τη διάταξη $\sqsubseteq$, δηλαδή αν $w \sqsubseteq u$ και $u \in T$ τότε $w \in T$.

Για παράδειγμα το σύνολα $X^{<\mathbb{N}}$ και $\{\Lambda\}$ είναι δένδρα στο X. Άλλο παράδειγμα είναι το $T = \{\Lambda, (a), (a,b), (a,c), (d)\}$ για κάποια $a, b, c, d \in X$.

Παρατηρούμε ότι η κενή ακολουθία Λ ανήκει σε κάθε δένδρο, γιατί $\Lambda \sqsubseteq u$ για κάθε $u \in T \neq \varnothing$.

Στους επόμενους ορισμούς θεωρούμε ότι έχουμε ένα δένδρο T. Η **ρίζα** του T είναι η κενή ακολουθία Λ. Τα στοιχεία του T ονομάζονται **κόμβοι** ή **φύλλα** του T. Ένας κόμβος u του T ονομάζεται **τερματικός** αν δεν έχει γνήσια επέκταση w μέσα στο T, δηλαδή για κάθε $w \in T$ με $u \sqsubseteq w$ έχουμε $u = w$.

Το T είναι **περικομμένο** ή **κλαδεμένο** (pruned) αν δεν έχει τερματικούς κόμβους.

Με τον όρο **άπειρο κλαδί** του T εννοούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με την ιδιότητα

$$(f(0), \ldots, f(n)) \in T$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το **σώμα** $[T]$ του T είναι το σύνολο όλων των άπειρων κλαδιών του T. Ένα δένδρο T ονομάζεται **θεμελιωμένο** (well-founded) αν $[T] = \varnothing$ και **μη θεμελιωμένο** (ill-founded) αν $[T] \neq \varnothing$.

Ένα δένδρο S στο X θα λέγεται **υποδένδρο** του T αν $S \subseteq T$. Για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε το **υποδένδρο** T_u των **ακολουθιών που είναι συμβατές** με το u,

$$T_u = \{w \in T \mid u || w\}.$$

Με άλλα λόγια $w \in T_u$ αν και μόνο αν $w \in T$ και είτε $w \sqsubseteq u$ είτε $u \sqsubseteq w$. Αυτός ο ορισμός έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον όταν $u \in T$, αλλιώς το T_u αποτελείται μόνο από τα γνήσια αρχικά τμήματα της u που ανήκουν στο T, μπορεί να έχουμε $T_u = \{\Lambda\}$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το T_u είναι δένδρο και πως για κάθε $u \in T$ που δεν είναι τερματικός κόμβος του T ισχύει

$$T_u = \bigcup \{T_{u*(x)} \mid u*(x) \in T\} \tag{2.16}$$

$$[T_u] = \bigcup \{[T_{u*(x)}] \mid u*(x) \in T\} \tag{2.17}$$

για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ (Άσκηση 2.5.13).

Δένδρα και τοπολογία. Είναι σαφές ότι το σώμα ενός δένδρου T στο X είναι υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Αν θεωρήσουμε στο X τη διακριτή τοπολογία τότε ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι μετρικός χώρος. Όπως και με τον χώρο του Baire μια βάση για την τοπολογία του $X^{\mathbb{N}}$ είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής

$$\{x_0\} \times \cdots \times \{x_{n-1}\} \times X \times X \times \ldots$$

όπου $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$.

Μια ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $X^{\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην $f \in X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(f_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(n)$ μέσα στον X, ισοδύναμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f_i(n) = f(n)$ για όλα τα μεγάλα i.

Τα σώματα δένδρων σε ένα σύνολο X χαρακτηρίζουν τα κλειστά σύνολα του $X^{\mathbb{N}}$.

Πρόταση 2.5.2. *Έστω X μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική και $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το F είναι κλειστό ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο X με $F = [T]$.*

Απόδειξη. Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Αν το F είναι το κενό σύνολο τότε επιλέγουμε για T ένα οποιοδήποτε δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης με κενό σώμα, π.χ. το $\{\Lambda\}$.

Επομένως υποθέτουμε ότι $F \neq \emptyset$. Αν $u \in X^{<\mathbb{N}}$ και $f \in X^{\mathbb{N}}$ γράφουμε $u \sqsubseteq f$ όταν $f(k) = u(k)$ για κάθε $k < |u|$. Ορίζουμε $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$u \in T \iff \exists f \in F\; u \sqsubseteq f.$$

Επειδή $F \neq \emptyset$ έχουμε $\Lambda \in T$ και άρα $T \neq \emptyset$. Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι το T είναι δένδρο.

Δείχνουμε ότι $F = [T]$. Έστω $g \in F$ και $n \in \mathbb{N}$. Είναι προφανές ότι υπάρχει $f \in F$ με $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f$, συγκεκριμένα μπορούμε να πάρουμε $f = g$. Άρα $(g(0), \ldots, g(n)) \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g \in [T]$. Αντίστροφα αν $g \in [T]$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(g(0), \ldots, g(n)) \in T$ και άρα υπάρχει $f_n \in F$ με $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f_n$.

Η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο στοιχείο g. Πράγματι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $n_0 = k$ και για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $f_n(k) = g(k)$ γιατί $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f_n$. Άρα $f_n(k) \xrightarrow{X} g(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και επομένως $f_n \xrightarrow{X^{\mathbb{N}}} g$. Αφού $f_n \in F$ για κάθε n και το F είναι κλειστό προκύπτει ότι $g \in F$. Άρα $F = [T]$ και έχουμε αποδείξει την ευθεία κατεύθυνση.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε μια ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $[T]$ η οποία συγκλίνει στο $f \in X^{\mathbb{N}}$. Δείχνουμε ότι $f \in T$. Για κάθε n, υπάρχει i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ και κάθε $k \leqslant n$ έχουμε $f_i(k) = f(k)$. Ειδικότερα $(f(0), \ldots, f(n)) \sqsubseteq f_{i_0}$. Εξ ορισμού $(f(0), \ldots, f(n)) \in T$. Προκύπτει ότι $f \in [T]$.

□

Πόρισμα 2.5.3. *Ένα σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο $\mathbb{N}$ με $F = [T]$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.5.2 για $X = \mathbb{N}$ και θυμίζουμε ότι η τοπολογία του χώρου του Baire είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Πρόταση 2.3.3). □

Τα συμπαγή σύνολα του $X^{\mathbb{N}}$ μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν από τα σώματα μιας ειδικής κατηγορίας δένδρων.

Ορισμός 2.5.4. Έστω X μη κενό σύνολο και T ένα δένδρο στο X. Το T είναι **πεπερασμένης διακλάδωσης** αν για κάθε $u \in T$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα $w \in T$ που είναι άμεσες επεκτάσεις του u, δηλαδή για κάθε $u \in T$ υπάρχουν $x_0, \dots, x_{n-1} \in X$ έτσι ώστε

$$\forall x\, (u * (x) \in T \iff x \in \{x_0, \dots, x_{n-1}\}).$$

Το προηγούμενο n μπορεί να παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές. Μπορούμε ακόμα να έχουμε $n = 0$, οπότε σε αυτή την περίπτωση η πιο πάνω ισοδυναμία σημαίνει ότι ο κόμβος $u \in T$ είναι τερματικός.

Ένα κλασσικό παράδειγμα δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης είναι το σύνολο $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ όλων των **πεπερασμένων δυαδικών ακολουθιών**.

Λήμμα 2.5.5 (Το Λήμμα του König)**.** *Κάθε άπειρο δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης έχει άπειρο κλαδί.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $X \neq \emptyset$ και ένα άπειρο δένδρο T στο X που είναι πεπερασμένης διακλάδωσης. Ορίζουμε

$$P = \{u \in T \mid \text{το υποδένδρο } T_u \text{ είναι άπειρο}\}.$$

Αφού $T_\Lambda = T$ έχουμε $\Lambda \in P$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

$$u \in P \implies \exists x\, u * (x) \in P. \tag{2.18}$$

Θεωρούμε $u \in P$. Αφού το δένδρο T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης υπάρχουν $x_0, \dots, x_{n-1} \in T$ έτσι ώστε $u * (x) \in T$ αν και μόνο αν $x \in \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Επιπλέον το u δεν είναι τερματικός κόμβος του T γιατί το T_u είναι άπειρο σύνολο. Από την (2.16) έχουμε ότι

$$T_u = \bigcup_{u*(x) \in T} T_{u*(x)} = \bigcup_{k=0}^{n-1} T_{u*(x_k)}.$$

Ένα από τα πιο πάνω σύνολα της πεπερασμένης ένωσης είναι άπειρο, γιατί αλλιώς το T_u θα ήταν πεπερασμένο. Άρα υπάρχει $k < n$ με $u * (x_k) \in P$.

Έχοντας αποδείξει την πιο πάνω συνεπαγωγή μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X, ως εξής. Αρχικά εφαρμόζουμε την (2.18) για $u = \Lambda \in P$ και βρίσκουμε $x_0 \in X$ με $(x_0) \in P$. Έπειτα πάλι με εφαρμογή της (2.18) βρίσκουμε ένα στοιχείο $x_1 \in X$ με $(x_0, x_1) \in P$. Συνεχίζουμε ομοίως και βρίσκουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με την ιδιότητα $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in P$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ειδικότερα έχουμε $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in T$ για κάθε n και επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άπειρο κλαδί του X.

Σημείωση: Εδώ γίνεται χρήστη του *Αξιώματος Εξαρτημένων Επιλογών* (DC), μια ασθενέστερη μορφή του Αξιώματος Επιλογής, η οποία είναι ευρέως αποδεκτή στα κλασσικά Μαθηματικά. Παραπέμπουμε στην Άσκηση 2.5.20 για περισσότερες λεπτομέρειες. □

Πρόταση 2.5.6 (Συμπαγή σύνολα και δένδρα πεπερασμένης διακλάδωσης)**.** *Έστω X μη κενό σύνολο με τη διακριτή τοπολογία και $K \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το K είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο X πεπερασμένης διακλάδωσης με $K = [T]$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το K είναι συμπαγές. Ειδικότερα το K είναι κλειστό και από την Πρόταση 2.5.2 υπάρχει ένα δένδρο R στο X με $K = [R]$. Το R μπορεί να είναι άπειρης διακλάδωσης αλλά θα περάσουμε σε ένα υποδένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης με το ίδιο σώμα.

Ορίζουμε $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής,

$$u \in S \iff [R_u] \neq \emptyset.$$

Αν $w \sqsubseteq u$ είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε ακολουθία που είναι συμβατή με το u είναι συμβατή και με το w, επομένως $R_u \subseteq R_w$. Άρα αν $u \in S$ και $w \sqsubseteq u$ τότε

$\varnothing \neq [R_u] \subseteq [R_w]$ και επομένως $w \in S$. Προκύπτει ότι αν το S είναι μη κενό τότε είναι και δένδρο.

Η περίπτωση $S = \varnothing$ δεν μπορεί να αποκλειστεί: αν $K = \varnothing$ τότε $[R] = \varnothing$ και $S = \varnothing$. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε για T ένα οποιοδήποτε δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης που έχει κενό σώμα, π.χ. $T = \{\Lambda\}$.

Στο εξής θεωρούμε ότι $K \neq \varnothing$ και επειδή $K = [R] = [R_\Lambda]$ έχουμε $\Lambda \in S$ και το S είναι δένδρο. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι

$$[S_w] = [T_w] \tag{2.19}$$

για κάθε $w \in S$. (Τι συμπεραίνετε σε σχέση με την Άσκηση 2.5.14;)

Ισχυριζόμαστε ότι το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και ότι $[S] = [R]$, συνεπώς μπορούμε να πάρουμε $T = S$.

Η ισότητα $[S] = [R]$ είναι άμεση από την (2.19) για $w = \Lambda \in S$. Επομένως δείχνουμε ότι το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης.

Έστω $u \in S$. Για κάθε $x \in X$ με $u * (x) \in S$ ορίζουμε

$$V(x) = \{u(0)\} \times \cdots \times \{u(|u| - 1)\} \times \{x\} \times X \times X \times \ldots .$$

Τότε η οικογένεια $\{V(x) \mid u * (x) \in S\}$ είναι εύκολα ανοικτό κάλυμμα του συνόλου $[S_u]$. Από την Πρόταση 2.5.2 το $[S_u]$ είναι κλειστό υποσύνολο του K και συνεπώς είναι συμπαγές. Άρα υπάρχουν $x_0, \ldots, x_m \in X$ έτσι ώστε

$$[S_u] \subseteq \textstyle\bigcup_{i=0}^{m} V(x_i).$$

Δείχνουμε ότι για κάθε $x \in X$ με $u * (x) \in S$ υπάρχει $i \leqslant m$ με $x = x_i$. Έστω $w = u * (x) \in S$, τότε $[T_w] \neq \varnothing$. Από την (2.19) έχουμε $[S_w] = [T_w]$, άρα υπάρχει $f \in [S_w]$. Τότε $f(|w| - 1) = w(|w| - 1) = x$.

Από την άλλη $f \in [S_w] \subseteq [S_u]$ και άρα υπάρχει $i \leqslant m$ με $f \in V(x_i)$. Εξ ορισμού $f(|w| - 1) = f(|u|) = x_i$. Συνεπώς $x = x_i$.

Επομένως το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης. Αυτό αποδεικνύει την ευθεία κατεύθυνση.

Αντίστροφα έστω ότι $K = [T]$, όπου το T είναι δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης. Δείχνουμε ότι το K είναι συμπαγές. Έστω $(V_i)_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του K. Αν υπάρχει $i_0 \in I$ με $K \subseteq V_{i_0}$ τότε το $\{V_{i_0}\}$ αποτελεί προφανώς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Επομένως θεωρούμε ότι $K \nsubseteq V_i$ για κάθε $i \in I$.

Ορίζουμε $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$u \in S \iff u \in T \ \&\ \forall i \in I\ [T_u] \nsubseteq V_i.$$

Από την υπόθεσή μας έχουμε $K = [T] = [T_\Lambda] \nsubseteq V_i$ για κάθε i, επομένως $\Lambda \in S$. Επιπλέον αν $w \sqsubseteq u \in S$ τότε $u, w \in T$ και $[T_u] \subseteq [T_w]$, άρα για κάθε i έχουμε $[T_w] \nsubseteq V_i$, δηλαδή $w \in S$. Επομένως το S είναι υποδένδρο του T.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το S είναι άπειρο. Αφού το S (ως υποδένδρο του T) είναι πεπερασμένης διακλάδωσης, από το Λήμμα του König (Λήμμα 2.5.5) υπάρχει ένα άπειρο κλαδί $f \in [S] \subseteq [T] = K$. Αφού το $(V_i)_{i \in I}$ είναι κάλυμμα του K υπάρχει $i_0 \in I$ με $f \in V_{i_0}$ και αφού το V_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$\{f(0)\} \times \cdots \times \{f(n)\} \times X \times X \cdots \subseteq V_{i_0}.$$

Θέτουμε $u = (f(0), \ldots, f(n)) \in S$ και έχουμε

$$[T_u] \subseteq \{f(0)\} \times \cdots \times \{f(n)\} \times X \times X \cdots \subseteq V_{i_0},$$

που είναι άτοπο γιατί $u \in S$.

Άρα το S είναι πεπερασμένο σύνολο. Παίρνουμε $n = \max\{|u| \mid u \in S\}$ και $F = \{u \in T \mid |u| = n + 1\}$. Τότε το F είναι πεπερασμένο σύνολο (Άσκηση 2.5.17). Το μήκος κάθε $u \in F$ είναι μεγαλύτερο από τα μήκη των στοιχείων του S. Άρα για κάθε $u \in F$ έχουμε $u \notin S$, και αφού $u \in T$ ισχύει

$$\exists i \in I\ [T_u] \subseteq V_i. \tag{2.20}$$

Θεωρούμε το σύνολο J όλων των i όπως πιο πάνω, δηλαδή

$$J = \{i \in I \mid \exists u \in F\ [T_u] \subseteq V_i\},$$

και δείχνουμε ότι η πεπερασμένη υποοικογένεια $\{V_i \mid i \in J\}$ αποτελεί κάλυμμα του K. Πράγματι αν $f \in K = [T]$ τότε $u = (f(0), \ldots, f(n)) \in F$ και προφανώς $f \in [T_u]$. Από την (2.20) υπάρχει $i \in I$ με $[T_u] \subseteq V_i$. Άρα $i \in J$ και $f \in V_i$.

Σημείωση. Η απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης μπορεί να γίνει και με πιο στοιχειώδη τρόπο χωρίς την επίκληση του Λήμματος του König. Τότε όμως θα πρέπει να επαναλάβουμε στην ουσία την απόδειξη αυτού του λήμματος. Αυτό δεν είναι σύμπτωση. Όπως είναι γνωστό, το Λήμμα του König και η αντίστροφη κατεύθυνση της πρότασης που μόλις αποδείξαμε αποτελούν *ισοδύναμες εκφάνσεις της ίδιας μαθηματικής αρχής* (Άσκηση 2.5.21).

□

Πόρισμα 2.5.7. *Ένα σύνολο $K \subseteq \mathcal{N}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο $\mathbb{N}$ πεπερασμένης διακλάδωσης με $K = [T]$.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι άμεσο από την Πρόταση 2.5.6 για $X = \mathbb{N}$ και επειδή η τοπολογία του χώρου του Baire είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Πρόταση 2.3.3). □

Δένδρα στο $\mathbb{N}$. Στο εξής, και εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, θα ασχολούμαστε με δένδρα στους φυσικούς αριθμούς. Πολλά από τα επόμενα αποτελέσματα και έννοιες πάνω σε δένδρα μπορούν να διατυπωθούν σε γενικότερο πλαίσιο. Παρ' όλα αυτά η περίπτωση $X = \mathbb{N}$ είναι επαρκής για τους σκοπούς μας.

Ορισμός 2.5.8 (Ο χώρος των δένδρων Tr)**.** Θεωρούμε το σύνολο Tr όλων των δένδρων στο $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tr} = \{T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \text{το } T \text{ είναι δένδρο στο } \mathbb{N}\}.$$

Θεωρούμε επίσης μια απαρίθμηση του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, για παράδειγμα τη φυσική $(\mathrm{u}_s)_{s\in\mathbb{N}}$, που έχουμε σταθεροποιήσει στο 2.2.

Τότε σε κάθε δένδρο T στο $\mathbb{N}$ αντιστοιχεί το $\alpha_T \in 2^{\mathbb{N}}$ με

$$\alpha_T(s) = 1 \iff \mathrm{u}_s \in T.$$

Είναι σαφές ότι η συνάρτηση $T \in \mathrm{Tr} \mapsto \alpha_T \in 2^{\mathbb{N}}$ είναι μονομορφισμός.

Θεωρούμε το Tr με την *τοπολογία που λαμβάνει* από την τελευταία συνάρτηση, δηλαδή ένα $V \subseteq \mathrm{Tr}$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν το σύνολο $\{\alpha_T \mid T \in V\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Ο χαρακτηρισμός της σύγκλισης στον Tr δίνεται στην Άσκηση 2.5.18.

Το σύνολο Tr με την προηγούμενη τοπολογία είναι ο **χώρος των δένδρων** στο $\mathbb{N}$.

Πρόταση 2.5.9. *Ο χώρος των δένδρων* Tr *είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Εφόσον ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής αρκεί να δείξουμε ότι η εικόνα του Tr μέσω της απεικόνισης $T \in \mathrm{Tr} \mapsto \alpha_T \in 2^{\mathbb{N}}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$.

Έστω $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$ και $s_0 \in \mathbb{N}$ με $\mathrm{u}_{s_0} = \Lambda$. Αν $\alpha(s_0) = 0$ τότε για κάθε $\beta \in T$ με $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$ έχουμε $\beta \notin \{\alpha_T \mid T \notin \mathrm{Tr}\}$. (Αλλιώς $\beta = \alpha_T$ και η κενή ακολουθία δεν θα ανήκε στο T.)

Επομένως θεωρούμε ότι $\alpha(s_0) = 1$. Αν για κάθε s με $\alpha(s) = 1$ και κάθε t με $\mathrm{u}_t \sqsubseteq \mathrm{u}_s$ ισχύει $\alpha(t) = 1$, τότε $\alpha = \alpha_T$ όπου το T είναι το δένδρο που ορίζεται ως εξής:

$$T = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \exists s\ (u = \mathrm{u}_s \ \&\ \alpha(s) = 1)\}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε πως $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$. Επομένως υπάρχουν s, t με $\alpha(s) = 1$, $\mathrm{u}_t \sqsubseteq \mathrm{u}_s$ και $\alpha(t) = 0$. Τότε για κάθε $\beta \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\beta(i) = \alpha(i)$ για κάθε $i \leqslant \max\{t, s\}$ έχουμε $\beta \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$.

Σε κάθε περίπτωση το συμπλήρωμα $2^{\mathbb{N}} \setminus \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. □

Ορισμός 2.5.10. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\mathrm{WF} = \{T \in \mathrm{Tr} \mid [T] = \varnothing\} \tag{2.21}$$

$$\mathrm{IF} = \{T \in \mathrm{Tr} \mid [T] \neq \varnothing\} \tag{2.22}$$

των θεμελιωμένων και μη θεμελιωμένων αντίστοιχα δένδρων στο $\mathbb{N}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί ως η *παραμετρική εκδοχή* του Πορίσματος 2.5.3 και αποτελεί μία εξαιρετικά χρήσιμη εφαρμογή στη θεωρία των αναλυτικών και συναναλυτικών συνόλων που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Λήμμα 2.5.11 (Το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών Συνόλων).
Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με τη διακριτή μετρική. Τότε το P είναι κλειστό ακριβώς όταν υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες το $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο στο $\mathbb{N}$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και

$$P = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T(x)]\}.$$

Απόδειξη. Για τη μία κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το P είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{c}P$ το συμπλήρωμα του P στον $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Τότε

$$\mathrm{c}P = \bigcup_{n \in I, v \in J} V_n \times \mathcal{N}_v \tag{2.23}$$

όπου $I \subseteq \mathbb{N}$ και $J \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Lambda \notin J$. Σε αντίθετη περίπτωση αντικαθιστούμε κάθε $V_n \times \mathcal{N}_\Lambda \subseteq \mathrm{c}P$, $n \in I$, με την ένωση $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_n \times \mathcal{N}_{(i)}$. Επειδή

$$V_n \times \mathcal{N}_\Lambda = V_n \times \mathcal{N} = V_n \times \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{(i)} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (V_n \times \mathcal{N}_{(i)}),$$

η (2.23) παραμένει αληθής αν αντικαταστήσουμε το J με το

$$J' = (J \setminus \{\Lambda\}) \cup \{(i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $V_0 = \varnothing$. Αλλιώς αντικαθιστούμε την ακολουθία $(V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots)$ με την $(\varnothing, V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots)$. Η (2.23) εξακολουθεί να παραμένει αληθής.

Ορίζουμε

$$(x, u) \in T \iff \forall v \in J \; \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u| \; (x \notin V_n \;\&\; v \not\sqsubseteq u). \tag{2.24}$$

Επειδή κάθε V_n είναι ανοικτό σύνολο και το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική είναι εύκολο να δει κανείς ότι το T είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (δείτε την Άσκηση 2.5.19).

Θεωρούμε $x \in \mathcal{X}$ και δείχνουμε αρχικά ότι το $T(x)$ είναι δένδρο. Παρατηρούμε ότι αν $n \leqslant |\Lambda|$ τότε $n = 0$ και άρα $x \notin V_0 = \varnothing$. Επιπλέον $v \not\sqsubseteq \Lambda$ για κάθε $v \in J$ επειδή $\Lambda \notin J$. Από την (2.24) έχουμε ότι $\Lambda \in T(x)$ και επομένως $T(x) \neq \varnothing$. Αν $u' \sqsubseteq u$ και $u \in T(x)$ τότε για κάθε $v \in J$ και κάθε $n \in I$ με $n \leqslant |u|$ ισχύει $x \notin V_n$ και $v \not\sqsubseteq u$, απ' όπου προκύπτει ότι για κάθε $v \in J$ και κάθε $n \in I$ με $n \leqslant |u'| \leqslant |u|$ ισχύει $x \notin V_n$ και $v \not\sqsubseteq u'$. Συνεπώς $u' \in T(x)$ και το $T(x)$ είναι δένδρο.

Τώρα δείχνουμε τη ζητούμενη ισότητα για το P. Αν $(x, \alpha) \notin P$ τότε υπάρχει $n \in I$ με $x \in V_n$. Προκύπτει από την (2.24) ότι κάθε $u \in T(x)$ πρέπει να έχει μήκος μικρότερο του n και συνεπώς $[T(x)] = \varnothing$. Ειδικότερα $\alpha \notin [T(x)]$.

Αν $(x, \alpha) \in P$ τότε για κάθε $n \in I$ και κάθε $v \in J$ έχουμε $x \notin V_n$ και $\alpha \notin \mathcal{N}_v$, δηλαδή $v \nsubseteq \alpha$. Άρα

$$\forall t \in \mathbb{N}\, \forall v \in J\, (v \nsubseteq \alpha|t).$$

Αφού $x \notin \bigcup_{n \in I} V_n$ ισχύει

$$\forall t\, \forall v \in J\, \forall n \in I\, (x \notin V_n \;\&\; v \nsubseteq \alpha|t).$$

Ειδικότερα το ζεύγος $(x, \alpha|t)$ ικανοποιεί το δεξιό σκέλος της (2.24) και άρα $\alpha|t \in T(x)$ για κάθε $t \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\alpha \in [T(x)]$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $P = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T(x)]\}$. Τότε

$$\begin{aligned} (x, \alpha) \in P &\iff \forall t\ \alpha|t \in T(x) \\ &\iff \forall t\ (x, \alpha|t) \in T. \end{aligned}$$

Αφού το T είναι κλειστό και η συνάρτηση $f_t = (\alpha \mapsto \alpha|t)$ είναι συνεχής (Άσκηση 2.3.13), το σύνολο P είναι κλειστό. □

Ασκήσεις

Άσκηση 2.5.12. Δώστε τα παραδείγματα δένδρων T^0, T^1, T^2 και T^3 στο $\mathbb{N}$ με τις εξής ιδιότητες.

(i) Το T^0 είναι πεπερασμένο σύνολο και έχει τουλάχιστον μία ακολουθία μήκους 3.

(ii) Το T^1 είναι άπειρο σύνολο και κάθε $u \in T^1$ έχει μήκος το πολύ 1.

(iii) Κάθε $u \in T^2$ έχει το πολύ δύο άμεσες προεκτάσεις.

(iv) Το T^3 είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u \in T^3$ που έχει ακριβώς n άμεσες προεκτάσεις.

Επίσης επιλέξτε $u \in T^3$ και $w \notin T^3$ και βρείτε τα υποδένδρα T^3_u, T^3_w.

Άσκηση 2.5.13. Για κάθε δένδρο T σε ένα σύνολο $X \neq \varnothing$ και για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ το υποδένδρο

$$T_u = \{w \in T \mid u \| w\}$$

είναι δένδρο στο X. Επιπλέον αν το u δεν είναι τερματικός κόμβος του T,

$$\begin{aligned} T_u &= \textstyle\bigcup_{u*(x) \in T}\ T_{u*(x)} \\ [T_u] &= \textstyle\bigcup_{u*(x) \in T}\ [T_{u*(x)}]. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.5.14. Για κάθε δένδρο T σε ένα σύνολο $X \neq \varnothing$ υπάρχει ένα δένδρο $S \subseteq T$ που είναι περικομμένο (δηλαδή δεν έχει τερματικούς κόμβους) με $[S_u] = [T_u]$ για κάθε $u \in T$. Ειδικότερα έχουμε $[S] = [T]$.

Άσκηση 2.5.15. Συμπεράνετε από το Λήμμα 2.5.11 τον χαρακτηρισμό των κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ ως τα σύνολα $[T]$ όπου το T είναι δένδρο στο $\mathbb{N}$ (Πόρισμα 2.5.3).

Άσκηση 2.5.16. Συμπεράνετε από το Πόρισμα 2.5.7 ότι το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$ (Πρόταση 2.3.9).

Άσκηση 2.5.17. Για κάθε δένδρο T πεπερασμένης διακλάδωσης και κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $F_n = \{u \in T \mid |u| = n\}$ είναι πεπερασμένο.

Άσκηση 2.5.18. Για κάθε πεπερασμένη συλλογή $u_0, \dots, u_m, w_0, \dots, w_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε

$$B(u_0, \dots, u_m, w_0, \dots, w_k) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid \forall i \leqslant m \, \forall \, j \leqslant k \, (u_i \in T \,\&\, w_j \notin T)\}.$$

Τότε η οικογένεια όλων των συνόλων $B(u_0, \dots, u_m, w_0, \dots, w_k)$ αποτελεί βάση για την τοπολογία του Tr.

Συμπεράνετε ότι για κάθε ακολουθία δένδρων $(T_l)_{l \in \mathbb{N}}$ στον Tr και κάθε $T \in \mathrm{Tr}$ έχουμε

$$T_l \overset{i \to \infty}{\longrightarrow} T \iff \forall u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \, \exists l_0 \, \forall l \geqslant l_0 \, [\, u \in T_l \longleftrightarrow u \in T \,].$$

Άσκηση 2.5.19. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ και $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία (2.24),

$$(x, u) \in T \iff \forall v \in J \, \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u| \, (x \notin V_n \,\&\, v \nsubseteq u).$$

Τότε το T είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και η συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr}$

$$f(x) = T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$$

αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε F_σ σύνολα.

Επιπλέον αν τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Το **Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών** (DC) είναι η πρόταση: για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε $Q \subseteq X \times X$ με την ιδιότητα $\forall x \in X \, \exists y \in X \, (x, y) \in Q$ υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με $(f(n), f(n+1)) \in Q$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το **Αξίωμα Απαριθμητής Επιλογής** ($\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$) είναι η πρόταση: για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε $P \subseteq \mathbb{N} \times X$ με την ιδιότητα $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists x \in X \, (n, x) \in P$ υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με $(n, f(n)) \in P$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Όπως είναι γνωστό ισχύει η συνεπαγωγή DC $\Rightarrow \mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$. Το $\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$ αποτελεί μια από τις πιο θεμελιώδεις μορφές επιλογής στα κλασσικά Μαθηματικά καθώς μας επιτρέπει να λαμβάνουμε ακολουθίες με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Άσκηση 2.5.20. Εξηγήστε λεπτομερώς την εφαρμογή του Αξιώματος Εξαρτημένων Επιλογών DC στην απόδειξη του Λήμματος του König (Λήμμα 2.5.5).

Άσκηση 2.5.21. Δεδομένου του Αξιώματος Απαριθμητής Επιλογής $\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$ δείξτε ότι το Λήμμα του König (Λήμμα 2.5.5) είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: για κάθε δένδρο T σε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική, αν το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης τότε το $[T]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. (Αυτή είναι η μία κατεύθυνση της Πρότασης 2.5.6.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βασικές κλάσεις συνόλων και ιεράρχηση

3.1. Θεμελιώδεις τελεστές και η έννοια της κλάσης

Ορισμός 3.1.1. Με τον όρο **τελεστής συνόλων** εννοούμε οποιαδήποτε πράξη ανάμεσα σε σύνολα, για παράδειγμα έχουμε τον τελεστή της ένωσης όπου παίρνει δύο σύνολα A, B και δίνει την ένωση $A \cup B$. Περιορίζουμε το πεδίο εφαρμογής των τελεστών μας στα υποσύνολα Πολωνικών χώρων. Έχουμε τους εξής τελεστές.

(I) Ο τελεστής της **διάζευξης** $\vee$. Αν έχουμε $P, Q \subseteq \mathcal{X}$ ορίζουμε το σύνολο της διάζευξης $P \vee Q \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \vee Q \iff x \in P \text{ ή } x \in Q.$$

Παρατηρούμε ότι το $P \vee Q$ είναι η συνολοθεωρητική ένωση $P \cup Q$, γι' αυτό θα αποκαλούμε τη διάζευξη $P \vee Q$ και ως ένωση των P, Q. Η διαφορά ανάμεσα σε αυτούς τους δύο τελεστές είναι ότι η ένωση μπορεί να εφαρμοστεί σε σύνολα που δεν είναι απαραίτητα υποσύνολα του ίδιου χώρου. Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε την ένωση ενός συνόλου πραγματικών αριθμών με ένα σύνολο συναρτήσεων. Από την άλλη ο τελεστής της διάζευξης ορίζεται σε υποσύνολα του ίδιου χώρου.

Εδώ κάνουμε μια μικρή κατάχρηση του συμβολισμού. Όπως έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vee$ για να δηλώσουμε τον τελεστή της διάζευξης μέσα σε λογικές προτάσεις. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για να ορίσουμε μια πράξη ανάμεσα σε σύνολα. Ισχύει η προφανής σχέση

$$x \in P \vee Q \iff x \in P \ \vee \ x \in Q.$$

Θα είναι σαφές από το κείμενο σε ποια χρήση του συμβόλου $\vee$ αναφερόμαστε κάθε φορά και δεν θα δίνουμε περαιτέρω εξηγήσεις.

(II) Ο τελεστής της **σύζευξης** &. Αν έχουμε $P, Q \subseteq \mathcal{X}$ ορίζουμε το σύνολο της σύζευξης $P \,\&\, Q \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \,\&\, Q \iff x \in P \text{ και } x \in Q.$$

Παρατηρούμε ότι το $P \,\&\, Q$ είναι η συνολοθεωρητική τομή $P \cap Q$, γι' αυτό θα αποκαλούμε τη σύζευξη $P \,\&\, Q$ και ως τομή των P, Q. Ισχύουν οι ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές του τελεστή της διάζευξης.

(III) Ο τελεστής του **συμπληρώματος** c. Αν $P \subseteq \mathcal{X}$ ορίζουμε το συμπλήρωμα $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}P$ του P ως προς $\mathcal{X}$ ως το σύνολο $\mathcal{X} \setminus P$. Προφανώς

$$x \in \mathrm{c}_{\mathcal{X}}P \iff \neg(x \in P).$$

Όταν ο $\mathcal{X}$ είναι σαφής από το κείμενο γράφουμε απλά c αντί του $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}$.

(IV) Ο τελεστής της **άπειρης αριθμήσιμης διάζευξης ή ένωσης** $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία συνόλων $P_n \subseteq \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την **άπειρη διάζευξη** $\bigvee_{\mathbb{N}} (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής,

$$x \in \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \exists n \in \mathbb{N}\, x \in P_n.$$

Με άλλα λόγια η άπειρη διάζευξη $\bigvee_{\mathbb{N}} (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ υποσυνόλων του ίδιου Πολωνικού χώρου. Όπως και προηγουμένως θα αποκαλούμε την άπειρη διάζευξη και ως ένωση.

(V) Ο τελεστής της **άπειρης αριθμήσιμης σύζευξης ή τομής** $\bigwedge_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία συνόλων $P_n \subseteq \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την **άπειρη σύζευξη** $\bigwedge_{\mathbb{N}} (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής,

$$x \in \bigwedge\nolimits_{\mathbb{N}} (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall n \in \mathbb{N}\, x \in P_n.$$

Η άπειρη σύζευξη $\bigwedge_{\mathbb{N}} (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$ υποσυνόλων του ίδιου Πολωνικού χώρου, και θα την αποκαλούμε και ως τομή.

(VI) Ο τελεστής του **υπαρξιακού ποσοδείκτη** $\exists^{\mathcal{Y}} P$ υπεράνω του $\mathcal{Y}$. Αν έχουμε ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο

$$\exists^{\mathcal{Y}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists y\, (x, y) \in P\}.$$

Το $\exists^{\mathcal{Y}} P$ είναι ακριβώς η *προβολή του P υπεράνω του $\mathcal{Y}$*, με άλλα λόγια

$$\exists^{\mathcal{Y}} P = \mathrm{pr}[P] \text{ όπου } \mathrm{pr} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X} : \mathrm{pr}(x, y) = x.$$

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι περιπτώσεις όπου $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ και $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$. Στην τελευταία περίπτωση έχουμε στην ουσία μια άπειρη αριθμήσιμη ένωση, αν και όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στους δύο τελεστές.

(VII) Ο τελεστής του **καθολικού ποσοδείκτη** $\forall^{\mathcal{Y}} P$ υπεράνω του $\mathcal{Y}$. Αν έχουμε ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο

$$\forall^{\mathcal{Y}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \forall y\, (x, y) \in P\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\forall^{\mathcal{Y}} P = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}(\exists^{\mathcal{Y}}(\mathrm{c}_{(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})} P))$. Όπως με πριν ιδιαίτερη σημασία έχουν οι περιπτώσεις όπου $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ και $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$.

(VIII) Ο τελεστής του **φραγμένου υπαρξιακού ποσοδείκτη** $\exists^{\leqslant}$. Αν έχουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $\exists^{\leqslant} P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, n) \in \exists^{\leqslant} P \iff \exists m \leqslant n\, (x, m) \in P.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\exists^{\leqslant} P$ παραμένει υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$. Επίσης βλέπουμε ότι το $\exists^{\mathbb{N}} P$ "προσομοιάζει" την πεπερασμένη ένωση συνόλων. Το καινούργιο στοιχείο είναι ότι το "μήκος" της ένωσης (ο φυσικός αριθμός $n + 1$) αποτελεί μεταβλητή.

(IX) Ο τελεστής του **φραγμένου καθολικού ποσοδείκτη** $\forall^{\leqslant}$. Αν έχουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $\forall^{\leqslant} P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, n) \in \forall^{\leqslant} P \iff \forall m \leqslant n\, (x, m) \in P.$$

Όπως πιο πάνω το σύνολο $\forall^{\leqslant} P$ παραμένει υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$. Επίσης το $\forall^{\leqslant} P$ "προσομοιάζει" την πεπερασμένη τομή συνόλων όπου το "μήκος" της τομής αποτελεί μεταβλητή.

(X) Ο τελεστής της **πεπερασμένης ένωσης** $\bigvee_{\leqslant}$. Αν έχουμε πεπερασμένα το πλήθος $P_0, \ldots, P_n \subseteq \mathcal{X}$ τότε ορίζουμε το σύνολο

$$\bigvee\nolimits_{\leqslant} (P_0, \ldots, P_n) = P_0 \cup \cdots \cup P_n.$$

Με άλλα λόγια το $\bigvee_{\leqslant} (P_0, \ldots, P_n)$ είναι η πεπερασμένη ένωση των συνόλων $P_0, \ldots, P_n$. Διευκρινίζουμε ότι το n είναι τυχαίος φυσικός αριθμός. Δηλαδή το πεδίο εφαρμογής του τελεστή $\bigvee_{\leqslant}$ είναι *όλες* οι μη κενές πεπερασμένες ακολουθίες υποσυνόλων του ίδιου χώρου.

(XI) Ο τελεστής της **πεπερασμένης τομής** $\bigwedge_{\leqslant}$. Αν έχουμε πεπερασμένα το πλήθος $P_0, \ldots, P_n \subseteq \mathcal{X}$ τότε ορίζουμε το σύνολο

$$\bigwedge\nolimits_{\leqslant} (P_0, \ldots, P_n) = P_0 \cap \cdots \cap P_n.$$

Με άλλα λόγια το $\bigwedge_{\leqslant} (P_0, \ldots, P_n)$ είναι η πεπερασμένη ένωση των συνόλων $P_0, \ldots, P_n$ και το πεδίο εφαρμογής του τελεστή $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι *όλες* οι μη κενές πεπερασμένες ακολουθίες υποσυνόλων του ίδιου χώρου.

Σημείωση: Κάποιες φορές θα αναφερόμαστε στους πιο πάνω τελεστές για υποσύνολα μετρικών χώρων X, που δεν προκύπτουν απαραίτητα από Πολωνικούς. Ο ορισμός δίνεται με τον προφανή τρόπο.

Ορισμός 3.1.2. Για κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ και κάθε $y \in \mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο

$$P_y = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, y)\}.$$

Το P_y είναι η **y-τομή (section)** του συνόλου P.

Μπορεί κανείς να θεωρήσει την y-τομή ως τελεστή σε σύνολα, αλλά δεν μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αυτή η θεώρηση.

Ειδική περίπτωση αυτού του ορισμού είναι όταν $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ οπότε για κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ λαμβάνουμε την ακολουθία $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ των **τομών** του P. Στην περίπτωση $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ το n στο δείκτη μπορεί να έχει δύο έννοιες: α) την n-τομή και β) το το n-στο σύνολο μιας δοσμένης ακολουθίας, θα είναι σαφές από το κείμενο σε ποια από τις δύο έννοιες αναφερόμαστε. Γενικότερα, *εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά*, θα φροντίζουμε όταν έχουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και μια ακολουθία $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τότε η P_n να είναι n-τομή του συνόλου P έτσι που οι δύο έννοιες να συμβαδίζουν.

Ορισμός 3.1.3. Με τον όρο **κλάση συνόλων** εννοούμε τη συλλογή όλων των συνόλων σε μετρικούς χώρους που χαρακτηρίζονται από μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα θα αναφερόμαστε στην κλάση των *ανοικτών* συνόλων. Οι κλάσεις θα συμβολίζονται συνήθως με Γ. Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά οι κλάσεις συνόλων θα αναφέρονται σε υποσύνολα *Πολωνικών* χώρων.

Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε κλάση συνόλων Γ θέτουμε

$$\Gamma|\mathcal{X} = \{A \subseteq \mathcal{X} \mid \text{το } A \text{ ανήκει στην κλάση } \Gamma\}.$$

Θα λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathcal{X}$ είναι Γ **υποσύνολο** του $\mathcal{X}$ αν $A \in \Gamma|\mathcal{X}$.

Επεκτείνουμε τη σχέση του εγκλεισμού και τις στοιχειώδεις συνολοθεωρητικές πράξεις στις κλάσεις *για υποσύνολα του ίδιου χώρου*: αν έχουμε κλάσεις Γ_0 και Γ_1 ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 &\iff \text{κάθε στοιχείο της } \Gamma_0 \text{ είναι στοιχείο της } \Gamma \\
\Gamma_0 \cup \Gamma_1 &= \text{η κλάση όλων των } A \text{ που ανήκουν στην } \Gamma_0 \textit{ ή } \text{στην } \Gamma_1 \\
\Gamma_0 \cap \Gamma_1 &= \text{η κλάση όλων των } A \text{ που ανήκουν στην } \Gamma_0 \textit{ και } \text{στην } \Gamma_1 \\
\Gamma_0 \setminus \Gamma_1 &= \text{η κλάση όλων των } A \text{ που ανήκουν στη } \Gamma_0 \textit{ και δεν } \text{ανήκουν στη } \Gamma_1.
\end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε την ένωση $\bigcup_{k \leqslant n} \Gamma_k$ και τομή $\bigcap_{k \leqslant n} \Gamma_k$ των κλάσεων $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n$ με τον προφανή τρόπο. Όμοια ορίζουμε την άπειρη ένωση και άπειρη τομή κλάσεων.

Αν Φ είναι ένας από τους προηγούμενους τελεστές, π.χ. $\Phi = \exists^{\mathcal{N}}$, συμβολίζουμε με $\Phi\Gamma$ την **κλάση που προκύπτει από όλα τα σύνολα της μορφής** ΦP όπου το P ανήκει στη Γ και εμπίπτει στο πεδίο εφαρμογής του Φ. Ο ανάλογος συμβολισμός δίνεται για τους τελεστές που αναφέρονται σε δύο σύνολα ή σε μια ακολουθία συνόλων. Για παράδειγμα έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}\Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } \mathrm{c}_{\mathcal{X}} P = \mathcal{X} \setminus P \text{ όπου } P \in \Gamma|\mathcal{X}, \\
&\quad\ \text{για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X} \\
\vee\Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } A \vee B = A \cup B \text{ όπου } A, B \in \Gamma|\mathcal{X}, \\
&\quad\ \text{για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X} \\
\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } \exists^{\mathbb{N}} P \text{ όπου } P \in \Gamma|(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \\
&\quad\ \text{για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X} \\
\bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} \Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} (P_i)_{i \in \mathbb{N}} = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} P_i \\
&\quad\ \text{όπου } P_i \in \Gamma|\mathcal{X},\ i \in \mathbb{N}, \text{ για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X}.
\end{aligned}$$

Θα λέμε ότι η κλάση Γ είναι **κλειστή ως προς τον τελεστή** Φ αν το αποτέλεσμα της εφαρμογής του Φ στα σύνολα της Γ που εμπίπτουν στο πεδίο εφαρμογής του είναι σύνολο που ανήκει στη Γ, ισοδύναμα $\Phi\Gamma \subseteq \Gamma$.

Για παράδειγμα η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\vee$ αν για κάθε $P, Q \in \Gamma|\mathcal{X}$ η ένωση $P \vee Q$ ανήκει στη $\Gamma|\mathcal{X}$, ενώ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{N}}$ αν για κάθε $P \in \Gamma|(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$ το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}} P$ ανήκει στην $\Gamma|\mathcal{X}$.

Θα αναφερόμαστε επίσης σε **κλάση συναρτήσεων**. Με αυτό τον όρο θα εννοούμε μια συλλογή συναρτήσεων ανάμεσα σε μετρικούς χώρους (συνήθως Πολωνικούς) που χαρακτηρίζονται από μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα έχουμε την κλάση των συνεχών συναρτήσεων. Όταν θα λέμε *κλάση* χωρίς να διευκρινίζουμε αν πρόκειται για σύνολα ή συναρτήσεις *θα εννοούμε πάντα κλάση συνόλων*.

Μια κλάση Γ είναι **κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση** αν για κάθε συνεχή συνάρτηση

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

και κάθε $Q \in \Gamma|\mathcal{Y}$ έχουμε $f^{-1}[Q] \in \mathcal{X}|\Gamma$, ισοδύναμα το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ που ορίζεται ως εξής

$$x \in P \iff f(x) \in Q$$

ανήκει στη Γ.

Για παράδειγμα η κλάση των ανοικτών συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση γιατί η αντίστροφη εικόνα ενός ανοικτού συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ανοικτό σύνολο.

Στις εφαρμογές οι χώροι $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι συνήθως πεπερασμένα γινόμενα $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ και $\mathcal{Y}_1 \times \cdots \times \mathcal{Y}_m$ αντίστοιχα.

Γενικότερα αν έχουμε μια κλάση από συναρτήσεις Γ' θα λέμε ότι η Γ είναι **κλειστή ως προς** Γ'**-αντικατάσταση** αν για κάθε $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ που ανήκει στην Γ' και για κάθε $Q \in \Gamma|\mathcal{Y}$ έχουμε $f^{-1}[Q] \in \mathcal{X}|\Gamma$. Επομένως η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι κλειστότητα ως προς Γ'-αντικατάσταση όπου $\Gamma' =$ κλάση όλων των συνεχών συναρτήσεων.

Παρατήρηση 3.1.4. Η κλειστότητα μια κλάσης Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση μας επιτρέπει να (i) αναδιατάξουμε n-αδες μεταβλητών καθώς και (ii) να παραλείψουμε μερικές μεταβλητές χωρίς να εξέλθουμε της κλάσης.

Συγκεκριμένα για (i) πιο πάνω: αν έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ τότε για κάθε συνάρτηση

$$\tau : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

και κάθε σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X}_{\tau(1)} \times \cdots \times \mathcal{X}_{\tau(n)}$ που ανήκει στη Γ, το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ που ορίζεται ως εξής

$$(x_1, \ldots, x_n) \in P \iff (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ.

Ο ισχυρισμός είναι άμεσος από το ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{\tau(1)} \times \cdots \times \mathcal{X}_{\tau(n)}$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}).$$

είναι συνεχής.

Για το (ii) πιο πάνω: αν έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ τότε για κάθε συνάρτηση προβολής

$$\mathrm{pr} : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{k_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{k_m}$$
$$\mathrm{pr}(x_1, \ldots, \ldots, \ldots, x_n) = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})$$

και κάθε $Q \subseteq \mathcal{X}_{k_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{k_m}$ που ανήκει στη Γ το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ με

$$(x_1, \ldots, x_n) \in P \iff (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ. Αυτό συμβαίνει γιατί η συνάρτηση της προβολής pr είναι συνεχής και προφανώς $P = \mathrm{pr}^{-1}[Q]$.

Ως *παράδειγμα εφαρμογής* των προηγουμένων ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ, τρεις Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, και δύο σύνολα $Q_0 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $Q_1 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, που ανήκουν στη Γ. Τότε τα σύνολα $P_0 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ και $P_1 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}$ που ορίζονται ως εξής,

$$(x,y,z) \in P_0 \iff (x,y) \in Q_0$$
$$(x,z,y) \in P_1 \iff (x,y,z) \in Q_1$$

ανήκουν επίσης στη Γ. Για να το δούμε αυτό παίρνουμε $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{Y}$ και $\mathcal{X}_3 = \mathcal{Z}$ και εφαρμόζουμε την παρατήρηση παίρνοντας

$$\mathrm{pr} : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \to \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 : \mathrm{pr}(x,y,z) = (x,y)$$
$$\tau : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} : \tau_1(1) = 1, \tau_1(2) = 3, \tau_1(3) = 2.$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόζουμε την παρατήρηση χωρίς αναφορά στις λεπτομέρειες. Ως κανόνα έχουμε ότι μπορούμε να *αναδιατάξουμε και να παραλείψουμε μεταβλητές παραμένοντας στην κλάση*.

Παρατήρηση 3.1.5. Υπό κάποιες προϋποθέσεις για την κλάση Γ μπορούμε να παραμείνουμε σε αυτήν αν αντικαταστήσουμε τον όρο $n \leqslant m$ με τον πιο γενικό $n \leqslant f(x,y)$ όπου η $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{N}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Συγκεκριμένα θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\forall^{\leqslant}$, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα σύνολο $P \in \Gamma|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$.

Τότε για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{N}$ το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ με

$$(x,y) \in Q \iff \exists n \leqslant f(x,y)\ (x,n) \in P$$

ανήκει στη Γ.

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε το σύνολο S με

$$(x,m) \in S \iff \exists n \leqslant m\ (x,n) \in P$$

και παρατηρούμε ότι

$$(x,y) \in Q \iff \exists n \leqslant f(x,y)\ (x,n) \in P \iff (x, f(x,y)) \in S.$$

Το σύνολο S ανήκει στην κλάση $\forall^{\leqslant}\Gamma \subseteq \Gamma$. Λόγω της κλειστότητας της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε ότι το Q ανήκει επίσης στην $\forall^{\leqslant}\Gamma \subseteq \Gamma$.

Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης υπεράνω του $\mathbb{N}$ και η αριθμήσιμη ένωση. Οι τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$ φαίνονται να περιγράφουν την ίδια μαθηματική έννοια, καθώς και οι δύο αναφέρονται στην ύπαρξη κάποιου φυσικού αριθμού n ώστε το δοσμένο x να ανήκει σε ένα σύνολο P_n. Συγκεκριμένα:

Αν έχουμε μια ακολουθία $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ υποσυνόλων κάποιου Πολωνικού χώρου και ορίσουμε

$$P = \{(x,n) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in P_n\} \tag{3.1}$$

τότε είναι άμεσο πως $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$. Αντίστροφα αν έχουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και ορίσουμε

$$P_n = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,n) \in P\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

τότε πάλι έχουμε $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$.

Με άλλα λόγια βλέπουμε ότι ο ένας τελεστής *ανάγεται* στον άλλο. *Δεν σημαίνει όμως* ότι η *κλειστότητα* μιας κλάσης Γ ως προς τον έναν τελεστή *είναι το ίδιο με την κλειστότητα* της Γ ως προς τον άλλον.

Για να εξηγήσουμε το τελευταίο καλύτερα ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$ και ας εξετάσουμε αν η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων κάποιου Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην Γ. Σύμφωνα με όσα περιγράψαμε πιο πάνω υπάρχει ένας "φυσιολογικός" τρόπος να προχωρήσουμε.

Θεωρούμε το σύνολο P όπως ορίζεται στην (3.1) έτσι που $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Αν γνωρίζαμε ότι το P ανήκει στη Γ τότε λόγω της κλειστότητας της Γ ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ θα είχαμε

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \exists^{\mathbb{N}} P \in \Gamma|\mathcal{X}.$$

Εδώ ακριβώς εντοπίζεται η διαφορά ανάμεσα στους δύο τελεστές. *Δεν είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι το προηγούμενο σύνολο P ανήκει στη* Γ χωρίς να γνωρίζουμε κάτι περισσότερο για τη δομή της Γ. Συνεπώς ο "φυσιολογικός" τρόπος για να δείξουμε ότι η κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται και την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ αποτυγχάνει.

Μάλιστα υπάρχουν παραδείγματα κλάσεων Γ που είναι κλειστές ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ αλλά όχι ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Ένα τέτοιο παράδειγμα κλάσης Γ μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα (Άσκηση 3.1.9). Το παράδειγμα είναι κάπως "τεχνητό" αλλά υπάρχουν και άλλα παραδείγματα τέτοιων κλάσεων Γ που προκύπτουν με πιο φυσιολογικό τρόπο. Αυτές οι κλάσεις είναι αντικείμενο μελέτης της *κατασκευαστικής* περιγραφικής θεωρίας συνόλων (effective descriptive set theory) που δεν μας απασχολεί στο παρόν σύγγραμμα.

Ο αντίστοιχος συλλογισμός μπορεί να γίνει αν αλλάξουν θέσεις οι δύο τελεστές. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις και ας επιχειρήσουμε να δείξουμε ότι η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στη Γ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε P_n όπως στην (3.2) ώστε να έχουμε $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

Αν γνωρίζαμε ότι κάθε P_n ανήκει στη Γ, λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ θα είχαμε ότι $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \in \Gamma$. Όμως, όμοια με πριν, δεν είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι τα σύνολα P_n, $n \in \mathbb{N}$, ανήκουν στη Γ. Για την ακρίβεια μπορεί κανείς να δώσει παραδείγματα κλάσεων Γ που είναι είναι κλειστές ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ αλλά όχι ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ (Άσκηση 3.1.10). Σε αυτή την περίπτωση όμως, τα παραδείγματα που γνωρίζουμε είναι τεχνητά. Στις κλάσεις Γ που προκύπτουν με φυσιολογικό τρόπο, η κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται και κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$. Αυτό γίνεται εμφανές από το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.1.6. *Σταθεροποιούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$. Για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ και κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ θεωρούμε τις συναρτήσεις*

$$a_{\mathcal{X},y} : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : a_{\mathcal{X},y}(x) = (x, y).$$

Θεωρούμε επίσης μια κλάση συναρτήσεων Γ' που περιέχει όλες τις $a_{\mathcal{X},y}$ και μια κλάση συνόλων Γ που είναι κλειστή ως προς Γ'-αντικατάσταση. Τότε:

(i) *Για κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ που ανήκει στη Γ και κάθε $y \in \mathcal{Y}$ η y-τομή*

$$P_y = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, y) \in P\}$$

ανήκει επίσης στη Γ.

Ειδικότερα για κάθε Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση κάθε $P \in \Gamma|(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ η y-τομή P_y ανήκει στη Γ για κάθε $y \in \mathcal{Y}$.

(ii) *Ισχύει η εξής συνεπαγωγή*

$$\Gamma\text{: κλειστή ως προς } \bigvee_{\mathbb{N}} \implies \Gamma\text{: κλειστή ως προς } \exists^{\mathbb{N}}.$$

Ειδικότερα κάθε κλάση συνόλων Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ είναι επίσης κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι οι συναρτήσεις $a_{\mathcal{X},y}$ είναι συνεχείς, άρα κάθε κλάση που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι επίσης κλειστή ως προς Γ'-αντικατάσταση.

Για το (i) θεωρούμε $y \in \mathcal{Y}$ και παρατηρούμε ότι

$$x \in P_y \iff (x, y) \in P \iff a_{\mathcal{X},y}(x) \in P \iff x \in a^{-1}_{\mathcal{X},y}[P].$$

Αφού το P ανήκει στη Γ έχουμε από την κλειστότητα της Γ ως προς Γ'-αντικατάσταση ότι το σύνολο P_y ανήκει στη Γ.

Για το (ii) εφαρμόζουμε τα προηγούμενα για $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$. Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στη Γ και δείχνουμε ότι το σύνολο $\exists^{\mathbb{N}} P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει επίσης στη Γ. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathbb{N}} P &\iff \exists n\, (x, n) \in P \\ &\iff \exists n\, x \in P_n \end{aligned}$$

όπου P_n είναι η n-τομή $\{x \in \mathcal{X} \mid (x, n) \in P\}$. Από το (i) κάθε P_n ανήκει στη Γ και από την κλειστότητα της Γ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι το σύνολο $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} a^{-1}_{\mathcal{X},n}[P]$ ανήκει επίσης στη Γ. ▫

Η κλειστότητα ως προς την αντικατάσταση με βάση τις πιο πάνω συναρτήσεις $a_{\mathcal{X},n}$, όπου $n \in \mathbb{N}$, είναι το ελάχιστο που θα θέλαμε να ικανοποιεί μια ενδιαφέρουσα κλάση Γ. Από την προηγούμενη πρόταση όλες αυτές οι κλάσεις που είναι κλειστές ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ είναι επίσης κλειστές ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια *οι κλάσεις συνόλων που μελετάμε σε αυτές τις σημειώσεις* είναι κλειστές ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ *αν και μόνο αν* είναι κλειστές ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Προφανώς οι ανάλογες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για τα ζεύγη των τελεστών $(\exists^{\leqslant}, \bigvee_{\leqslant})$, $(\forall^{\mathbb{N}}, \bigwedge_{\mathbb{N}})$ και $(\forall^{\leqslant}, \bigwedge_{\leqslant})$. Αποφεύγουμε να εισέλθουμε σε περαιτέρω λεπτομέρειες.

Εκτίμηση της πολυπλοκότητας με βάση τους τελεστές. Δείχνουμε πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε την πολυπλοκότητα ενός δοσμένου συνόλου με βάση *τη χαρακτηριστική του ιδιότητα που το ορίζει*.

Παράδειγμα 3.1.7. Θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή της διάζευξης $\vee$. Θεωρούμε επίσης δύο σύνολα $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $R \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ που ανήκουν στη Γ και ορίζουμε

$$P = \{(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \mid (x, y) \in Q \text{ ή } (y, z) \in R\}.$$

Δείχνουμε ότι το P ανήκει στη Γ. Ένας τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να πάρουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} Q^* &= \{(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \mid (x, y) \in Q\} \\ R^* &= \{(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \mid (y, z) \in R\} \end{aligned}$$

και τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : f_1(x, y, z) = (x, y) \\ f_2 &: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} : f_2(x, y, z,) = (y, z). \end{aligned}$$

Τότε

$$Q^* = f_1^{-1}[Q], \quad R^* = f_2^{-1}[R]$$

και

$$P = f_1^{-1}[Q] \cup f_2^{-1}[R] = Q^* \cup R^*.$$

Τα σύνολα Q^* και R^* ανήκουν στη Γ λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς συνεχή αντικατάσταση. Έπεται ότι το P ανήκει στη Γ επειδή η τελευταία είναι κλειστή ως προς την ένωση δύο υποσυνόλων του ίδιου χώρου.

Μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τον πιο πάνω συλλογισμό ως εξής. Πρώτα βλέπουμε ότι δεν χρειάζεται να κάνουμε αναφορά στις συναρτήσεις f_1 και f_2, γιατί τα σύνολα

$$(x, y, z) \in Q^* \iff (x, y) \in Q$$
$$(x, y, z) \in R^* \iff (y, z) \in R$$

ανήκουν στη Γ από την κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση και την Παρατήρηση 3.1.4. Έπειτα βλέπουμε ότι

$$(x, y, z) \in P \iff (x, y, z) \in Q^* \ \vee \ (x, y, z) \in R^*,$$

συνεπώς από την κλειστότητα της Γ ως προς $\vee$ έχουμε ότι το P ανήκει στη Γ.

Συνήθως δεν θα κάνουμε αναφορά στα σύνολα Q^* και R^* και έτσι θα μπορούμε να συμπεραίνουμε ότι το σύνολο P ανήκει στην Γ κατευθείαν από τον ορισμό,

$$(x, y, z) \in P \iff (x, y) \in Q \ \vee \ (y, z) \in R.$$

Με αυτή τη μέθοδο **ταυτίζουμε ένα σύνολο με τη σχέση που το ορίζει**. *Η εκτίμηση της πολυπλοκότητας του συνόλου μετατρέπεται σε εκτίμηση της πολυπλοκότητας αυτής της σχέσης. Η τελευταία γίνεται μέσω των αντίστοιχων τελεστών κλειστότητας της* Γ *και την κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση, πολλές φορές με χρήση της Παρατήρησης 3.1.4, την οποία θα εφαρμόζουμε χωρίς ιδιαίτερη αναφορά.*

Πρόκειται για μια αρκετά ισχυρή μέθοδο, η οποία αναδεικνύει την αξία της σε πιο σύνθετα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.1.8. Ας πάρουμε ως δεύτερο παράδειγμα μια κλάση Γ που περιέχει τα κλειστά σύνολα και που είναι κλειστή ως προς τους τελεστές $\vee$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathcal{N}}$ και συνεχή αντικατάσταση. Θεωρούμε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \iff \forall n\, \exists \alpha\, \forall m\, (x = f_n(\alpha) \ \vee \ g_m(x, \alpha) = 0)$$

όπου οι f_n, g_m, $m, n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Δείχνουμε ότι το P ανήκει στη Γ. Τα σύνολα A,B με

$$(x, \alpha, n) \in A \iff x = f_n(\alpha)$$
$$(x, \alpha, m) \in B \iff g_m(x, \alpha) = 0$$

είναι κλειστά επειδή οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και άρα ανήκουν στη Γ. Συνεπώς το σύνολο C με

$$(x, \alpha, n) \in C \iff \forall m\, ((x, \alpha, n) \in A \,\&\, (x, \alpha, m) \in B)$$

ανήκει στη Γ χρησιμοποιώντας την κλειστότητα ως προς $\vee$ και $\forall^{\mathbb{N}}$. Το σύνολο D με

$$(x, n) \in D \iff \exists \alpha\, (x, \alpha, n) \in C$$

ανήκει επίσης στη Γ λόγω κλειστότητας ως προς $\exists^{\mathcal{N}}$ και συνεχούς αντικατάστασης (εδώ εφαρμόζουμε την Παρατήρηση 3.1.4 γιατί έχουμε αναδιατάξει τις μεταβλητές). Τέλος το $P = \forall^{\mathbb{N}} D$ ανήκει στη Γ από την κλειστότητα ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$.

Στη συνέχεια δεν θα κάνουμε αναφορά στα "ενδιάμεσα" σύνολα A, B, C, και D, εκτός και αν συντρέχει ιδιαίτερος λόγος. Οι ιδιότητες κλειστότητας της Γ μας καθιστούν σαφές ότι το P ανήκει στη Γ. Για βοήθεια μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τον εξής "διαγραμματικό" συλλογισμό:

$$x \in P \iff \underbrace{\forall n\ \underbrace{\exists \alpha\ \underbrace{\forall m\ \underbrace{(x = f_n(\alpha) \ \vee \ g_m(x, \alpha) = 0)}_{\Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma \subseteq \Gamma}}_{\exists^{\mathcal{N}}\Gamma \subseteq \Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma \subseteq \Gamma}.$$

Αφήνουμε για άσκηση την αντίστοιχη "κλασσική" απόδειξη με βάση τις συνολοθεωρητικές ισότητες ότι το προηγούμενο P ανήκει στη Γ (Άσκηση 3.1.11, για να γίνουν πιο εμφανείς οι διαφορές κάνουμε μια μικρή αναδιατύπωση του προβλήματος.)

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1.9. Θεωρούμε την κλάση Γ των *μονοσυνόλων* σε Πολωνικούς χώρους, δηλαδή

$$\Gamma|\mathcal{X} = \{\{x\} \mid x \in \mathcal{X}\}$$

για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Εξετάστε την κλειστότητα της Γ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.1.10. Θεωρούμε την κλάση Γ των υποσυνόλων Πολωνικών χώρων με *τουλάχιστον δύο στοιχεία*, δηλαδή

$$\Gamma|\mathcal{X} = \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \mid \exists a, b \in A \; a \neq b\}$$

για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Εξετάστε την κλειστότητα της Γ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.1.11. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και συνεχείς συναρτήσεις

$$f_n : \mathcal{X} \to \mathcal{N}, g_m : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}.$$

Ορίζουμε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ ως εξής,

$$x \in P \iff \forall n \, \exists \alpha \, \forall m \, (x = f_n(\alpha) \;\vee\; g_m(x, \alpha) = 0).$$

Τότε το P γράφεται ως αριθμήσιμη τομή συνόλων που είναι προβολές κλειστών συνόλων.

Άσκηση 3.1.12. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και T κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (όπου στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ θεωρούμε τη διακριτή μετρική), έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο. Τότε για κάθε $u \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$A_u = \{x \in \mathcal{X} \mid \text{το υποδένδρο } T_u(x) \text{ έχει κόμβους οσοδήποτε μεγάλου μήκους}\}$$

ανήκει στην $\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$, όπου Γ είναι η κλάση των κλειστών συνόλων σε Πολωνικούς χώρους.

Άσκηση 3.1.13. *Επαναλαμβάνουμε την Άσκηση 2.5.19 όπου τώρα οι υπολογισμοί γίνονται με χρήση των τελεστών. Συγκρίνετε τις λύσεις των δύο ασκήσεων.*

Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, ένα σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία (2.24),

$$(x, u) \in T \iff \forall v \in J \, \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u| \, (x \notin V_n \;\&\; v \not\sqsubseteq u)$$

και η συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr}$

$$f(x) = T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}.$$

Παίρνουμε ως δεδομένο ότι οι κλάση των ανοικτών συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$. Τότε το T είναι κλειστό σύνολο και για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο $P_{u,w} \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P_{u,w} \iff u \in f(x) \;\&\; w \notin f(x)$$

είναι F_σ.

Μάλιστα αν τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ τα $P_{u,w}$ είναι ανοικτά σύνολο.

3.2. Οι κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης

Ορισμός 3.2.1. Ορίζουμε με αναδρομή στο $n \geqslant 1$ τις εξής κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους:

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_1 = \text{η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων}$$
$$\boldsymbol{\Pi}^0_1 = \mathrm{c}\boldsymbol{\Sigma}^0_1 = \text{η κλάση όλων των κλειστών συνόλων}$$

και

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1} &= \textstyle\bigvee_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\Pi}^0_n \\ &= \text{οι αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων της } \boldsymbol{\Pi}^0_n \\ \boldsymbol{\Pi}^0_{n+1} &= \mathrm{c}\boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1} \\ &= \text{τα συμπληρώματα των συνόλων της } \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1}.\end{aligned}$$

Τέλος θέτουμε

$$\boldsymbol{\Delta}^0_n = \boldsymbol{\Sigma}^0_n \cap \boldsymbol{\Pi}^0_n.$$

Είναι άμεσο ότι ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στη $\boldsymbol{\Delta}^0_n$ αν και μόνο αν τα σύνολα P και $\mathcal{X} \setminus P$ ανήκουν στη $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$. Επιπλέον είναι εύκολο να δει κανείς (Άσκηση 3.2.10) ότι

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1} = \textstyle\bigwedge_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\Pi}^0_n.$$

Οι κλάσεις $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ είναι οι **κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης** ενώ οι $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ και $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ είναι οι **δυϊκές** (dual) και **αμφίσημες** (ambiguous) αντίστοιχα κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης.

Η συλλογή των προηγούμενων κλάσεων ονομάζεται **ιεραρχία των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης**.

Παρατήρηση 3.2.2. Η κλάση $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ αποτελείται ακριβώς από τα F_σ σύνολα και συνεπώς η $\boldsymbol{\Pi}^0_2$ αποτελείται ακριβώς από τα G_δ σύνολα.

Πρόταση 3.2.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_n|\mathcal{X} \subseteq \boldsymbol{\Delta}^0_{n+1}|\mathcal{X}$$

και επομένως ισχύει επίσης

$$\boldsymbol{\Pi}^0_n|\mathcal{X} \subseteq \boldsymbol{\Delta}^0_{n+1}|\mathcal{X}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_n|\mathcal{X} \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1}|\mathcal{X} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\Sigma}^0_n|\mathcal{X} \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_{n+1}|\mathcal{X}. \tag{3.3}$$

Προφανώς από το πιο πάνω προκύπτουν οι εγκλεισμοί $\boldsymbol{\Sigma}^0_n|\mathcal{X} \subseteq \boldsymbol{\Delta}^0_{n+1}|\mathcal{X}$.

Για $n = 1$, από την Πρόταση 2.1.6 κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι F_σ και G_δ, οπότε από την Παρατήρηση 3.2.2 ισχύει $\boldsymbol{\Sigma}^0_1|\mathcal{X} \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_2|\mathcal{X}$ και $\boldsymbol{\Pi}^0_1|\mathcal{X} \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_2|\mathcal{X}$.

Θεωρούμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ ισχύει η (3.3) και δείχνουμε το αντίστοιχο για το $n+1$. Έστω $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1}|\mathcal{X}$. Τότε από τον ορισμό υπάρχει μια ακολουθία $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

Έχουμε

$$\mathcal{X} \setminus B_i \in \boldsymbol{\Sigma}^0_n|\mathcal{X} \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1}|\mathcal{X}$$

όπου στον τελευταίο εγκλεισμό χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση. Άρα $B_i \in \boldsymbol{\Pi}^0_{n+1}|\mathcal{X}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και

$$A = \textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \bigvee_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\Pi}^0_{n+1}|\mathcal{X} = \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+2}|\mathcal{X}.$$

Επιπλέον αν πάρουμε $A_i = A$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ και $A_i \in \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1}|\mathcal{X}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\mathcal{X} \setminus A = \textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\mathcal{X} \setminus A_i) \in \bigvee_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\Pi}^0_{n+1}|\mathcal{X} = \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+2}|\mathcal{X}$$

και άρα $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+2}|\mathcal{X}$. Έτσι έχουμε δείξει την (3.3) για το $n+1$.

Είναι επίσης σαφές ότι οι εγκλεισμοί $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n|\mathcal{X} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}|\mathcal{X}$ είναι άμεσοι από αυτούς της (3.3) παίρνοντας τα συμπληρώματα. □

Στο επόμενο βήμα εξασφαλίζουμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες κλειστότητας των πιο πάνω κλάσεων. Οι πλήρης λίστα με τις ιδιότητες κλειστότητας δίνεται σε μεταγενέστερο στάδιο στο Θεώρημα 3.2.8.

Λήμμα 3.2.4. *Οι κλάσεις* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ *και* $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$, $n \geqslant 1$ *είναι κλειστές ως προς* $\vee$, &, *και συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι οι ιδιότητες κλειστότητας για τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ είναι άμεσες από τις αντίστοιχες των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Για παράδειγμα να δείξουμε ότι η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{17}$ και η $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{17}$ είναι κλειστές ως προς $\vee$ τότε για κάθε $A, B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{17}|\mathcal{X}$ έχουμε $A, B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{17}|\mathcal{X}$ και $A, B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{17}|\mathcal{X}$ και άρα

$$A \vee B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{17}|\mathcal{X} \cap \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{17}|\mathcal{X} = \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{17}|\mathcal{X}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$, γιατί για κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και κάθε $A \subseteq \mathcal{Y}$ έχουμε

$$f^{-1}[\mathcal{Y} \setminus A] = \mathcal{X} \setminus A.$$

Με άλλα λόγια αν η f αντιστρέφει στοιχεία της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σε στοιχεία της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ τότε αντιστρέφει και στοιχεία της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σε στοιχεία της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και αντίστροφα.

Τέλος παρατηρούμε ότι η κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\vee$ και & είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ ως προς τους ίδιους τελεστές και αντίστροφα. Αυτό συμβαίνει λόγω των *νόμων του de Morgan*,

$$\mathcal{X} \setminus (A \cup B) = (\mathcal{X} \setminus A) \ \cap \ (\mathcal{X} \setminus B)$$
$$\mathcal{X} \setminus (A \cap B) = (\mathcal{X} \setminus A) \ \cup \ (\mathcal{X} \setminus B).$$

Για παράδειγμα αν έχουμε ότι η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς $\vee$ και πάρουμε $A, B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n|\mathcal{X}$ τότε τα σύνολα $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}A = \mathcal{X} \setminus A$ και $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}B = \mathcal{X} \setminus B$ ανήκουν στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και συνεπώς το σύνολο $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}(A \cap B) = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}A \cup \mathrm{c}_{\mathcal{X}}B$ ανήκει επίσης στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Επομένως το σύνολο $A \& B = A \cap B$ ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και άρα η τελευταία κλάση είναι κλειστή ως προς &.

Έπειτα δείχνουμε με επαγωγή στο n ότι οι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ έχουν τις ζητούμενες ιδιότητες κλειστότητας.

Για $n = 1$ αφού η πεπερασμένη ένωση και η πεπερασμένη τομή ανοικτών (αντίστοιχα κλειστών) συνόλων είναι ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό) υποσύνολο του ίδιου χώρου έχουμε ότι οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1$ είναι κλειστές ως προς $\vee$ και &. Επίσης η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση γιατί η αντίστροφη εικόνα ανοικτού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι ανοικτό σύνολο.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το ζητούμενο για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε το ζητούμενο για το $n+1$. Έστω $A, B \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκουν στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ και $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ συνεχής. Σύμφωνα με τα προηγούμενα αρκεί να δείξουμε ότι τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $f^{-1}[A]$ ανήκουν στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$.

Υπάρχουν ακολουθίες $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ και $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $A_i, B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n|\mathcal{X}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ώστε

$$A = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \text{και} \quad B = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} B_i.$$

Τότε

$$A \cup B = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i)$$
$$A \cap B = \bigcup\nolimits_{i,j \in \mathbb{N}} (A_i \cap B_j)$$
$$f^{-1}[A] = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}[A_i].$$

Από την επαγωγική υπόθεση η κλάση $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς $\vee$, &, και συνεχή αντικατάσταση. Άρα τα σύνολα $A_i \cup B_i$, $A_i \cap B_j$ και $f^{-1}[A_i]$ στις πιο πάνω ισότητες ανήκουν στην $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Αφού οι πιο πάνω ενώσεις είναι αριθμήσιμες έχουμε ότι τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $f^{-1}[A]$ ανήκουν στην $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Πριν προχωρήσουμε στις υπόλοιπες ιδιότητες κλειστότητας είναι χρήσιμο να χαρακτηρίσουμε τις κλάσεις $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ με βάση τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists^{\mathbb{N}}$. Δίνουμε πρώτα κάποια βοηθητικά αποτελέσματα.

Παρατήρηση 3.2.5. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$, κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $A \in \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n|(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ τα σύνολα $A_i \subseteq \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$, που ορίζονται ως εξής

$$x \in A_i \iff (x, i) \in A$$

ανήκουν επίσης στην κλάση $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Αυτό είναι άμεσο από την Πρόταση 3.1.6 γιατί κάθε A_i είναι η i-τομή του A και η $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση (Λήμμα 3.2.4). Φυσικά μπορεί κανείς να το αποδείξει και χωρίς τη χρήση της Πρότασης 3.1.6 παρατηρώντας ότι

$$A_i = f_i^{-1}[A] \quad \text{όπου} \quad f_i : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathbb{N} : f_i(x) = (x, i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Προφανώς ισχύουν τα ίδια αν αντί της κλάσης $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ έχουμε την $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ ή την $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Λήμμα 3.2.6 ([**Mos09**], 1F.7)**.** *Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, και μια ακολουθία συνόλων $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ που ανήκουν στην οικογένεια $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X}$. Τότε το σύνολο $B \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής*

$$(x, i) \in B \iff x \in B_i$$

ανήκει στην κλάση $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Τα πιο πάνω ισχύει επίσης αν αντικαταστήσουμε την κλάση $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ με την $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός για την $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ προκύπτει από αυτόν για την $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ παίρνοντας τα συμπληρώματα. Γι' αυτό δείχνουμε μόνο τον ισχυρισμό για την $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Ορίζουμε τα σύνολα $C_i \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, ως εξής:

$$(x, s) \in C_i \iff x \in B_i \;\&\; s = i.$$

Για κάθε i το σύνολο $V_i = \{(x, s) \mid s = i\}$ είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και από το Λήμμα 3.2.4 ανήκει στην $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Πάλι με εφαρμογή του τελευταίου λήμματος το σύνολο $C_i = B_i \cap V_i$ ανήκει επίσης στη $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (x, s) \in \textstyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i &\iff \exists i\, (x, s) \in C_i \\ &\iff \exists i\, (x \in B_i \;\&\; s = i) \\ &\iff x \in B_s \\ &\iff (x, s) \in B, \end{aligned}$$

δηλαδή $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$.

Αν $n = 1$ τότε κάθε C_i είναι ανοικτό σύνολο και άρα το B είναι επίσης ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων, δηλαδή $B \in \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1|\mathcal{X}$. Αν $n > 1$ τότε για κάθε i υπάρχει ακολουθία συνόλων $(C^i_j)_{j \in \mathbb{N}}$ από $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με

$$C_i = \textstyle\bigcup_{j \in \mathbb{N}} C^i_j.$$

Επομένως

$$B = \textstyle\bigcup_{i, j \in \mathbb{N}} C^i_j$$

και άρα το B είναι αριθμήσιμη ένωση $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, δηλαδή $B \in \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X}$. □

Πρόταση 3.2.7 (Ισοδύναμος ορισμός των κλάσεων $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$)**.** *Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*
$$\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_{n+1} = \exists^{\mathbb{N}} \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$$
και συνεπώς
$$\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_{n+1} = \forall^{\mathbb{N}} \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε προσωρινά τις κλάσεις
$$\begin{aligned}
\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^*_1 &= \text{η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων} = \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1\\
\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^*_1 &= \text{η κλάση όλων των κλειστών συνόλων} = \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_1\\
\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^*_{n+1} &= \exists^{\mathbb{N}} \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^*_n\\
\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^*_{n+1} &= \mathrm{c}\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^*_{n+1}.
\end{aligned}$$
Δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι
$$\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X} = \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^*_n|\mathcal{X} \quad \text{και} \quad \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n|\mathcal{X} = \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^*_n|\mathcal{X}.$$
(Προφανώς η τελευταία ισότητα προκύπτει από την προτελευταία παίρνοντας τα συμπληρώματα.)

Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι άμεσο από τον ορισμό. Θεωρούμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ έχουμε το ζητούμενο και δείχνουμε το ίδιο για το $n+1$.

Έστω $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^*_{n+1}$. Τότε υπάρχει $A \in \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^*_n|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ με $P = \exists^{\mathbb{N}} A$. Από την Επαγωγική Υπόθεση $A \in \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$. Εφαρμόζουμε την Παρατήρηση 3.2.5 για την κλάση $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ και έχουμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ το σύνολο
$$A_i = \{x \mid (x,i) \in A\}$$
ανήκει στην $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$. Επιπλέον
$$x \in P \iff \exists i\,(x,i) \in A \iff \exists i\, x \in A_i,$$
άρα $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Προκύπτει ότι το P ανήκει στη $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_{n+1}|\mathcal{X}$.

Αντίστροφα θεωρούμε ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_{n+1}$ και $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων της $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n|\mathcal{X}$ έτσι ώστε $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. Από το Λήμμα 3.2.6 το σύνολο
$$B = \{(x,i) \mid x \in B_i\}$$
ανήκει επίσης στην $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$. Από την Επαγωγική Υπόθεση $B \in \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^*_n|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$. Επιπλέον
$$x \in P \iff \exists i\, x \in B_i \iff \exists i\,(x,i) \in B$$
και άρα $P = \exists^{\mathbb{N}} B \in \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^*_{n+1}|\mathcal{X}$. □

Θεώρημα 3.2.8 (Οι Θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας των Borel κλάσεων πεπερασμένης τάξης)**.** *Οι κλάσεις $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$, $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ και $\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^0_n$, όπου $n \geqslant 1$, είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση καθώς και ως προς τους τελεστές $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigvee_{\leqslant}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$.*

Οι κλάσεις $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές

$\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathbb{N}}$ *και γενικότερα $\exists^Y$ όπου Y είναι **αριθμήσιμος** Πολωνικός χώρος.*

Οι κλάσεις $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές

$\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$ *και γενικότερα $\forall^Y$ όπου Y είναι **αριθμήσιμος** Πολωνικός χώρος.*

Οι κλάσεις $\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^0_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c.

Απόδειξη. Η κλειστότητα των κλάσεων ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς τους τελεστές $\vee$, & αποδείχθηκε στο Λήμμα 3.2.4. Η κλειστότητα ως προς τους τελεστές της πεπερασμένης ένωσης $\bigvee_{\leqslant}$ και τομής $\bigwedge_{\leqslant}$ προκύπτει από την κλειστότητα ως προς $\vee$ και & αντίστοιχα με επαγωγή στο πλήθος της πεπερασμένης ακολουθίας συνόλων που θεωρούμε.

Για την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\exists^{\leqslant}$ και $\forall^{\leqslant}$ θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τα σύνολα $P_i, Q_i, R_i \subseteq \mathcal{X}$ με

$$
\begin{aligned}
P_i &= \{x \in \mathcal{X} \mid (x,i) \in P\} \\
Q_i &= \textstyle\bigcup_{j \leqslant i} P_j \\
R_i &= \textstyle\bigcap_{j \leqslant i} P_j.
\end{aligned}
$$

Από την Παρατήρηση 3.2.5 κάθε P_i ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Από την κλειστότητα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς πεπερασμένη ένωση και πεπερασμένη τομή έχουμε ότι τα σύνολα Q_i, R_i ανήκουν επίσης στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Από το Λήμμα 3.2.6 τα σύνολα $Q, R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$
(x,i) \in Q \iff x \in Q_i \quad \text{και} \quad (x,i) \in R \iff x \in R_i
$$

ανήκουν στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Επιπλέον

$$
\begin{aligned}
(x,i) \in \exists^{\leqslant} P &\iff \exists j \leqslant i \, (x,j) \in P \\
&\iff \exists j \leqslant i \; x \in P_j \\
&\iff x \in Q_i \\
&\iff (x,i) \in Q.
\end{aligned}
$$

Άρα $\exists^{\leqslant} P = Q \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ και όμοια $\forall^{\leqslant} P = R \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τις επιπλέον ιδιότητες κλειστότητας της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Θεωρούμε αρχικά μια ακολουθία $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και δείχνουμε ότι η ένωση $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$ είναι ανοικτό σύνολο.

Αν $n = 1$ τότε τα P_i είναι ανοικτά σύνολα και συνεπώς το P είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων. Αν $n > 1$ τότε κάθε P_i είναι η ένωση μια ακολουθίας $(Q^i_j)_{j \in \mathbb{N}}$ από $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Επομένως

$$
P = \textstyle\bigcup_{i,j} Q^i_j
$$

και άρα το P είναι αριθμήσιμη ένωση ακολουθίας $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, δηλαδή $P \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X}$.

Το πιο πάνω δείχνει την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Για την κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ θεωρούμε $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και θέτουμε $P = \exists^{\mathbb{N}} Q$. Τότε

$$
\begin{aligned}
x \in P &\iff \exists i \, (x,i) \in Q \\
&\iff \exists i \; x \in Q_i
\end{aligned}
$$

όπου $Q_i = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,i) \in Q\} \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X}$ από την Παρατήρηση 3.2.5. Άρα $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X}$ από την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Για την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\exists^Y$ όπου Y είναι ένας αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος, θεωρούμε μια απαρίθμηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y$. Αφού το $\mathbb{N}$ θεωρείται με τη διακριτή τοπολογία η f είναι συνεχής. Για κάθε $Q \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n|(\mathcal{X} \times Y)$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
x \in \exists^Y Q &\iff \exists y \, (x,y) \in Q \\
&\iff \exists n \, (x, f(n)) \in Q
\end{aligned}
$$

και το σύνολο $\exists^Y Q$ ανήκει στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και συνεχή αντικατάσταση.

Οι ιδιότητες κλειστότητας της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ ως προς $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\forall^Y$, όπου Y είναι αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος προκύπτουν από τις αντίστοιχες της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ παίρνοντας τον τελεστή του συμπληρώματος. Προκύπτει ότι η $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ είναι επίσης κλειστή ως προς $\exists^{\leqslant}$ και $\forall^{\leqslant}$. Τέλος είναι σαφές ότι η $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η κλειστότητα ως προς $\exists^Y$ ή $\forall^Y$, όπου Y είναι ένας αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον Πολωνικό χώρο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ χωρίς να χρειαστεί να καταφύγουμε σε κάποια απαρίθμησή του όπως έχουμε κάνει στην επίλυση της Άσκησης ??. Δείτε για παράδειγμα την Άσκηση ??.

Παράδειγμα 3.2.9. Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$ και το σύνολο

$$P = \{\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x\big) \in \mathcal{X} \mid x_n \to x\}.$$

Δείχνουμε ότι το P είναι $\boldsymbol{\Pi}^0_3$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x\big) \in P &\iff \forall k\, \exists n_0\, \forall n \ \geqslant n_0\, |x_n - x| \leqslant 2^{-k} \\
&\iff \forall k\, \exists n_0\, \forall n\, (n < n_0 \ \vee \ |x_n - x| \leqslant 2^{-k}).
\end{aligned}$$

Με χρήση του διαγραμματικού συλλογισμού εκτιμούμε:

$$\underbrace{\forall k \ \underbrace{\exists n_0 \ \underbrace{\forall n \ \underbrace{(\underbrace{n < n_0}_{\boldsymbol{\Pi}^0_1} \ \vee \ \underbrace{|x_n - x| \leqslant 2^{-k}}_{\boldsymbol{\Pi}^0_1})}_{\boldsymbol{\Pi}^0_1 \text{ κλειστότητα ως προς } \vee}}_{\forall^{\mathbb{N}}\boldsymbol{\Pi}^0_1 = \boldsymbol{\Pi}^0_1}}_{\exists^{\mathbb{N}}\boldsymbol{\Pi}^0_1 = \boldsymbol{\Sigma}^0_2}}_{\forall^{\mathbb{N}}\boldsymbol{\Sigma}^0_2 = \boldsymbol{\Pi}^0_3}.$$

Πιο πάνω έχουμε χρησιμοποιήσει την Πρόταση 3.2.7 (ισοδύναμος ορισμός των $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ με βάση τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$) καθώς και την κλειστότητα της κλάσης $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ ως προς $\vee$ και συνεχή αντικατάσταση (Θεώρημα 3.2.8).

Δίνουμε κάποιες εξηγήσεις. Αυστηρά θεωρούμε τα σύνολα A, B με

$$\begin{aligned}
\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in A &\iff n < n_0 \\
&\iff f\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) > 0 \\
&\iff \big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in f^{-1}[(0,\infty) \cap \mathbb{N}] \\
\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in B &\iff |x_n - x| \leqslant 2^{-k} \\
&\iff g\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \geqslant 0 \\
&\iff \big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in g^{-1}[[0,\infty)],
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
f\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) &= n - n_0 \\
g\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) &= |x_n - x| - 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι οι πιο πάνω συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς. Επειδή τα σύνολα $(0,\infty) \cap \mathbb{N}$ και $[0,\infty)$ είναι κλειστά υποσύνολα των $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$ αντίστοιχα, έχουμε από την κλειστότητα της $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ ως προς συνεχή αντικατάσταση ότι τα σύνολα A, B είναι κλειστά.

Επιπλέον από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$P = \forall^{\mathbb{N}}\, \exists^{\mathbb{N}}\, \forall^{\mathbb{N}}\, A \vee B$$

Επομένως το P είναι $\boldsymbol{\Pi}^0_3$ σύνολο.

Όπως έχουμε εξηγήσει στην Ενότητα 3.1 (δείτε τα Παραδείγματα 3.1.7 και 3.1.8) δεν θα κάνουμε συνήθως αναφορά στις πιο πάνω συναρτήσεις f, g ούτε στα ενδιάμεσα σύνολα A, B, αλλά θα εφαρμόζουμε κατευθείαν τον πιο πάνω διαγραμματικό συλλογισμό.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.10. Για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1} = \bigwedge\nolimits_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n = \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n.$$

Άσκηση 3.2.11. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ ένα $n \geqslant 1$ και μια ακολουθία $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$. Αν για κάθε i υπάρχει $n_i \leqslant n$ με $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n_i}$ τότε το σύνολο $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Συμπεράνετε ότι

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} = \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} \left(\bigcup\nolimits_{k\leqslant n} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_k\right).$$

Άσκηση 3.2.12. Κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ σύνολο μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση μιας *αύξουσας* ακολουθίας $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ συνόλων.

Άσκηση 3.2.13. Το Λήμμα 3.2.6 αποτυγχάνει για την κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ αν αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ με τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y} = [0,1]$.

Μάλιστα για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει οικογένεια $(V_y)_{y\in[0,1]}$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ έτσι ώστε το σύνολο $V \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ με

$$(x,y) \in V \iff x \in V_y$$

δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Άσκηση 3.2.14. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_i$, $i \in \mathbb{N}$ και έναν φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$. Τότε για κάθε ακολουθία συνόλων $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X}_i$, όπου $i \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}$ υποσύνολο του χώρου γινόμενο $\mathcal{X} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_i$.

Επίσης για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_0 \times \cdots \times A_m$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}_0 \times \cdots \times \mathcal{X}_m$.

Διατυπώστε τα ανάλογα συμπεράσματα για ακολουθία συνόλων $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n|\mathcal{X}_i$.

3.3. Οι προβολικές κλάσεις συνόλων

Ορισμός 3.3.1 (Ορισμός των προβολικών κλάσεων)**.** Ορίζουμε με αναδρομή στο $n \geqslant 1$ τις εξής κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους:

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1 &= \exists^{\mathcal{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1 \\ &= \text{οι προβολές κλειστών } F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \text{ υπεράνω του } \mathcal{X}, \\ &\quad\ \text{όπου } \mathcal{X} \text{ Πολωνικός χώρος} \\ \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1 &= \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1 = \text{τα συμπληρώματα των } \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1 \text{ συνόλων}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} &= \exists^{\mathcal{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n \\ &= \text{οι προβολές } \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n \text{ συνόλων } F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \text{ υπεράνω του } \mathcal{X}, \\ &\quad\ \text{όπου } \mathcal{X} \text{ Πολωνικός χώρος} \\ \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1} &= \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} \\ &= \text{τα συμπληρώματα των } \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} \text{ συνόλων.}\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ (ή $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$) σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1$ (ή $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ αντίστοιχα) σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P \iff \exists\alpha\, (x,\alpha) \in Q.$$

Παίρνοντας τα συμπληρώματα έχουμε ότι ένα $P_* \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ (ή $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}$) σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ (ή $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ αντίστοιχα) σύνολο $Q_* \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P_* \iff \forall\alpha\, (x,\alpha) \in Q_*.$$

Είναι αρκετά βολικό να θέσουμε

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_0 = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1 \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_0 = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$$

έτσι που

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n = \exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n = \forall^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$$

για κάθε $n \geqslant 1$.

Τέλος θέτουμε

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n \cap \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n.$$

Είναι άμεσο ότι ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ αν και μόνο αν τα σύνολα P και $\mathcal{X} \setminus P$ ανήκουν στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ λέγονται **προβολικές** ή αλλιώς **κλάσεις του Lusin** ενώ οι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ είναι οι **δυϊκές** (dual) και **αμφίσημες** (ambiguous) αντίστοιχα προβολικές κλάσεις.

Η συλλογή των προηγούμενων κλάσεων ονομάζεται **ιεραρχία των προβολικών συνόλων**.

Τα σύνολα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ ονομάζονται **αναλυτικά** (analytic) και αυτά της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ **συναλυτικά** (coanalytic). Τα σύνολα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ ονομάζονται **αμφι-αναλυτικά** (bi-analytic).

Λήμμα 3.3.2. *Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.4 παρατηρούμε ότι η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση. (Γενικότερα μια κλάση Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση αν και μόνο αν η $c\Gamma$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.)

Επιπλέον η κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι άμεση από την ίδια ιδιότητα των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν μια κλάση Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση τότε και η $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$ έχει την ίδια ιδιότητα. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και ένα $P \subseteq \mathcal{Y}$ που ανήκει στη $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$, όπου η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο $f^{-1}[P]$ ανήκει στη $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$.

Υπάρχει $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη Γ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[P] &\iff f(x) \in P \\ &\iff \exists \alpha \, (f(x), \alpha) \in Q \\ &\iff \exists \alpha \, h(x, \alpha) \in Q \\ &\iff \exists \alpha (x, \alpha) \in h^{-1}[Q], \end{aligned}$$

όπου $h(x, \alpha) = (f(x), \alpha)$. Η h είναι συνεχής συνάρτηση και από την υπόθεσή μας για τη Γ το σύνολο $h^{-1}[Q]$ ανήκει στη Γ. Από τις πιο πάνω ισοδυναμίες προκύπτει $f^{-1}[P] = \exists^{\mathcal{N}} h^{-1}[Q]$ και συνεπώς το $f^{-1}[P]$ ανήκει στη Γ.

Τέλος δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Για $n = 1$ έχουμε ότι η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1 = \exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση από τα πιο πάνω και από το ότι η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1$ έχει αυτή την ιδιότητα.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Επομένως και η $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ έχει την ίδια ιδιότητα και από τα πιο πάνω το ίδιο ισχύει και για την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$. □

Πρόταση 3.3.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n | \mathcal{X} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_{n+1} | \mathcal{X}$$

και επομένως ισχύει επίσης

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n|\mathcal{X} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_{n+1}|\mathcal{X}.$$

Απόδειξη. Προφανώς ο δεύτερος εγκλεισμός προκύπτει από τον πρώτο παίρνοντας το συμπλήρωμα του συνόλου. Για τον πρώτο εγκλεισμό δείχνουμε αρχικά ότι *για κάθε Πολωνικό χώρο* $\mathcal{X}$ κάθε κλειστό υποσύνολο F του $\mathcal{X}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$.

Αρχικά δείχνουμε τη συμπερίληψη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n|\mathcal{X} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}|\mathcal{X}$. Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ και $Q \subseteq \times\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Θέτουμε

$$R = Q \times \mathcal{N}$$

και ισχυριζόμαστε ότι το R είναι επίσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ σύνολο. Για κάθε $(x, \alpha, \beta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ έχουμε

$$(x, \alpha, \beta) \in R \iff (x, \alpha) \in Q$$

και το R ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς συνεχή αντικατάσταση, δείτε το Λήμμα 3.3.2.

Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists \alpha\, (x, \alpha) \in Q \\ &\iff \forall \beta\, \exists \alpha\, (x, \alpha, \beta) \in R. \end{aligned}$$

Άρα το P ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathcal{N}} \exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \forall^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι κάθε κλειστό σύνολο είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ υποσύνολο του ίδιου χώρου. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $F \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό.

Το F, ως κλειστό, είναι επίσης G_δ σύνολο επομένως υπάρχει ακολουθία $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Θεωρούμε το σύνολο

$$V = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid x \in V_{\alpha(0)}\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το V είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in F &\iff \forall n\, x \in V_n \\ &\iff \forall \alpha\, x \in V_{\alpha(0)} \\ &\iff \forall \alpha\, (x, \alpha) \in V. \end{aligned}$$

Συνεπώς το F είναι $\forall^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ σύνολο.

Έπειτα δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι *για κάθε Πολωνικό χώρο* $\mathcal{X}$ ισχύει $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n|\mathcal{X} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}|\mathcal{X}$. Με βάση τα πιο πάνω έχουμε το ζητούμενο.

Για $n = 1$, θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$. Τότε υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} F$.

Δείξαμε ότι το F ως κλειστό είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Επομένως το P είναι $\exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1 = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_2$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ και κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ ισχύει

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n|\mathcal{X} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}|\mathcal{X}, \quad \text{ισοδύναμα} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n|\mathcal{X} \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}|\mathcal{X}.$$

Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$. Δείχνουμε ότι το P είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+2}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από τον ορισμό υπάρχει ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Από την Επαγωγική Υπόθεση εφαρμοσμένη στον χώρο $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ το Q είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}$ σύνολο. Συνεπώς το P είναι $\exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+2}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. □

Θεώρημα 3.3.4 (Ιδιότητες Κλειστότητας των κλάσεων του Lusin). *Οι κλάσεις* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ *και* $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ *είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση, τους τελεστές* $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}, \forall^{\leqslant}$, , *όπως επίσης τους τελεστές της αριθμήσιμης διάζευξης* $\bigvee_{\mathbb{N}}$ *και της αριθμήσιμης σύζευξης* $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.

Οι κλάσεις $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$ και οι $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ ως προς τον $\forall^{\mathcal{Y}}$ για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$. Οι κλάσεις $\undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c.

Απόδειξη. Δείτε τις σημειώσεις του μαθήματος. ▫

Πόρισμα 3.3.5. *Για κάθε $n \geqslant 1$ η κλάση $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ αποτελείται ακριβώς από τις συνεχείς εικόνες $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλων.*

Απόδειξη. Κάθε $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο είναι προβολή (και επομένως είναι συνεχής εικόνα) ενός $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλου, επομένως πρέπει να δείξουμε το αντίστροφο. Έστω $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ συνεχής και $Q \subseteq \mathcal{X}$ το οποίο είναι $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$. Πρέπει να δείξουμε ότι η εικόνα $f[Q]$ είναι $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο. Πράγματι, για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in f[Q] &\iff \exists x\, (x \in Q \,\&\, f(x) = y) \\ &\iff \exists x\, (x \in Q \,\&\, (x, y) \in Graph(f)) \end{aligned}$$

Το γράφημα της f είναι κλειστό σύνολο και επομένως από την Πρόταση 3.3.3 (και την απόδειξή της) είναι $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ σύνολο. Από το Θεώρημα 3.3.4 (Ιδιότητες Κλειστότητας των κλάσεων του Lusin) η κλάση $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ είναι κλειστή ως προς &. Στην περίπτωση όπου $n = 1$ αυτό προκύπτει από τις ιδιότητες κλειστότητας των κλειστών συνόλων.

Με βάση την τελευταία από τις πιο πάνω ισοδυναμίες καταλήγουμε ότι $f[Q] = \exists^{\mathcal{X}} R$ όπου το R είναι ένα $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ υποσύνολο του $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}$. Συνεπώς το $f[Q]$ είναι $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. ▫

Πόρισμα 3.3.6. *Η συνεχής εικόνα $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ συνόλου είναι $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 3.3.5 το δοσμένο $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο είναι συνεχής εικόνα $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλου. Εφόσον η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση, προκύπτει ότι η συνεχής εικόνα του δοσμένου $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ συνόλου είναι συνεχής εικόνα $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλου, και πάλι από το Πόρισμα 3.3.5 είναι $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 3.3.7. Κάθε αριθμητική κλάση $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ περιέχεται στην $\undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1$.

Άσκηση 3.3.8. Κάθε κλάση $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες.

Άσκηση 3.3.9. Έστω Γ οποιαδήποτε από τις κλάσεις $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^i_n$ και $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^i_n$, $i = 0, 1$, $n \geqslant 1$. Τότε για κάθε ακολουθία $(P_s)_{s \in \mathbb{N}}$ από υποσύνολα του ίδιου Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην Γ το σύνολο

$$P = \{(x, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in P_s\}$$

ανήκει στην $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$.

Αντιστρόφως για κάθε $P \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ και κάθε $s \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$P_s = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, s) \in P\}$$

ανήκει στην Γ.

Συμπεράνετε ότι ο ισχυρισμός πως η Γ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$, όπου $\Gamma = \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n, \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n, \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$.

Όμοια ο ισχυρισμός πως η Γ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$, όπου $\Gamma = \undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_n, \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n, \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$.

Άσκηση 3.3.10. Θεωρούμε μια κλάση συνόλων Γ που περιέχει τα κλειστά σύνολα, και είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση όπως επίσης ως προς τους τελεστές $\vee$, &. Τότε η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$ αν και μόνο αν είναι κλειστή ως προς τις συνεχείς εικόνες.

Συμπεράνετε ότι ο ισχυρισμός πως η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες, όπου $\Gamma = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

3.4. Παραμετρικοποίηση και Καθολικά Σύνολα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Borel σύνολα

4.1. Θεμελιώδεις ιδιότητες

Ορισμός 4.1.1. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ είναι σ**-άλγρεβρα** στο X αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

(i) Τα σύνολα $\varnothing$, X ανήκουν στην $\mathcal{A}$.
(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Μερικά τετριμμένα παραδείγματα σ-αλγεβρών στο X είναι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ και το $\{\varnothing, X\}$.

Όπως είναι γνωστό αν έχουμε ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{F}$ από σ-άλγεβρες στο ίδιο σύνολο X τότε η τομή

$$\bigcap \mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}\ A \in \mathcal{A}\}$$

είναι επίσης σ-άλγεβρα στο X.

Ορισμός 4.1.2. Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X και το σύνολο $\mathcal{F}$ όλων των σ-αλγεβρών στο X που περιέχουν τα ανοικτά υποσύνολα του X, δηλαδή

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα στο } X \text{ και για κάθε ανοικτό } V \subseteq X \text{ έχουμε } V \in \mathcal{A}\}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$ και συνεπώς $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}|X$ των **Borel υποσυνόλων του** X είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B}|X = \bigcap \mathcal{F}.$$

Ένα υποσύνολο του X ονομάζεται **Borel** αν ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}|X$.

Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι η οικογένεια $\mathcal{B}|X$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Η $\mathcal{B}|X$ είναι σ-άλγεβρα και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X περιέχεται στην $\mathcal{B}|X$, δηλαδή η $\mathcal{B}|X$ είναι στοιχείο της πιο πάνω $\mathcal{F}$.
(2) Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$ που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X τότε $\mathcal{B}|X \subseteq \mathcal{A}$.

Με άλλα λόγια η $\mathcal{B}|X$ είναι *η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά σύνολα*. Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}$ την **κλάση** όλων των Borel συνόλων σε *μετρικούς* χώρους.

Μερικά *παραδείγματα Borel συνόλων* είναι όλα τα ανοικτά σύνολα και τα συμπληρώματά τους δηλαδή τα κλειστά σύνολα. Τα F_σ σύνολα είναι επίσης Borel ως αριθμήσιμη ένωση Borel συνόλων και τα G_δ είναι ως συμπληρώματα F_σ συνόλων, τα οποία είναι Borel.

Πρόταση 4.1.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει*

$$\undertilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n|\mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}|\mathcal{X},$$

δηλαδή κάθε $\undertilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι και Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $n \geqslant 1$. □

Ο ορισμός των Borel συνόλων μας υπαγορεύει μια **θεμελιώδη μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ιδιότητες των Borel συνόλων. Συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε μια πρόταση της μορφής

$$\text{για κάθε Borel σύνολο } B \subseteq \mathcal{X} \text{ ισχύει η ιδιότητα } Q.$$

Τότε θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathcal{X} \mid \text{το } A \text{ έχει την ιδιότητα } Q\}.$$

Αν δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ τότε θα έχουμε $\mathcal{B}|\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ και επομένως θα έχουμε αποδείξει την πιο πάνω πρόταση. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής αυτής της μεθόδου είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.1.4. *Η κλάση των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μετρικούς χώρος X, Y και μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$. Θα δείξουμε ότι για κάθε Borel $A \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[A]$ είναι Borel υποσύνολο του X. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}[A] \in \mathcal{B}|X\}$$

και δείχνουμε ότι είναι σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολο του Y. Εφόσον η $\mathcal{B}|X$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y, προκύπτει από το προηγούμενο ότι $\mathcal{B}|X \subseteq \mathcal{A}$ που είναι και το ζητούμενο.

Θεωρούμε ένα ανοικτό $V \subseteq Y$. Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[V]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και συνεπώς είναι Borel σύνολο. Άρα $V \in \mathcal{A}$ και η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $\varnothing, Y \in \mathcal{A}$ γιατί τα σύνολα $\varnothing, Y$ είναι ανοικτά. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε

$$f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A] \in \mathcal{B}|X$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $f^{-1}[A] \in \mathcal{B}|X$ και ότι η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του X είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα στο X. ◻

Θεώρημα 4.1.5 (Οι Θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας της κλάσης των Borel συνόλων)**.** *Η κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων είναι κλειστή*

(i) *ως προς συνεχή αντικατάσταση,*

(ii) *ως προς τους τελεστές $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigvee_{\leqslant}$, $\bigwedge_{\leqslant}$, c_X, όπου X είναι μετρικός χώρος, και*

(iii) *ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathbb{N}}$, $\exists^{Y}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\forall^{Y}$, όπου Y είναι **αριθμήσιμος** Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι το Λήμμα 4.1.4. Η κλειστότητα ως προς $\vee$ και $\bigvee_{\leqslant}$ είναι άμεση από την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Όμοια η κλειστότητα ως προς & και $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι άμεση από την κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.

Η κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ είναι σαφής γιατί για κάθε μετρικό χώρο X η $\mathcal{B}|X$ είναι σ-άλγεβρα. Για την κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X και μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Borel υποσυνόλων του X. Παρατηρούμε ότι

$$X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \in \mathcal{B}|X$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $A_n \in \mathcal{B}|X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η $\mathcal{B}|X$ είναι σ-άλγεβρα. Αφού $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}|X$ έχουμε και ότι $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}|X$.

◻

Πόρισμα 4.1.6. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ έχουμε*

$$\mathcal{B}|\mathcal{X} \subseteq \underset{\sim}{\boldsymbol{\Delta}}^1_1|\mathcal{X}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.3.4 (και την απόδειξή της Πρότασης 3.3.3) η οικογένεια $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1|\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. □

Πρόταση 4.1.7. *Αν X είναι μετρικός χώρος και το Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X τότε ένα $A \subseteq Y$ είναι Borel στον μετρικό χώρο Y αν και μόνο αν είναι της μορφής $B \cap Y$ όπου το B είναι Borel στον X. Δηλαδή*

$$\mathcal{B}|Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}|X\}.$$

Ειδικότερα αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X και το $A \subseteq Y$ είναι Borel στον Y τότε το A είναι Borel στον X.

Απόδειξη. Για ευκολία θέτουμε προσωρινά

$$\mathcal{B}^*|Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}|X\}.$$

Δείχνουμε αρχικά ότι $\mathcal{B}|Y \subseteq \mathcal{B}^*|Y$. Αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{B}^*|Y$ είναι σ-άλγεβρα στο Y που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Έστω $V \subseteq Y$ ανοικτό στο Y. Τότε όπως είναι γνωστό υπάρχει $U \subseteq X$ που είναι ανοικτό στο X ώστε $V = U \cap Y$. Τότε $U \in \mathcal{B}|X$ και άρα $V \in \mathcal{B}^*|Y$, δηλαδή η τελευταία οικογένεια περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Ειδικότερα έχουμε $\varnothing, Y \in \mathcal{B}^*|Y$ γιατί τα σύνολα $\varnothing, Y$ είναι ανοικτά. Για τις άλλες δύο ιδιότητες παρατηρούμε ότι

$$Y \setminus (B \cap Y) = (X \setminus B) \cap Y \tag{4.1}$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap Y) = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \cap Y. \tag{4.2}$$

Επομένως αν $A = B \cap Y \in \mathcal{B}^*|Y$, όπου $B \in \mathcal{B}|X$, τότε $X \setminus B \in \mathcal{B}|X$ και με χρήση της (4.1)

$$Y \setminus A = Y \setminus (B \cap Y) = (X \setminus B) \cap Y \in \mathcal{B}|Y.$$

Με χρήση της (4.2) δείχνει όμοια κανείς ότι η $\mathcal{B}^*|Y$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του Y. Προκύπτει ότι η $\mathcal{B}^*|Y$ είναι σ-άλγεβρα στο Y που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Για να δείξουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{B}^*|Y \subseteq \mathcal{B}|Y$ θεωρούμε την οικογένεια υποσυνόλων του $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq X \mid B \cap Y \in \mathcal{B}|Y\}.$$

Αν δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X τότε θα έχουμε $\mathcal{B}|X \subseteq \mathcal{A}$ και συνεπώς για κάθε $B \in \mathcal{B}|X$ θα ισχύει $B \cap Y\mathcal{B}|Y$, δηλαδή $\mathcal{B}^*|Y \subseteq \mathcal{B}|Y$.

Για να δείξουμε ότι η πιο πάνω $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά σύνολα, θεωρούμε $V \subseteq X$ ανοικτό. Τότε το $V \cap Y$ είναι ανοικτό στο Y και ειδικότερα $V \cap Y \in \mathcal{B}|Y$. Προκύπτει ότι $V \in \mathcal{A}$.

Όπως προηγουμένως προκύπτει επίσης ότι $\varnothing, X \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε από την (4.1),

$$(X \setminus B) \cap Y = Y \setminus (B \cap Y) \in \mathcal{B}|Y,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $B \cap Y \in \mathcal{B}|Y$. Προκύπτει ότι $X \setminus B \in \mathcal{A}$.

Όμοια με χρήση της (4.2) δείχνει κανείς ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του X.

Καταλήγουμε ότι $\mathcal{B}|Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}|X\}$. Τέλος αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X και το A είναι Borel υποσύνολο του Y τότε $A = B \cap Y$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}|X$. Άρα το A είναι Borel υποσύνολο του X από την κλειστότητα της $\mathcal{B}|X$ ως προς &. □

4.2. Borel-μετρησιμότητα

Ορισμός 4.2.1. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X και Y. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι **Borel-μετρήσιμη** αν αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ έχουμε $f^{-1}[U] \in \mathcal{B}|X$.

Προφανώς κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι Borel-μετρήσιμη γιατί για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι ανοικτό και συνεπώς Borel.

Ένας ισομορφισμός $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ είναι **Borel ισομορφισμός** αν οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $f^{-1} : Y \to X$ είναι Borel-μετρήσιμες.

Οι μετρικοί χώροι X και Y είναι **Borel ισομορφικοί** αν υπάρχει Borel ισομορφισμός $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$.

Οι Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται ως εξής.

Πρόταση 4.2.2. *Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Τα εξής είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η f **αντιστρέφει τα ανοικτά** υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή η f είναι Borel-μετρήσιμη.*

(2) *Η f **αντιστρέφει τα Borel** υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[B]$. (Μερικές φορές ο ορισμός των Borel-μετρησίμων συναρτήσεων δίνεται με αυτή τη συνθήκη.)*

Απόδειξη. Εργασία. ▫

Ορισμός 4.2.3. Θεωρούμε δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και έναν μονομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$. Η f λέγεται **καλός Borel μονομορφισμός** αν

(i) είναι Borel-μετρήσιμη,

(ii) η εικόνα $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$, και

(iii) η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ είναι Borel μετρήσιμη. (Θεωρούμε το $f[\mathcal{X}]$ ως μετρικό υπόχωρο του $\mathcal{Y}$.)

Σχόλιο. Είναι γνωστό ότι κάθε ένα-προς-ένα Borel-μετρήσιμη συνάρτηση ικανοποιεί όλες τις πιο πάνω ιδιότητες, δηλαδή είναι καλός Borel-μονομορφισμός. Αυτό όμως είναι συνέπεια ενός δύσκολου θεωρήματος, το οποίο δεν παίρνουμε δεδομένο στο παρόν στάδιο.

Παρατήρηση 4.2.4. Για κάθε καλό Borel-μονομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ και κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$ το σύνολο $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$f[B] = g^{-1}[B] \quad \text{όπου } g = f^{-1} : f[\mathcal{X}] \rightarrowtail \mathcal{X}.$$

Επειδή η g είναι Borel-μετρήσιμη από την Πρόταση 4.2.2 το σύνολο $g^{-1}[B] = f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του χώρου $f[\mathcal{X}]$. Επειδή η f είναι καλός Borel-ισομορφισμός το $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ και από την Πρόταση 4.1.7 το $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. ▫

Παρατήρηση 4.2.5. Η σύνθεση καλών Borel-μονομορφισμών είναι Borel μονομορφισμός.

Απόδειξη. Θεωρούμε καλούς Borel μονομορφισμούς $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ και $g : \mathcal{Y} \rightarrowtail \mathcal{Z}$. Οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ είναι Borel-μετρήσιμες από την Άσκηση 4.2.16.

Αφού το $\mathcal{X}$ είναι προφανώς Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και η f είναι καλός Borel μονομορφισμός έχουμε ότι το σύνολο $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. Εφόσον η g είναι επίσης καλός Borel μονορφισμός προκύπτει από την Παρατήρηση ότι η εικόνα

$$(g \circ f)[\mathcal{X}] = g[f[\mathcal{X}]]$$

είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Z}$. □

Λήμμα 4.2.6. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$. Δείχνουμε ότι η τ είναι επίσης καλός Borel-μονομορφισμός. Επειδή η τ είναι συνεχής είναι και Borel-μετρήσιμη. Επιπλέον το σύνολο $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι συμπαγές (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς) και άρα είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Ειδικότερα το $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Τέλος η αντίστροφη συνάρτηση $\tau^{-1} : \tau[2^{\mathbb{N}}] \to 2^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής και άρα Borel-μετρήσιμη. (Θεωρούμε γνωστό ότι αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και η $f : X \rightarrowtail Y$ είναι συνεχής και ένα-προς-ένα τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f[X] \to X$ είναι συνεχής.) □

Λήμμα 4.2.7. *Υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $\rho : \mathcal{N} \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}}$ για την οποία η συνάρτηση $f^{-1} : f[\mathcal{N}] \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}}$ να είναι συνεχής και το σύνολο $f[\mathcal{N}]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_2$ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Εργασία. □

Λήμμα 4.2.8. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός $f : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho : \mathcal{N} \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}}$ όπως στο 4.2.7. Επειδή κάθε συνεχής συνάρτηση είναι Borel-μετρήσιμη και τα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_2$ σύνολα είναι Borel προκύπτει ότι η ρ είναι καλός Borel μονομορφισμός.

Από το Λήμμα 4.2.7 υπάρχει καλός Borel μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ και από την Παρατήρηση 4.2.5 η σύνθεση

$$f = \tau \circ \rho : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{X}$$

είναι καλός Borel μονομορφισμός. □

Λήμμα 4.2.9. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός $\tau : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$ και ένα αριθμήσιμο $D = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\Lambda\} \mapsto x_u \in \mathcal{X}$$

που ορίζεται ως εξής:

$$x_{(k)} = r_k \quad \text{και} \quad x_{u*(k)} = \begin{cases} r_k, \text{ αν } d(r_k, x_u) < 2^{-(|u|+1)} \\ x_u, \text{ αν } d(r_k, x_u) \geqslant 2^{-(|u|+1)} \end{cases}$$

Όπως έχουμε δει στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.5 καθώς και στην επακόλουθη Παρατήρηση 2.3.6 η συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n}$$

είναι συνεχής επιμορφισμός και η συνάρτηση

$$\tau : \mathcal{X} \to \mathcal{N} : \tau(x)(n) = \text{ο ελάχιστος } k \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+2)}$$

είναι μονομορφισμός που ικανοποιεί

$$\pi(\tau(x)) = x,\ x \in \mathcal{X} \quad \text{και} \quad \tau(\pi(\alpha)) = \alpha,\ \alpha \in \tau[\mathcal{X}].$$

Δείχνουμε ότι η τ είναι καλός Borel μονομορφισμός. Αρχικά θεωρούμε την

$$\tau^{-1} : \tau[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$$

και παρατηρούμε ότι για κάθε $\alpha = \tau(x) \in \tau[\mathcal{X}]$ ισχύει $\tau^{-1}(\alpha) = x = \pi(\alpha)$, δηλαδή $\tau^{-1} = \pi|\tau[\mathcal{X}]$. Αφού η π είναι συνεχής έπεται ότι και η τ^{-1} είναι συνεχής.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η τ αντιστρέφει τα ανοικτά σύνολα του $\mathcal{N}$ σε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$. Αφού τα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ σύνολα είναι Borel προκύπτει από αυτό ότι η τ είναι Borel-μετρήσιμη. Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\tau(x) \in \mathcal{N}_u &\iff u \sqsubseteq \tau(x)\\
&\iff \forall n < |u|\; u(n) = \tau(x)(n)\\
&\iff \forall n < |u|\; u(n) = \text{ ο ελάχιστος } k \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+2)}\\
&\iff \forall n < |u|\; (d(r_{u(n)}, x) < 2^{-(n+2)} \;\&\; \forall t < u(n)\; d(r_t, x) \geqslant 2^{-(n+2)}).
\end{aligned}$$

Προκύπτει ότι το σύνολο $\tau^{-1}[\mathcal{N}_u]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_2$ επομένως και $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Επειδή κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι ένωση συνόλων της μορφής $\mathcal{N}_u$ για κάποια $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έχουμε από την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ ως προς τον τελεστή της αριθμήσιμης ένωσης ότι η τ αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$.

Τέλος αναγνωρίζουμε το σύνολο $\tau[\mathcal{X}]$. Όπως είδαμε πιο πάνω, το $\pi(\alpha)$ είναι το μοναδικό $x \in \mathcal{X}$ με $\alpha = \tau(x)$ για κάθε $\alpha \in \tau[\mathcal{X}]$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\alpha \in \tau[\mathcal{X}] &\iff \alpha = \tau(\pi(\alpha))\\
&\iff \forall n\; \alpha(n) = \tau(\pi(\alpha))(n)\\
&\iff \forall n\; \alpha(n) = \text{ ο ελάχιστος } k \text{ με } d(r_k, \pi(\alpha)) < 2^{-(n+2)}\\
&\iff \forall n\; (d(\pi(\alpha), r_{\alpha(n)}) < 2^{-(n+2)} \& \;\forall t < \alpha(n)\; d(\pi(\alpha), r_t) \geqslant 2^{-(n+2)}.
\end{aligned}$$

Το πιο πάνω δείχνει ότι το $\tau[\mathcal{X}]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_2$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$. □

Θεώρημα 4.2.10 (Schröder-Bernstein για καλούς Borel μονομορφισμούς)**.** *Για κάθε δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αν υπάρχουν καλοί Borel μονομορφισμοί*

$$f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y} \quad g : \mathcal{Y} \rightarrowtail \mathcal{X}$$

τότε υπάρχει Borel ισομορφισμός $h : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{Y}$.

Απόδειξη. (Α. Τσαρπαλιάς) Εργασία. □

Θεώρημα 4.2.11. *Κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος είναι Borel-ισομορφικός με τον χώρο του Baire.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Από τα Λήμματα 4.2.9 και 4.2.9 υπάρχουν καλοί Borel μονομορφισμοί $f : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{X}$ και $\tau : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{N}$. Επομένως από το Θεώρημα 4.2.10 υπάρχει Borel ισομορφισμός $h : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{X}$. □

Πόρισμα 4.2.12. *Κάθε δύο υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι είναι Borel ισομορφικοί.*

Απόδειξη. Αν $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι τότε από το Θεώρημα 4.2.11 υπάρχουν Borel ισομορφισμοί

$$f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{N} \quad \text{και} \quad g : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{Y}.$$

Είναι άμεσο από την Άσκηση 4.2.16 ότι η σύνθεση $g \circ f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{Y}$ είναι Borel ισομορφισμός.

□

Ασκήσεις

Η έννοια της σ-άλγεβρας επιδέχεται διάφορους χαρακτηρισμούς. Δίνουμε έναν από τους πιο χρήσιμους.

Άσκηση 4.2.13. Για κάθε μετρικό χώρο X και κάθε οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(1) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα.
(2) Η $\mathcal{A}$ περιέχει τα σύνολα $\emptyset, X$, είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα και ως προς τις αριθμήσιμες τομές.

Άσκηση 4.2.14 (Χαρακτηρισμοί οικογένειας Borel συνόλων)**.** Για κάθε μετρικό χώρο X και κάθε οικογένεια $\mathcal{A}$ από υποσύνολα του X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(1) Η $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του X.
(2) Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του X.
(3) Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη οικογένεια από υποσύνολα του X που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X και είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις καθώς και τις αριθμήσιμες τομές.
(4) Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη οικογένεια από υποσύνολα του X που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του X και είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις καθώς και τις αριθμήσιμες τομές.

Άσκηση 4.2.15. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y, Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2 : X \to Y$ και ένα Borel σύνολο $B \subseteq X$. Τότε η συνάρτηση $f : X \to Y$ με

$$\begin{cases} f_1(x), & x \in B, \\ f_2(x), & x \notin B, \end{cases}$$

είναι Borel-μετρήσιμη.

Άσκηση 4.2.16. Η σύνθεση Borel-μετρησίμων συναρτήσεων είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Ειδικότερα η σύνθεση μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης με μία συνεχή είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.

Άσκηση 4.2.17. Για κάθε ακολουθία $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ από μετρικούς χώρους και κάθε ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $B_n \in \mathcal{B}|X_n$, το γινόμενο $\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$ είναι Borel υποσύνολο του $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Όμοια για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $B_0, \dots, B_n$ με $B_i \in \mathcal{B}|X_i$ για $i = 0, \dots, n$ το γινόμενο $B_0 \times \cdots \times B_n$ είναι Borel υποσύνολο του $X_0 \times \cdots \times X_n$.

Άσκηση 4.2.18. Θεωρούμε μετρικούς χώρους (X, d), (Y_n, ρ_n), $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε συνάρτηση

$$f : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n : f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$$

η f είναι Borel-μετρήσιμη αν και μόνο αν κάθε συνάρτηση f_n είναι Borel-μετρήσιμη.

Όμοια για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε συνάρτηση

$$f : X \to Y_0 \times \cdots \times Y_n : f(x) = (f_0(x), \dots, f_n(x))$$

η f είναι Borel-μετρήσιμη αν και μόνο αν οι $f_0, \dots, f_n$ είναι Borel-μετρήσιμες.

Άσκηση 4.2.19. Για κάθε μετρικό χώρο X και κάθε Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : X \to \mathbb{R}$, οι συναρτήσεις

$$f + g,\ f \cdot g,\ |f|,\ \lambda \cdot f,\ (\lambda \in \mathbb{R}),\ \max\{f + g\},\ \min\{f + g\},$$

είναι Borel-μετρήσιμες.

4.3. Τα Θεωρήματα Διαχωρισμού των Lusin και Suslin

Ορισμός 4.3.1. Θεωρούμε σύνολα $A, B \subseteq X$ με $A \cap B = \emptyset$. Ένα σύνολο $C \subseteq X$ **διαχωρίζει** το A από το B αν $A \subseteq C$ και $C \cap B = \emptyset$.

Παρατηρούμε ότι αν το C διαχωρίζει το A από το B τότε το $X \subseteq C$ διαχωρίζει το B από το A.

Θεώρημα 4.3.2 (Το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin)**.** *Για κάθε δύο ξένα αναλυτικά υποσύνολα A, B ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα Borel σύνολο C που διαχωρίζει το A από το B.*

Απόδειξη. Δείτε τις σημειώσεις του μαθήματος. □

Πόρισμα 4.3.3 (Το Θεώρημα του Souslin)**.** *Τα Borel σύνολα ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ είναι ακριβώς τα αμφι-αναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, δηλαδή*

$$\mathcal{B}|\mathcal{X} = \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1|\mathcal{X}.$$

Απόδειξη. Κάθε Borel σύνολο είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1$ από το Πόρισμα 4.1.6. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό θεωρούμε ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1$ σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$ και θεωρούμε το $B = \mathcal{X} \setminus A$. Τότε τα A, B είναι ξένα αναλυτικά σύνολα και από το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin (Θεώρημα 4.3.2) υπάρχει ένα Borel $C \subseteq \mathcal{X}$ με $A \subseteq C$ και $B \cap C = \emptyset$.

Εφόσον $B = \mathcal{X} \setminus A$ είναι άμεσο ότι $A = C$ και επομένως το A είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. □

Πόρισμα 4.3.4 (Το γράφημα Borel-μετρήσιμης συνάρτησης)**.** *Για κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι Borel-μετρήσιμη.*
(2) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι Borel σύνολο.*
(3) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι Borel σύνολο.*

Απόδειξη. Για την κατεύθυνση $(1) \implies (2)$ θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $(V_s)_{s\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{Y}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}(x,y) \in Graph(f) &\iff \forall s\,(y \in V_s \longrightarrow f(x) \in V_s)\\ &\iff \forall s\,(y \notin V_s \ \vee\ f(x) \in V_s).\end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης των Borel συνόλων προκύπτει ότι το $Graph(f)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Η κατεύθυνση $(2) \implies (3)$ είναι προφανής αφού κάθε Borel σύνολο είναι αναλυτικό.

Τέλος για την κατεύθυνση $(3) \implies (1)$ θεωρούμε ένα ανοικτό $U \subseteq \mathcal{Y}$. Πρέπει να δείξουμε ότι το $f^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}[U] &\iff f(x) \in U\\ &\iff \exists y\,((x,y) \in Graph(f)\ \&\ y \in U).\end{aligned}$$

Επειδή η κλάση των αναλυτικών συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$ έχουμε από την πιο πάνω ισοδυναμία ότι το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι αναλυτικό. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}[U] &\iff f(x) \in U\\ &\iff \forall y\,((x,y) \in Graph(f) \longrightarrow y \in U)\\ &\iff \forall y\,((x,y) \notin Graph(f)\ \vee\ y \in U).\end{aligned}$$

Προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία (και την κλειστότητα της κλάσης των συναναλυτικών συνόλων ως προς $\forall^{\mathcal{Y}}$) ότι το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι συναναλυτικό.

Από το Θεώρημα του Souslin (Πόρισμα 4.3.3) το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι Borel. □

Λύσεις Ασκήσεων και Υποδείξεις

Κεφάλαιο 2

Άσκηση 2.1.9.

Άσκηση 2.1.10.

Άσκηση 2.1.11.

Άσκηση 2.1.12.

Άσκηση 2.1.13.

Άσκηση 2.1.14.

Άσκηση 2.1.15.

Άσκηση 2.1.16.

Άσκηση 2.1.17.

Άσκηση 2.2.1. Έστω $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ και $(v_0, \dots, v_{m-1}) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle = \langle v_0, \dots, v_{m-1} \rangle.$$

Αν το u είναι η κενή ακολουθία τότε $\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle = 1$. Επειδή η συνάρτηση $\langle \cdot \rangle$ λαμβάνει άρτιες τιμές στις μη κενές ακολουθίες έχουμε αναγκαστικά ότι και το v είναι η κενή ακολουθία, άρα $u = v$.

Αν $u \neq \Lambda$ τότε όπως πιο πάνω $v \neq \Lambda$. Άρα $n, m \geqslant 1$. Αν είχαμε $n \neq m$, ας πούμε $n < m$ τότε, εφόσον ο όρος $\mathrm{p}_n^{v(n)+1} \neq 1$ είναι παράγοντας στον αριθμό $\langle v_0, \dots, v_{m-1} \rangle$, θα ήταν επίσης παράγοντας στον αριθμό $\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle$. Από την άλλη εξ ορισμού ο τελευταίος αριθμός έχει για παράγοντες δυνάμεις των $\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_{n-1}$ και από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος σε γινόμενο πρώτων αριθμών έχει *μόνο* αυτούς τους παράγοντες. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο. Επομένως $n = m$ και

$$\mathrm{p}_0^{u_0+1} \cdot \dots \mathrm{p}_{n-1}^{u_{n-1}+1} = \mathrm{p}_0^{v_0+1} \cdot \dots \mathrm{p}_{n-1}^{v_{n-1}+1}.$$

Πάλι από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος σε γινόμενο πρώτων αριθμών έχουμε $u_i = v_i$ για κάθε $i < n$ και άρα $u = v$.

Άσκηση 2.2.2. Ο αριθμός $10 = 2 \cdot 5$ είναι ένας άρτιος αριθμός που δεν λαμβάνεται ως τιμή της $\langle \cdot \rangle$. Για να έχουμε το 5, που είναι ο τρίτος στη σειρά πρώτος αριθμός, ως παράγοντα στο $\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle$ θα πρέπει το μήκος της ακολουθίας $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ να είναι τουλάχιστον 3, οπότε και ο αριθμός $\mathrm{p}_1^{u_1+1} = 3^{u_1+1} = 3 \cdot 3^{u_1}$ θα είναι και αυτός παράγοντας του αριθμού $\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle$. Δηλαδή το 3 θα πρέπει να διαιρεί τον $\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle$. Αφού όμως το 3 δεν διαιρεί το 10 έχουμε $\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle \neq 10 = 2 \cdot 5$ για κάθε $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.2.3. Η δοσμένη πρόταση είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n\, \exists s\, \forall i, j < 2n\ \ (\ (n, \langle n, (s)_i \rangle) \in Q\ \&\ (i \neq j\ \longrightarrow\ (s)_i \neq (s)_j)\ ).$$

Άσκηση 2.3.12.

Άσκηση 2.3.13.

Άσκηση 2.4.5.

Άσκηση 2.4.6.

Άσκηση 2.4.7. Είναι προφανές ότι το σύνολο $\overline{V \cap P}$ είναι κλειστό. Δείχνουμε ότι δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Έστω $y \in \overline{V \cap P}$ και $r > 0$. Θα βρούμε ένα στοιχείο y' του $\overline{V \cap P}$ με $y' \in B(y, r)$ και $y' \neq y$. Αφού $y \in \overline{V \cap P}$ έχουμε

$$B_d(y, r) \cap (V \cap P) = (B_d(y, r) \cap V) \cap P \neq \varnothing.$$

Επομένως υπάρχει $z \in P$ με $z \in U = B_d(y, r) \cap V$. Αφού το P είναι τέλειο και το U είναι ανοικτό υπάρχει $w \in U \cap P$ με $w \neq z$. Τότε ένα από τα w, z είναι διάφορο του y. Το ζητούμενο y' είναι ένα από τα w, z ανάλογα με το ποιο είναι διάφορο του y.

Άσκηση 2.4.8. Έστω P και S ο τέλειος πυρήνας και το διάσπαρτο μέρος του C αντίστοιχα. Για κάθε τέλειο $P_0 \subseteq C$ το $P \cup P_0$ είναι εύκολα τέλειο υποσύνολο του C. Προφανώς το σύνολο $S_0 = C \setminus (P \cup P_0) \subseteq C \setminus P = S$ είναι αριθμήσιμο. Από τη μοναδικότητα της διάσπασης έχουμε $P = P \cup P_0$ και άρα $P_0 \subseteq P$.

Άσκηση 2.4.9. Έστω G ένα G_δ υποσύνολο του Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$. Από το Θεώρημα 2.1.7 το G με τη σχετική τοπολογία είναι Πολωνικός χώρος. Αν το G είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο έχουμε από το Πόρισμα 2.4.3 έναν συνεχή μονομορφισμό $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail G$. Επομένως

$$\mathbb{R} =_c 2^{\mathbb{N}} \leqslant_c G \leqslant_c \mathbb{R}$$

όπου στην τελευταία σχέση $\leqslant_c$ χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 2.3.7. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein έχουμε $G =_c \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.5.12.

Άσκηση 2.5.13.

Άσκηση 2.5.14.

Άσκηση 2.5.15.

Άσκηση 2.5.16.

Άσκηση 2.5.17. Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n. Προφανώς το $F_0 = \{\Lambda\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Είναι επίσης άμεσο ότι

$$F_{n+1} = \bigcup \{u * (x) \mid x \in X\ \&\ u * (x) \in T\ \&\ u \in F_n\}.$$

Άρα αν το F_n είναι πεπερασμένο, επειδή το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης το F_{n+1} είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο.

Άσκηση 2.5.18.

Άσκηση 2.5.19. Θεωρούμε μια ακολουθία $((x_i, u_i))_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του T και $(x, u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $(x_i, u_i) \to (x, u)$, δηλαδή $x_i \to x$ και $u_i \to u$. Επειδή στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ έχουμε τη διακριτή μετρική έχουμε ότι $u_i = u$ τελικά για όλα τα $i \in \mathbb{N}$, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x_i, u) \in T$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Δείχνουμε ότι $(x, u) \in T$. Έστω $v \in J$ και $n \in I$ με $n \leqslant |u|$. Επειδή $(x_0, u) \in T$ έχουμε $v \nsubseteq u$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \notin V_n$. Αφού $(x_i, u) \in T$ έχουμε $x \in \mathcal{X} \setminus V_n$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι κλειστό, και άρα $x = \lim_{i\to\infty} x_i \in \mathcal{X} \setminus V_n$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η

$$f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr} : f(x) = T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$$

αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε F_σ.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ η αντίστροφη εικόνα του συνόλου

$$B(u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid \forall i \leqslant m \,\forall\, j \leqslant k\ (u_i \in T \ \&\ w_j \notin T)\}.$$

μέσω της f είναι F_σ υποσύνολο του $\mathcal{X}$, γιατί από την Άσκηση 2.5.18 τα πιο πάνω σύνολα αποτελούν βάση για την τοπολογία του Tr και η αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων είναι επίσης F_σ σύνολο.

Θεωρούμε $u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $B \equiv B(u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k)$ όπως πιο πάνω. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$f(x) \in B \iff \forall i \leqslant m \,\forall\, j \leqslant k\ (u_i \in T(x) \ \&\ w_j \notin T(x)).$$

Αν θέσουμε

$$P_u = \{x \in \mathcal{X} \mid u \in T(x)\} \quad \text{και} \quad Q_w = \{x \in \mathcal{X} \mid w \notin T(x)\}$$

όπου $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έχουμε από τα προηγούμενα ότι

$$f^{-1}[B] = \textstyle\bigcap_{i\leqslant m, j\leqslant k}(P_{u_i} \cap Q_{w_j}).$$

Επειδή η πεπερασμένη τομή F_σ συνόλων είναι F_σ σύνολο, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ τα σύνολα P_u, Q_w είναι F_σ.

Για την ακρίβεια κάθε σύνολο P_u είναι κλειστό γιατί το T είναι κλειστό σύνολο: αν $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο P_u και $x_i \to x$ τότε $(x_i, u) \in T$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $(x_i, u) \to (x, u)$. Άρα $(x, u) \in T$ δηλαδή $x \in P_u$. Παρατηρούμε ότι $Q_w = \mathcal{X} \setminus P_w$ και άρα το Q_w είναι ανοικτό.

Προφανώς κάθε κλειστό σύνολο είναι F_σ και από την Πρόταση 2.1.6 κάθε ανοικτό σύνολο είναι επίσης F_σ. Έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Τέλος δείχνουμε ότι αν τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα, τότε τα πιο πάνω σύνολα P_u είναι ανοικτά. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η αντίστροφη εικόνα των βασικών συνόλων $B(u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k)$ είναι πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων και είναι συνεπώς ανοικτό σύνολο. Επομένως σε αυτή την περίπτωση η f είναι συνεχής.

Θεωρούμε λοιπόν ότι κάθε V_n είναι κλειστό-ανοικτό και $x \in P_u$ για κάποιο $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αν δεν υπάρχει $n \in I$ με $n < |u|$ τότε $P_u = \mathcal{X}$ (καθολικός ποσοδείκτης υπεράνω του κενού συνόλου) και άρα το P_u είναι ανοικτό σύνολο. Αν υπάρχει $n \in I$ με $n < |u|$ τότε για κάθε τέτοιο n (υπάρχουν πεπερασμένα τέτοια) ισχύει $x \in \mathcal{X} \setminus V_n$. Τα συμπληρώματα $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι ανοικτά σύνολα και συνεπώς υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο G με

$$x \in G \subseteq \textstyle\bigcap_{n\in I, n<|u|} (\mathcal{X} \setminus V_n).$$

Εφόσον $x \in P_u$ έχουμε ότι για κάθε $v \in J$ ισχύει $v \nsubseteq u$. Προκύπτει ότι $x \in G \subseteq P_u$ και το P_u είναι ανοικτό.

Άσκηση 2.5.20.

Άσκηση 2.5.21. Η ευθεία κατεύθυνση είναι άμεση από την απόδειξη της Πρότασης 2.5.6 όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το Λήμμα του König για να δείξουμε ότι το σώμα κάθε δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης είναι συμπαγές.

Αντίστροφα θεωρούμε $X \neq \varnothing$ και T ένα άπειρο δένδρο στο X που πεπερασμένης διακλάδωσης. Θα δείξουμε ότι $[T] \neq \varnothing$. Αφού το T είναι άπειρο προκύπτει από την

Άσκηση 2.5.17 ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u \in T$ με $n < |u|$, και περιορίζοντας το u κατάλληλα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n = |u|$.

Από το $\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$ υπάρχει μια ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του T με $|u_n| = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε ένα $x_0 \in X$ και ορίζουμε

$$f_n : \mathbb{N} \to X : f_n = u_n * (x_0, x_0, \dots).$$

Δείχνουμε ότι τα f_n είναι στοιχεία ενός δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης. Ορίζουμε $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$w \in S \iff w \in T \;\vee\; \exists u \in T\; w = u * (x_0, \dots, x_0).$$

Μπορεί κανείς να δει εύκολα ότι το S είναι δένδρο στο X πεπερασμένης διακλάδωσης. Προφανώς $f_n \in [S]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεσή μας το $[S]$ είναι συμπαγές και άρα η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια υπακολουθία $(f_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο $f \in [S]$.

Τέλος δείχνουμε ότι $f \in [T]$. Έστω $m \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $n > m$ έτσι ώστε για κάθε $k \leqslant m$ ισχύει $f_{s_n}(k) = f(k)$. Ισχύει $m < |u_{s_n}|$ γιατί $|u_{s_n}| = s_n \geqslant n > m$. Επιπλέον $f_{s_n} = u_{s_n} * (x_0, x_0, \dots)$ και για κάθε $k \leqslant m < |u_{s_n}|$,

$$f(k) = f_{s_n}(k) = u_{s_n}(k).$$

Επομένως

$$(f(0), \dots, f(m)) = (u_{s_n}(0), \dots, u_{s_n}(m)) \sqsubseteq u_{s_n} \in T$$

και άρα $(f(0), \dots, f(m)) \in T$ για κάθε m, δηλαδή $f \in [T]$.

Άσκηση 3.1.9. Αν έχουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $P \in \Gamma|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ τότε $P = \{(x_0, n_0)\}$ για κάποια $x_0 \in \mathcal{X}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$. Επομένως $\exists^{\mathbb{N}} P = \{x_0\} \in \Gamma|\mathcal{X}$ και η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Από την άλλη είναι σαφές ότι η κλάση Γ δεν είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ γιατί η άπειρη ένωση μονοσυνόλων προφανώς μπορεί να περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Άσκηση 3.1.10. Αν έχουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη Γ τότε το P_0 και συνεπώς η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ περιέχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία. Δηλαδή $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \in \Gamma|\mathcal{X}$ και η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Στη συνέχεια παίρνουμε $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ και $P = \{\sqrt{2}\} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Τότε το P έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία και συνεπώς $P \in \Gamma|(\mathbb{R} \times \mathbb{N})$. Από την άλλη

$$x \in \exists^{\mathbb{N}} P \iff x = \sqrt{2}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το $\exists^{\mathbb{N}} P$ αποτελείται από ακριβώς ένα στοιχείο και επομένως δεν ανήκει στην $\Gamma|\mathbb{R}$. Άρα η Γ δεν είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.1.11. Θεωρούμε τα σύνολα $A_n \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και $B_m \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$, $n, m \in \mathbb{N}$ με

$$(x, \alpha) \in A_n \iff x = f_n(\alpha)$$
$$(x, \alpha) \in B_m \iff g_m(x, \alpha) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το A_n είναι το γράφημα της f_n και το B_m είναι το σύνολο $g_m^{-1}[\{0\}]$. Άρα τα A_n και B_m είναι κλειστά σύνολα. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\forall m\,(x = f_n(\alpha) \;\vee\; g_m(x, \alpha) = 0) &\iff \forall m\,((x, \alpha) \in A_n \;\vee\; (x, \alpha) \in B_m)\\ &\iff \forall m\,(x, \alpha) \in A_n \cup B_m.\end{aligned}$$

Επομένως ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$C_n = \textstyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_m)$$

έτσι που

$$\forall m\,(x = f_n(\alpha) \;\vee\; g_m(x, \alpha) = 0) \iff (x, \alpha) \in C_n.$$

Προφανώς τα σύνολα C_n είναι κλειστά. Έπειτα θεωρούμε τη συνάρτηση της προβολής $\mathrm{pr} : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \mathrm{pr}(x, \alpha) = x$ και έχουμε

$$\exists \alpha \; (x, \alpha) \in C_n \iff x \in \mathrm{pr}[C_n].$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \forall n \, \exists \alpha \, \forall m \; (x = f_n(\alpha) \;\vee\; g_m(x, \alpha) = 0) \\ &\iff \forall n \, \exists \alpha \; (x, \alpha) \in C_n \\ &\iff \forall n \; x \in \mathrm{pr}[C_n] \\ &\iff x \in \textstyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{pr}[C_n]. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια

$$P = \textstyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{pr}[C_n]$$

δηλαδή το P είναι αριθμήσιμη τομή συνόλων που είναι προβολές κλειστών συνόλων.

Άσκηση 3.1.12. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in A_u &\iff \forall n \, \exists w \; (|w| \geqslant n \;\&\; w \in T(x)) \\ &\iff \forall n \, \exists w \; (|w| \geqslant n \;\&\; (x, w) \in T). \end{aligned}$$

Επειδή το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το "$\exists w$" παραπέμπει στον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$. Για την ακρίβεια θεωρούμε τη φυσική απαρίθμηση $(\mathrm{u}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε σύμφωνα με τα ποιο πάνω έχουμε

$$x \in A_u \iff \forall n \, \exists s \; (|\mathrm{u}_s| \geqslant n \;\&\; (x, \mathrm{u}_s) \in T).$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $f = ((x, n, s) \mapsto |\mathrm{u}_s| - n)$ και $g = ((x, n, s) \mapsto (x, \mathrm{u}_s))$ είναι συνεχείς. Επομένως το σύνολο

$$C = \{(x, n, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^2 \mid |\mathrm{u}_s| > n\} = \{(x, n, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^2 \mid f(x, n, s) \geqslant 0\}$$

είναι κλειστό.

Όμοια το σύνολο

$$L = \{(x, n, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^2 \mid g(x, n, s) \in T\}$$

είναι κλειστό.

Συμβολίζουμε με Γ την κλάση των κλειστών συνόλων, η οποία είναι κλειστή ως προς &. Εκτιμούμε την πολυπλοκότητα του A_u διαγραμματικά με βάση τα προηγούμενα,

$$x \in A_u \iff \underbrace{\forall n \; \underbrace{\exists s \; \underbrace{(\underbrace{|\mathrm{u}_s| \geqslant n}_{\text{κλειστό} = \Gamma} \;\&\; \underbrace{(x, \mathrm{u}_s) \in T}_{\text{κλειστό} = \Gamma})}_{\Gamma}}_{\exists^{\mathbb{N}}\Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Gamma}.$$

Άρα το A_u ανήκει στη $\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$.

Άσκηση 3.1.13. Θεωρούμε τη φυσική απαρίθμηση $(\mathrm{u}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} (x, u) \in T &\iff \forall v \in J \; \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u| \; (x \notin V_n \;\&\; v \nsubseteq u) \\ &\iff \forall v \, \forall n \leqslant |u| \; (v \notin J \;\vee\; n \notin I \;\vee\; (x \notin V_n \;\&\; v \nsubseteq u)) \\ &\iff \forall s \, \forall n \leqslant f(n) \; (\mathrm{u}_s \notin J \;\vee\; (x \notin V_n \;\&\; \mathrm{u}_s \nsubseteq u)) \end{aligned}$$

όπου $f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : f(u) = |u|$. Αφού οι χώροι $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\mathbb{N}$ είναι διακριτοί η f είναι συνεχής.

Συμβολίζουμε με Γ_0 και Γ_1 τις κλάσεις των κλειστών και F_σ συνόλων αντίστοιχα. Αφού η αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό σύνολο, έχουμε ότι η Γ_0 είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Με χρήση της Παρατήρησης 3.1.5 υπολογίζουμε διαγραμματικά

$$(x,u) \in T \iff \underbrace{\forall s \ \underbrace{\forall n \leqslant f(u) \ \underbrace{(\mathrm{u}_s \notin J \ \vee \ (x \notin V_n \ \& \ \mathrm{u}_s \not\sqsubseteq u))}_{\Gamma_0}}_{\forall^{\leqslant}\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0}}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0}.$$

Άρα το T ανήκει στην κλάση Γ_0 δηλαδή είναι κλειστό. Για τα σύνολα $P_{u,w}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in P_{u,w} &\iff u \in f(x) \ \& \ w \notin f(x) \\ &\iff \underbrace{\underbrace{(x,u) \in T}_{\text{κλειστό} = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1} \quad \& \quad \underbrace{(x,w) \notin T}_{\text{ανοικτό } \subseteq F_\sigma = \Gamma_1}}_{\Gamma_1}, \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η τομή δύο F_σ συνόλων είναι F_σ σύνολο.

Τέλος θεωρούμε ότι τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά και δείχνουμε ότι κάθε $P_{u,w}$ είναι ανοικτό σύνολο. Από τον πιο πάνω υπολογισμό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο

$$G_u = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,u) \in T\}$$

είναι ανοικτό.

Ο ποσοδείκτης $\forall v \in J$ στον ορισμό του T είναι προβληματικός όσον αφορά το να δείξουμε πως το G_u είναι ανοικτό σύνολο. Από την άλλη όμως παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές x και v εμπλέκονται σε διαφορετικά σημεία της σύζευξης στον ορισμό του T. Από αυτό προκύπτει ότι

$$(x,u) \in T \iff \forall v \in J \ v \not\sqsubseteq u \quad \& \quad \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u| \ x \notin V_n.$$

Άρα για σταθερό $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είτε η συνθήκη $\forall v \in J \ v \not\sqsubseteq u$ δεν ικανοποιείται και άρα $G_u = \varnothing$ που είναι ανοικτό σύνολο, είτε η προηγούμενη συνθήκη ικανοποιείται όποτε

$$\begin{aligned} x \in G_u &\iff \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u| \ x \notin V_n \\ &\iff \forall n \leqslant f(n) \ (n \notin I \ \vee \ x \in \mathcal{X} \setminus V_n). \end{aligned}$$

Αφού το $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι ανοικτό σύνολο προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το G_u είναι ανοικτό.

Κεφάλαιο ??

Άσκηση 3.2.10.

Άσκηση 3.2.11.

Άσκηση 3.2.12.

Άσκηση 3.2.13. Για κάθε $y \in [0,1]$ ορίζουμε το σύνολο

$$V_y = \begin{cases} \mathcal{X}, & \text{αν } y \leqslant 2^{-1}, \\ \varnothing, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι κάθε V_y είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από την άλλη αν πάρουμε το σύνολο

$$(x,y) \in V \iff x \in V_y$$

τότε

$$V = \mathcal{X} \times [0, 2^{-1}]$$

που δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times [0,1]$.

Άσκηση 3.2.14. Για κάθε $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_i$,

$$\begin{aligned}(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \textstyle\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i &\iff \forall i\, x_i \in A_i\\ &\iff \forall i\, \mathrm{pr}_i((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) \in A_i,\end{aligned}$$

όπου $\mathrm{pr}_i : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$ είναι η συνάρτηση της προβολής στην i-συντεταγμένη. Αφού κάθε A_i είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το σύνολο $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n = \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}$.

Από την άλλη αν κάθε A_i είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σύνολο τότε από την τελευταία ισοδυναμία το $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n = \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Για την περίπτωση του πεπερασμένου γινομένου έχουμε όπως πριν

$$(x_0,\dots,x_m) \in A_0 \times \cdots \times A_m \iff \forall i \leqslant m\, \mathrm{pr}_i(x_0,\dots,x_m) \in A_i.$$

Οπότε αν κάθε A_i είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο το πεπερασμένο γινόμενο $A_0 \times \cdots \times A_m$ είναι επίσης $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ λόγω της κλειστότητας της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς τον φραγμένο καθολικό ποσοδείκτη. Εδώ κάνουμε χρήση της Παρατήρησης 3.1.5 με $f(x_0,\dots,x_m) = m$ (σταθερή συνάρτηση). Όμοια αν κάθε A_i είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σύνολο τότε το $A_0 \times \cdots \times A_m$ είναι επίσης $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Άσκηση 3.3.7.

Άσκηση 3.3.8.

Άσκηση 3.3.9.

Άσκηση 3.3.10.

Άσκηση 4.2.13. Πρέπει να δείξουμε ότι η κλειστότητα ως προς την αριθμήσιμη ένωση υποσυνόλων του X είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς την αριθμήσιμη τομή (υποσυνόλων του X) παρουσία των άλλων δύο ιδιοτήτων της σ-άλγεβρας.

Θεωρούμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και παίρνουμε μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του X που ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Τότε

$$X \setminus \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n.$$

Αφού $A_n \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $X \setminus A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και από την κλειστότητα ως προς αριθμήσιμη ένωση έχουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \in \mathcal{A}$. Προκύπτει ότι $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ και άρα $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Καταλήγουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς των αριθμήσιμη τομή υποσυνόλων του X.

Η αντίστροφη κατεύθυνση αποδεικνύεται όμοια.

Άσκηση 4.2.14. Ορίζουμε τις οικογένειες $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_5$ ως εξής

$\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid$ η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $X\}$

$\mathcal{F}_2 = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid$ η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του $X\}$

$\mathcal{F}_3 = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid$ η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις/τομές και περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $X\}$

$\mathcal{F}_4 = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid$ η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις/τομές και περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του $X\}$,

όπου $\mathcal{V}$ είναι μια βάση για την τοπολογία του X.

Πρέπει να δείξουμε ότι $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap \mathcal{F}_2 = \cdots = \bigcap \mathcal{F}_5$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η τομή κάθε μίας από αυτές τις οικογένειες ικανοποιεί την αντίστοιχη ιδιότητα της οικογένειας, δηλαδή ισχύει $\bigcap \mathcal{F}_i \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i = 1,\dots,5$.

Κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X που περιέχει τα ανοικτά σύνολα περιέχει επίσης και τα κλειστά. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε κλειστό σύνολο είναι G_δ και ειδικότερα είναι αριθμήσιμη τομή στοιχείων της $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{A}$ ως σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες τομές (Άσκηση 4.2.13).

Επομένως κάθε στοιχείο της $\mathcal{F}_1$ είναι και στοιχείο της $\mathcal{F}_2$. Αντίστροφα αν η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα κλειστά σύνολα, τότε περιέχει και τα ανοικτά, γιατί κάθε ανοικτό σύνολο είναι F_σ και άρα αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}$. Προκύπτει ότι $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ και άρα $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap \mathcal{F}_2$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δείχνει κανείς ότι $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4$ και επομένως $\bigcap \mathcal{F}_3 = \bigcap \mathcal{F}_4$.

Απομένει να δείξουμε ότι $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap \mathcal{F}_3$. Από την Άσκηση 4.2.13 κάθε σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις και αριθμήσιμες τομές, άρα $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_3$ και επομένως $\bigcap \mathcal{F}_3 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_1 = \mathcal{B}|X$. Για την αντίστροφη συμπερίληψη θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}_0 = \bigcap \mathcal{F}_3 \ \bigcap \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathcal{F}_3\}$$

και δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα. Από αυτό προκύπτει ότι $\mathcal{B}|X \subseteq \mathcal{A}_0$ και άρα

$$\bigcap \mathcal{F}_1 = \mathcal{B}|X \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_3.$$

Αν το V είναι ανοικτό υποσύνολο του X τότε προφανώς ανήκει στην $\bigcap \mathcal{F}_3$. Επιπλέον το $C = X \setminus V$ είναι κλειστό σύνολο και άρα G_δ, δηλαδή αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων. Ειδικότερα το C είναι αριθμήσιμη τομή στοιχείων της $\bigcap \mathcal{F}_3$ και αφού $\bigcap \mathcal{F}_3 \in \mathcal{F}_3$ (ειδικότερα η $\bigcap \mathcal{F}_3$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές) έχουμε ότι $C = X \setminus V \in \bigcap \mathcal{F}_3$. Συνεπώς $V \in \mathcal{A}_0$.

Είναι σαφές ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα και ότι τα σύνολα $\varnothing, X$ (ως ανοικτά) ανήκουν στην $\mathcal{A}_0$. Θεωρούμε μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{A}_0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_0$.

Έχουμε $A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και εφόσον η τελευταία οικογένεια είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις έχουμε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$. Επιπλέον $X \setminus A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και εφόσον η τελευταία οικογένεια είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές έχουμε

$$\textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3.$$

Αφού $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ και $X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ έχουμε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_0$. Καταλήγουμε ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X.

Άσκηση 4.2.15. Για κάθε σύνολο $U \subseteq Y$ έχουμε

$$f^{-1}[U] = \left(f_1^{-1}[U] \cap B\right) \ \cup \ \left(f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B)\right).$$

Αν το U είναι ανοικτό τότε τα σύνολα $f_1^{-1}[U]$, $f_2^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολα του X. Επιπλέον εφόσον το B είναι Borel και η $\mathcal{B}|X$ είναι σ-άλγεβρα έχουμε ότι τα σύνολα

$$X \setminus B, \quad f_1^{-1}[U] \cap B, \quad f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B),$$
$$\left(f_1^{-1}[U] \cap B\right) \ \cup \ \left(f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B)\right) = f^{-1}[U]$$

είναι Borel.

Άσκηση 4.2.16. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y, Z και Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z.$$

Τότε για κάθε ανοικτό $U \subseteq Z$ το σύνολο $g^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολο του Y και από την Πρόταση 4.2.2 η αντίστροφη εικόνα

$$f^{-1}[g^{-1}[U]] = (g \circ f)^{-1}[U]$$

είναι Borel υποσύνολο του X.

Άσκηση 4.2.17. Για κάθε $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ έχουμε

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} B_i \iff \forall n\, x_n \in B_n \iff \forall n\, \mathrm{pr}_n((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in B_n$$

όπου $\mathrm{pr}_n : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to X_n$ είναι η προβολή $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto x_n$, η οποία είναι προφανώς συνεχής.

Από την κλειστότητα της κλάσης των Borel συνόλων ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$ προκύπτει το ζητούμενο.

Η απόδειξη του ισχυρισμού για πεπερασμένα το πλήθος Borel σύνολα $B_0, \dots, B_n$ είναι όμοια.

Άσκηση 4.2.18. Θεωρούμε τις προβολές

$$\mathrm{pr}_n : \prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i \to Y_n : (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto y_n$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ έτσι που για κάθε συνάρτηση

$$f : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n : f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

έχουμε $f_n = \mathrm{pr}_n \circ f$ για κάθε n.

Αν η f είναι Borel-μετρήσιμη τότε από την Άσκηση 4.2.16 κάθε σύνθεση $pr_n \circ f = f_n$ είναι Borel-μετρήσιμη.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε ένα βασικό ανοικτό $W \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Εφόσον το U είναι ανοικτό, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_i \subseteq Y_i$, $i = \dots, n$ (για κάποιο $n \in \mathbb{N}$) ώστε

$$W = U_0 \times \cdots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \cdots \times \dots .$$

Τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[W] &\iff (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in W \\ &\iff \forall k \leqslant n\; f_k(x) \in U_k \\ &\iff x \in \textstyle\bigcap_{k\leqslant n} f_k^{-1}[U_k]. \end{aligned}$$

Εφόσον κάθε f_k είναι Borel-μετρήσιμη το σύνολα $f_0^{-1}[U_0], \dots, f_n^{-1}[U_n]$ είναι Borel. Προκύπτει από τα προηγούμενα ότι το $f^{-1}[W]$ είναι επίσης Borel.

Αν τώρα το W είναι τυχαίο ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ τότε είναι αριθμήσιμη ένωση βασικών ανοικτών συνόλων W_i, $i \in \mathbb{N}$. Επομένως το σύνολο

$$f^{-1}[W] = f^{-1}[\textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}[W_i]$$

είναι Borel.

Η απόδειξη του ισχυρισμού για συναρτήσεις της μορφής $f = (f_0, \dots, f_n)$ είναι όμοια.

Άσκηση 4.2.19.

Αν οι $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι Borel-μετρήσιμες τότε από την Άσκηση 4.2.18 η συνάρτηση

$$H : X \to \mathbb{R}^2 : H(x) = (f(x), g(x))$$

είναι επίσης Borel-μετρήσιμη.

Επειδή η συνάρτηση της πρόσθεσης $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, πάλι από την Άσκηση 4.2.18 έχουμε ότι η σύνθεση

$$+ \circ H : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x),$$

δηλαδή η συνάρτηση $f+g$, είναι Borel-μετρήσιμη. Ο ισχυρισμός για τη μετρησιμότητα των υπόλοιπων συναρτήσεων αποδεικνύεται όμοια. Υπενθυμίζεται ότι

$$\max\{f+g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}, \quad \min\{f+g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2} \; .$$

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Κεφάλαιο 4

Άσκηση ??.

Κεφάλαιο ??

Άσκηση ??.

Κεφάλαιο ??

Άσκηση ??.

Κεφάλαιο ??

Άσκηση ??.

Κεφάλαιο ??

Άσκηση ??.

Βιβλιογραφία

[Mos09] Y.N. Moschovakis, *Descriptive set theory, second edition*, Mathematical Surveys and Monographs., vol. 155, American Mathematical Society, 2009.