Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

Υπενθύμιση:

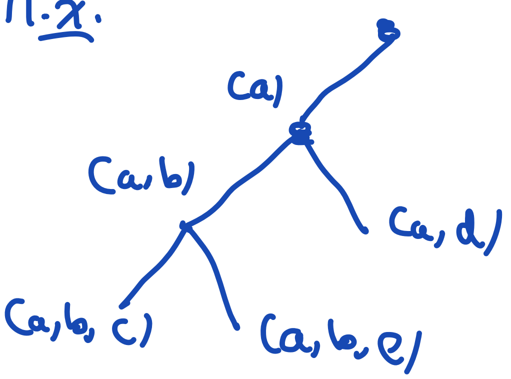
Ορισμός: Έστω X μη κενό σύνολο και $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$. Το T λέγεται δένδρο στο X αν ισχύουν τα εξής:

α) $T \neq \emptyset$

β) $\forall\, u, v \in X^{<\mathbb{N}}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} u \in T \\ v \sqsubseteq u \end{array}\right\} \Rightarrow v \in T$

(αν $u \in T$ και αν $v \sqsubseteq u$ τότε $v \in T$)

Π.χ.



$T = \{\Lambda, (a), (a,b), (a,b,c), (a,b,e), (a,d)\}$

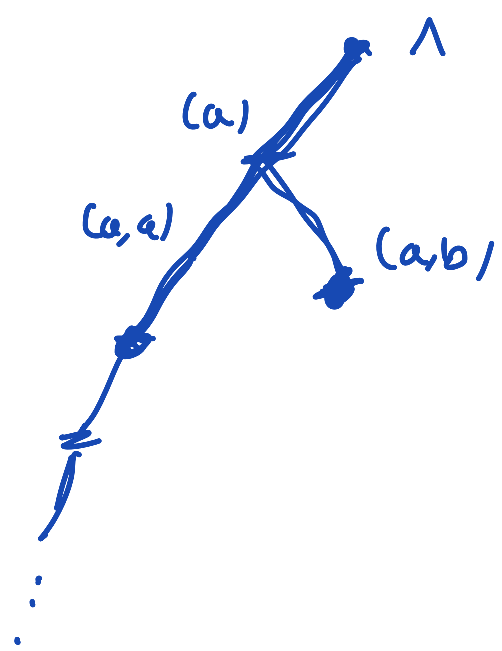
Παράδειγμα:

$$S = \{(a,b)\} \cup \{(a)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Υπενθυμίζουμε:

$$(a)^n = \underbrace{(a, a, a, \ldots, a)}_{n-\text{φορές}}$$

Για $n=0$ $(a)^n = \Lambda$



$u = (a,b)$ - τερματικός κόμβος στο S

Ορισμός: Θεωρούμε ένα δένδρο T σε κάποιο σύνολο $X \neq \emptyset$.

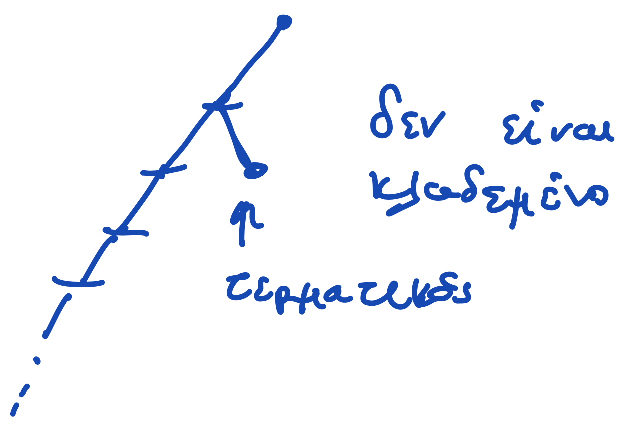
1) Η ρίζα του T είναι η κενή ακολουθία Λ.

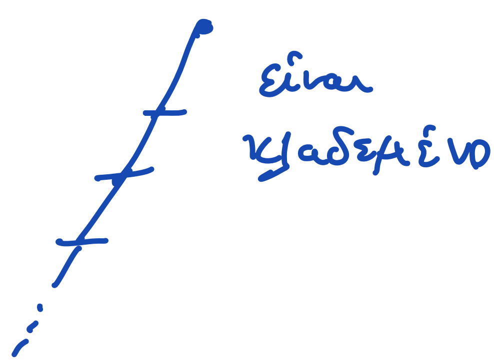
2) Τα στοιχεία του T ονομάζονται <u>κόμβοι</u> ή <u>φύλλα</u> του T.
ή <u>κλαδιά</u>

3) Ένας κόμβος $u \in T$ λέγεται <u>τερματικός</u> αν $\forall v \in T$ δεν ισχύει $u \subsetneq v$. Δηλαδή δεν υπάρχει $v \in T$ που να επεκτείνει γνήσια το u.

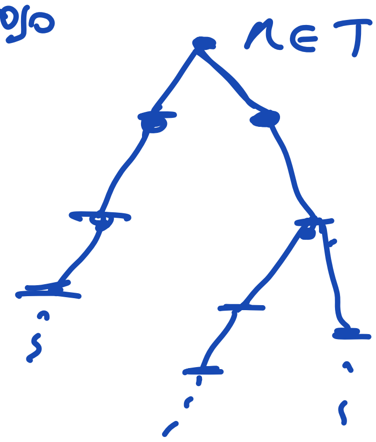
4) Το T <u>κλαδεμένο</u> ή <u>περικομμένο</u> (pruned) αν δεν έχει τερματικούς κόμβους.

<u>Π.χ.</u>





Παρατήρηση: Ένα κλαδεμένο δέντρο είναι άπειρο σύνολο



5) Άπειρο κλαδί του T είναι μία συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to X$ με την ιδιότητα

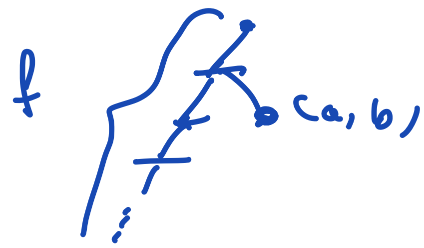
$$(f(0), \ldots, f(n)) \in T$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Π.χ. a) $S = \{(a,b)\} \cup \{(a)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Τότε η $f = (a, a, a, \ldots, a, \ldots)$ είναι άπειρο κλαδί του S.

S:

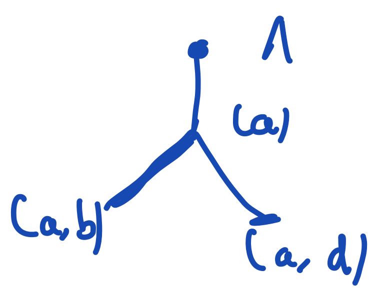


~~2~~β) $S = X^{<\mathbb{N}}$

Τότε κάθε $f : \mathbb{N} \to X$
ικανοποιεί $(f(0), \dots, f(n)) \in S = X^{<\mathbb{N}}$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ κάθε $f \in X^{\mathbb{N}}$ είναι άπειρο κλαδί.

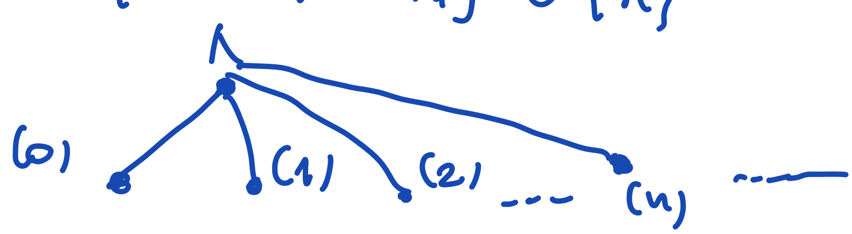
~~3~~γ) $S = \{(a,b), (a,d), (a), \Lambda\}$



Το S δεν έχει άπειρο κλαδί
γιατί είναι πεπερασμένο.

δ) $X = \mathbb{N}$

$S = \{(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Lambda\}$

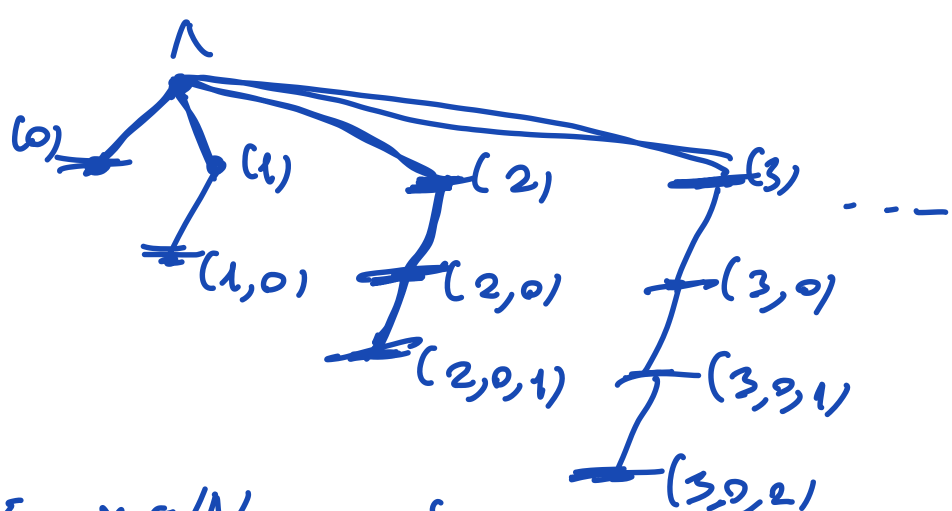


Το S είναι άπειρο αλλά κάθε $u \in S$ ικανοποιεί $|u| \le 1$.

$\Rightarrow$ Το S δεν έχει άπειρο κλαδί.

ε) $X = \mathbb{N}$

S



Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u \in S$ με $|u| = n$.

Αλλά πάλι το S δεν έχει άπειρα κλαδιά.

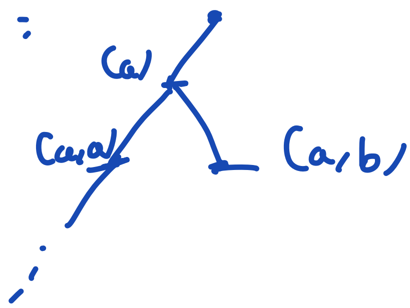
6) Το <u>σώμα του T</u> είναι το σύνολο των άπειρων κλαδιών του. Συμβολίζεται με $[T]$.

Δηλαδή

$$[T] = \{ f \in X^{\mathbb{N}} \mid \forall n \ (f(0), \dots, f(n)) \in T \}.$$

Π.χ. α) Αν το T είναι πεπερασμένο τότε $[T] = \emptyset$

β) T:



$$[T] = \{ (a, a, \dots, a, \dots) \}$$

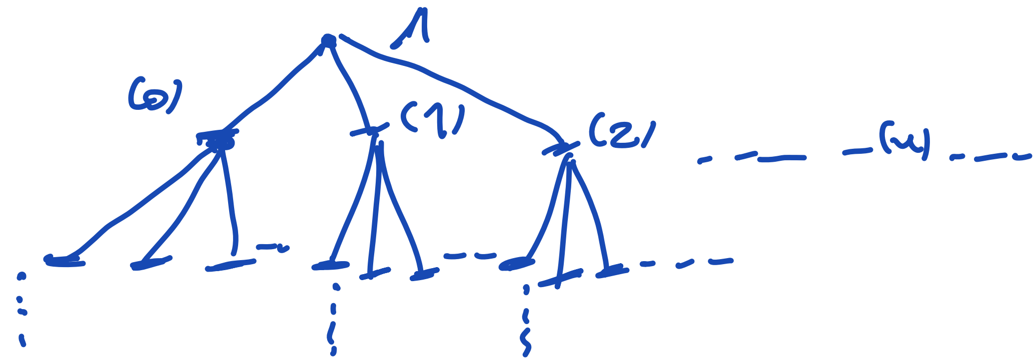
γ) $T = X^{<\mathbb{N}}$ $\quad [T] = X^{\mathbb{N}}$

Ειδικότερα για $X = \mathbb{N}$ $\left(T = \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\right)$

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = [T]$$

Δηλαδή $\mathcal{N} = [\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}]$

$\mathcal{N}$:



<u>Παρατήρηση</u>: $[T] \subseteq X^{\mathbb{N}}$

Ειδικότερα για $X = \mathbb{N}$ $[T] \subseteq \mathcal{N}$.

7) Το T ονομάζεται <u>θεμελιωμένο</u> (well-founded) αν $[T] = \emptyset$ και <u>μη</u> <u>θεμελιωμένο</u> (ill-founded) αν $[T] \neq \emptyset$.

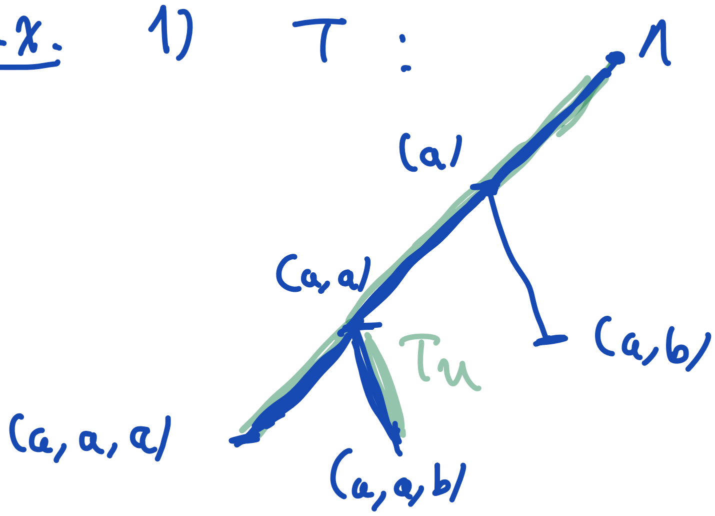
8) Το S λέγεται <u>υποδένδρο του T</u> αν το S είναι δένδρο και $S \subseteq T$.

9) Για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε

$$T_u = \{ w \in T \mid \underset{w \parallel u}{w \text{ συμβατό με το } u} \}$$

Υπενθύμιση: $w \parallel u \iff w \sqsubseteq u$ ή $u \sqsubseteq w$

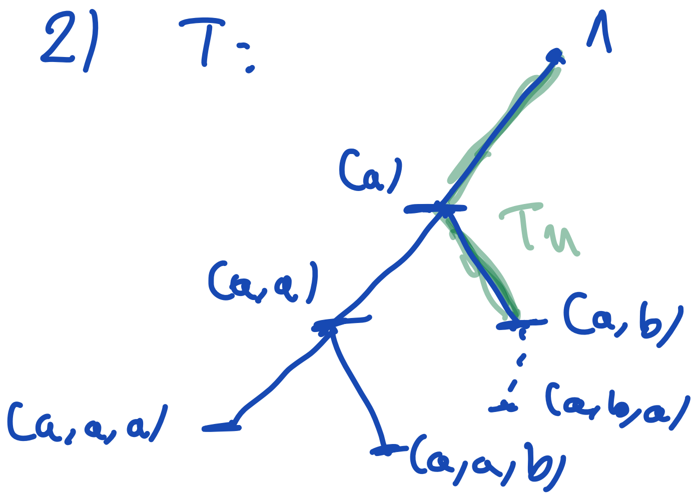
Π.χ. 1) T :



$u = (a,a)$

$T_u = \{\Lambda, (a), (a,a), (a,a,a), (a,a,b)\}$.

2) T:



$u = (a,b,a) \notin T$

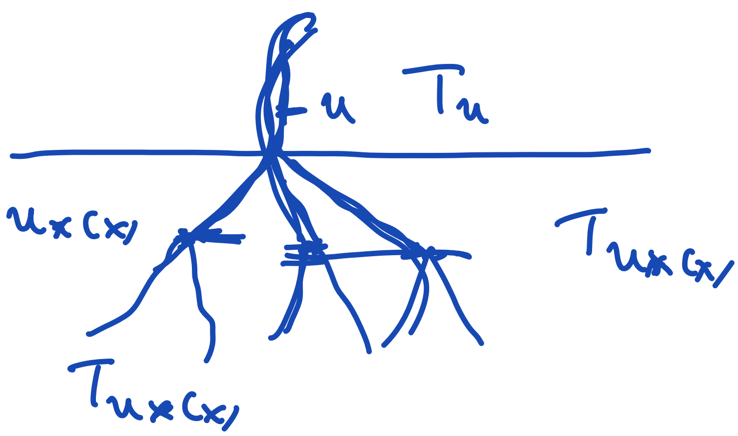
$T_u = \{\Lambda, (a), (a,b)\}$

<u>Άσκηση:</u> Το T_u είναι υποδέντρο του T για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$.

<u>Άσκηση:</u>

$$T_u = \bigcup \{ T_{u*(x)} \mid x \in X \text{ και } u*(x) \in T \}$$

u: δεν είναι τερματικός κόμβος.



Δέντρα και τοπολογίας

$X^{\mathbb{N}}$: τοπολογία γινόμενο

(X : διακριτό)

Υπενθύμιση: Αν έχουμε $f_i \in X^{\mathbb{N}}$, $f \in X^{\mathbb{N}}$ όπου $i \in \mathbb{N}$ τότε

$$f_i \longrightarrow f \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad f_i(k) \xrightarrow[i\to\infty]{X} f(k)$$

Ειδικότερα για $X = \mathbb{N}$

$$f_i \to f \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad f_i(n) \xrightarrow{i\to\infty} f(n)$$

$$\alpha_i \longrightarrow \alpha \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_i(n) \xrightarrow{i\to\infty} \alpha(n).$$

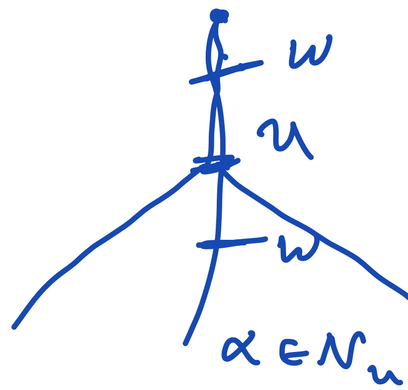
Αν το T είναι δέντρο στο X τότε $[T] \subseteq X^{\mathbb{N}}$

Πρόταση: Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική και $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το F είναι κλειστό στο $X^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο αν και μόνο αν $F = [T]$ για κάποιο δένδρο T στο X.

Πόρισμα: Τα κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{N}$ είναι ακριβώς τα σύνολα της μορφής $[T]$ όπου το T είναι δένδρο στο $\mathbb{N}$.

Άσκηση: Το $\mathcal{N}_u = \{ \alpha \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq \alpha \}$ είναι κλειστό $\subseteq \mathcal{N}$.

Λύση: Ισχύει $\mathcal{N}_u = [T_u]$ όπου $T_u = \{ w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid u \parallel w \}$



$w = (\alpha(0), \dots, \alpha(n)) \| u$

<u>Απόδειξη.</u> $(\Rightarrow)$ Έστω $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$ κλειστό. Αν $F = \emptyset$ τότε $F = [T]$ όπου $T = \{\Lambda\}$. Υποθέτουμε ότι $F \neq \emptyset$.

Ορίζουμε το $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$u \in T \iff \exists f \in F \quad u \sqsubseteq f$

$u \sqsubseteq f$ σημαίνει $u = (f(0), \dots, f(n-1))$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

- Το T είναι δέντρο.

Θεωρούμε $f \in F$ $(F \neq \emptyset)$ και παίρνουμε το $u = \Lambda \sqsubseteq f \Rightarrow \Lambda \in T$.

Επιπλέον αν $u, v \in X^{<\mathbb{N}}$ ικανοποιούν

$u \in T$ και $v \sqsubseteq u$ τότε $\exists f \in F$ με $u \sqsubseteq f$. Ισχύει $v \sqsubseteq u \sqsubseteq f$ τότε $v \sqsubseteq f$. Συνεπώς $v \in T$.

- $F \subseteq [T]$

Έστω $g \in F$ και $n \in \mathbb{N}$.

Δείχνουμε $(g(0), \dots, g(n)) \in T$.

Προφανώς $(g(0), \dots, g(n)) \sqsubseteq g$, $\overset{= f}{g} \in F$

άρα $(g(0), \dots, g(n)) \in T$.

- $[T] \subseteq F$. ✓

Έστω $\underline{g \in [T]}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(g(0), \dots, g(n)) \in T$

άρα $\exists f_n \in F$ με $(g(0), \dots, g(n)) \sqsubseteq f_n$.

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $n \geq k$ $\quad g(k) = f_n(k)$

$\Rightarrow \quad f_n \to g$

$$\left.\begin{array}{l} f_n \in F \\ f_n \to g \\ F: \text{κλειστό} \end{array}\right\| \Longrightarrow g \in F.$$

($\Leftarrow$) Δείχνουμε ότι το $[T]$ είναι κλειστό στον $X^{\mathbb{N}}$ όπου το T είναι δέντρο στο X.

Έστω $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στο $[T]$ με $f_i \to f$ όπου $f \in X^{\mathbb{N}}$.

Δείχνουμε ότι $f \in [T]$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$.

$$f_i \to f \Rightarrow \forall k \leq n \ \exists i_k \ \forall i \geq i_k \quad f_i(k) = f(k)$$

$$i^\circ = \max\{ i_k \mid k \leq n \}.$$

Τότε $\forall i \geq i^\circ \ \forall k \leq n$

$$f_i(k) = f(k)$$

$$\Rightarrow \quad \forall i \geq i^0 \quad (f(0), \ldots f(n)) \sqsubseteq f_{i^0}$$

$$\Rightarrow \quad (f(0), \ldots, f(n)) \sqsubseteq f_{i^0}$$

$$\Rightarrow \quad (f(0), \ldots, f(n)) = (f_{i^0}(0), \ldots, f_{i^0}(n))$$

$$f_{i^0} \in [T] \Rightarrow (f_{i^0}(0), \ldots, f_{i^0}(n)) \in T$$

$$\Rightarrow \quad (f(0), \ldots, f(n)) \in T.$$