Σύνδεση με προηγούμενα

- Εισαγωγή: ερωτήματα που μας παρακινούν να μελετήσουμε Εδαφομηχανική
- Εξοικείωση με τη σωματιδιακή φύση του εδάφους ποιοτικά (& video) και με τα χαρακτηριστικά του, τα οποία μετράμε (ποσοτικά) για να το περιγράψουμε
- **Στα επόμενα**: μελέτη συγκεκριμένων εντατικών καταστάσεων → πώς παραμορφώνεται το έδαφος, πώς/πότε αστοχεί

Υπενθύμιση από Μηχανική

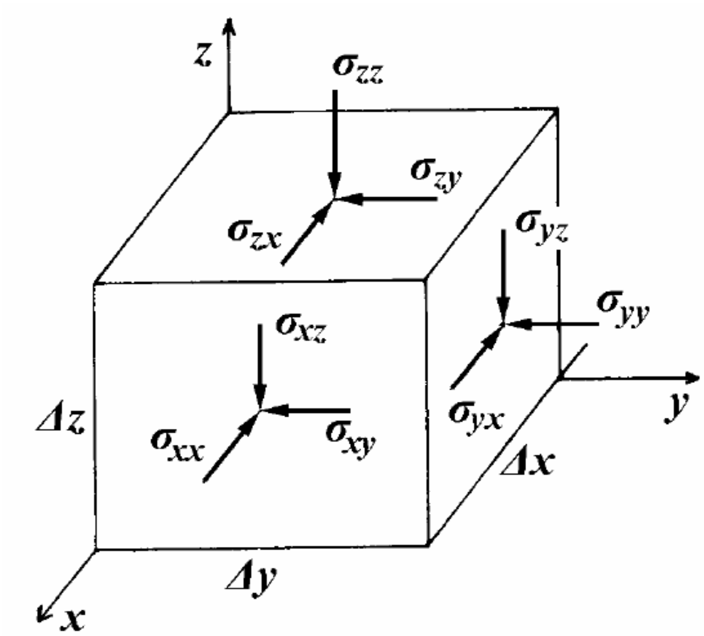
- Η εντατική κατάσταση σε ένα σημείο Μ ορίζεται από ανηγμένες δυνάμεις σε τρία επίπεδα ή, ισοδύναμα, από τις συνιστώσες τους, δηλ. τις τάσεις σε αυτά τα επίπεδα, συνήθως τα κάθετα στις καρτεσιανές συντεταγμένες, x, y, z
- Αυτές οι 9 συνιστώσες γράφονται συνοπτικά με την μορφή που ορίζει τον τανυστή των τάσεων στο Μ

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Από τη Μηχανική ξέρουμε ότι ο τανυστής είναι συμμετρικός, δηλ:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Σύμβαση θετικών κατευθύνσεων στην Εδαφομηχανική (διαφορά με Μηχανική)

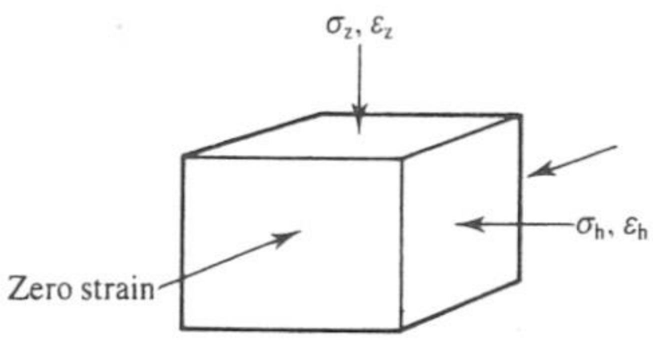


Σχ. 3.3: Θετικές συνιστώσες τάσεων (σύμβαση Εδαφομηχανικής)

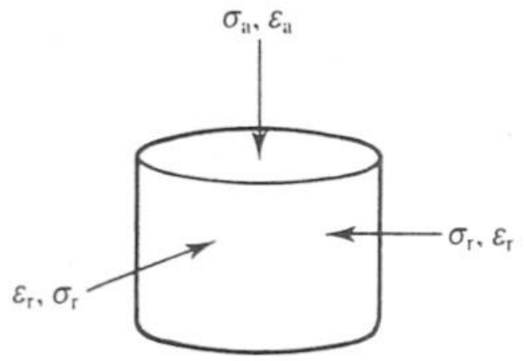
- Στις «θετικές» πλευρές (τις τρεις που βλέπουμε στο σχήμα): θετικές τάσεις οι αντίρροπες των αξόνων
- Στις «αρνητικές» πλευρές: θετικές τάσεις οι ομόρροπες των αξόνων
- **Θετική ορθή τάση = Θλιπτική**

- Ορθές τάσεις = κάθετες σε επίπεδο
- Διατμητικές τάσεις = παράλληλες στο επίπεδο (στην Εδαφομηχανική τις συμβολίζουμε με τ)

Εδαφομηχανική: συχνές ειδικές περιπτώσεις



(a) Plane strain



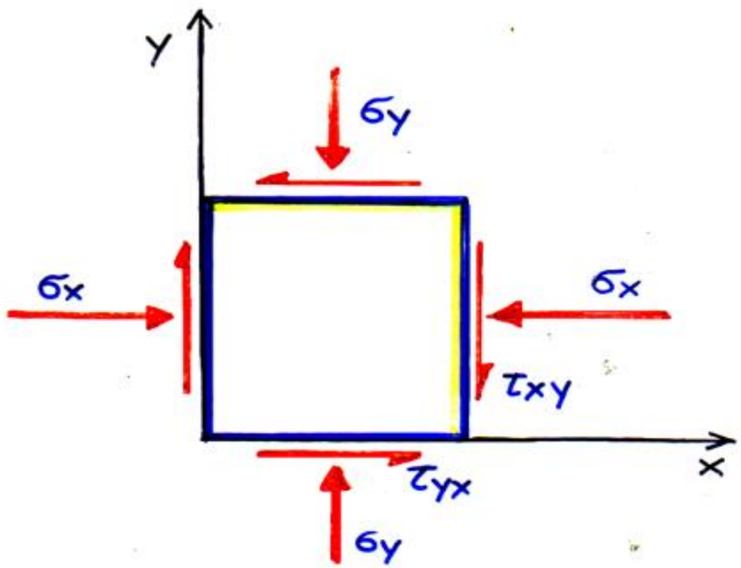
(b) Axial symmetry

(α) Επίπεδη παραμόρφωση: μηδενική παραμόρφωση σε έναν (οριζόντιο) άξονα → ίδια εικόνα τάσεων σε επίπεδα κάθετα σ' αυτόν τον άξονα

(β) Αξονική συμμετρία τάσεων και παραμορφώσεων

• Αρκεί ο προσδιορισμός δύο ορθών τάσεων και μιας διατμητικής τάσης

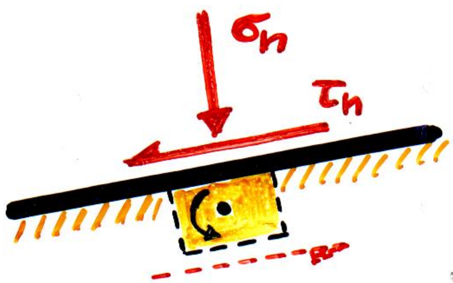
Καθορισμός* θετικών τιμών τάσεων σε 2D: σε σημείο



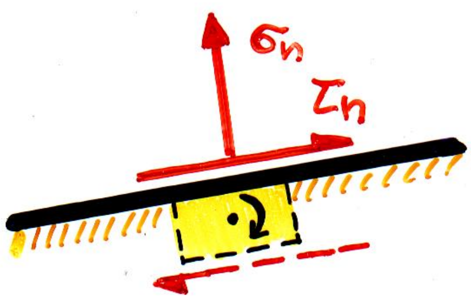
- Όπως και στη διαφάνεια 3
- Μπορούμε να θυμόμαστε: οι εικονιζόμενες θετικές διατμητικές τάσεις τείνουν να μεγαλώσουν την γωνία στην αρχή των αξόνων

* Συνάρτηση του συστήματος συντεταγμένων

Καθορισμός* θετικών τιμών τάσεων σε 2D: σε επίπεδο



(+)



(-)

- Θετική διατμητική τάση προκαλεί ανθωρολογιακή ροπή

* Δεν είναι συνάρτηση του συστήματος συντεταγμένων

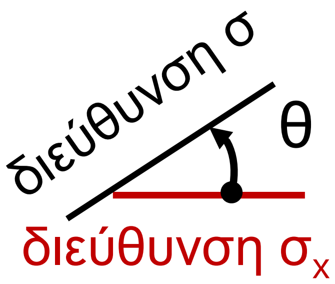
Τάσεις σε σημείο Μ $\rightarrow$ τάσεις σε οποιοδήποτε επίπεδο που διέρχεται από το Μ

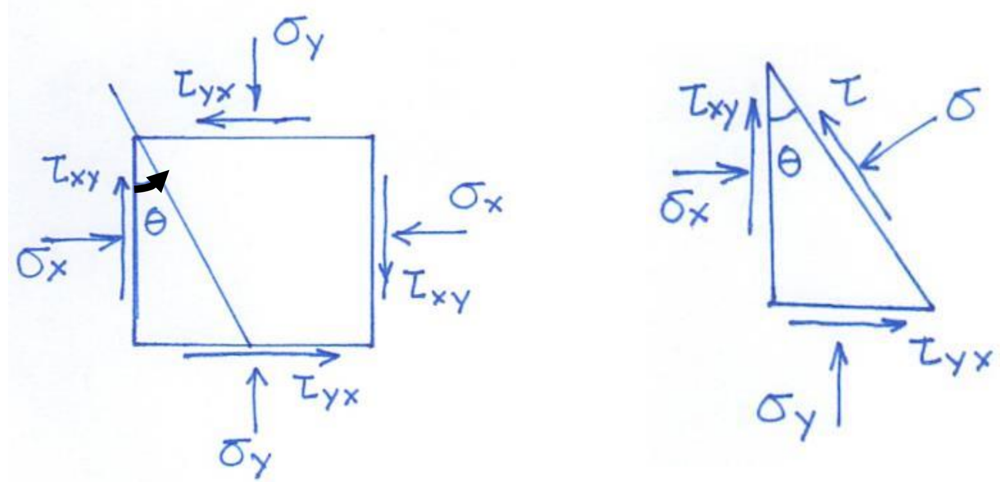
- Με γνωστό τον τανυστή των τάσεων σε 2D

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

- Πώς βρίσκω σ, τ σε οποιοδήποτε άλλο επίπεδο;
- Απόδειξη: βιβλίο Μ. Καββαδά

Γενική περίπτωση: Τάσεις σε σημείο σ_x, σ_y, τ_{xy} → τάσεις σ, τ σε οποιοδήποτε επίπεδο





Προσοχή στη φορά μέτρησης της θ

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (1)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν και θεωρώντας ισορροπία δυνάμεων που δρουν στο τρίγωνο κάθετα και παράλληλα στο επίπεδο

Επίπεδα κύριων τάσεων, σ_1, σ_3

- Για δύο γωνίες θ που διαφέρουν κατά 90° και ικανοποιούν την σχέση (3), η (1) λαμβάνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της και η (2) δίνει μηδέν:

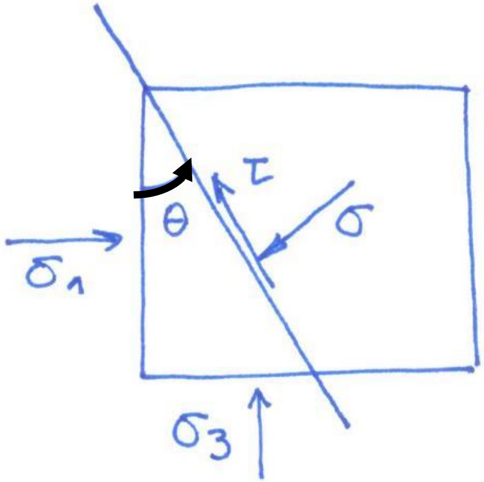
$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (3)$$

- Αντικατάσταση της (3) στην (1) δίνει:

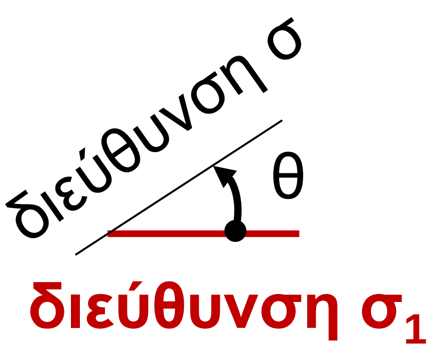
$$\sigma = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (4)$$

$$\sigma = \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (5)$$

Ειδική περίπτωση: Κύριες τάσεις σ_1, σ_3 → τάσεις σ, τ σε οποιοδήποτε επίπεδο



Από τις σχέσεις (1) και (2) της γενικής περίπτωσης, για $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_3$, και $\tau_{xy} = 0$



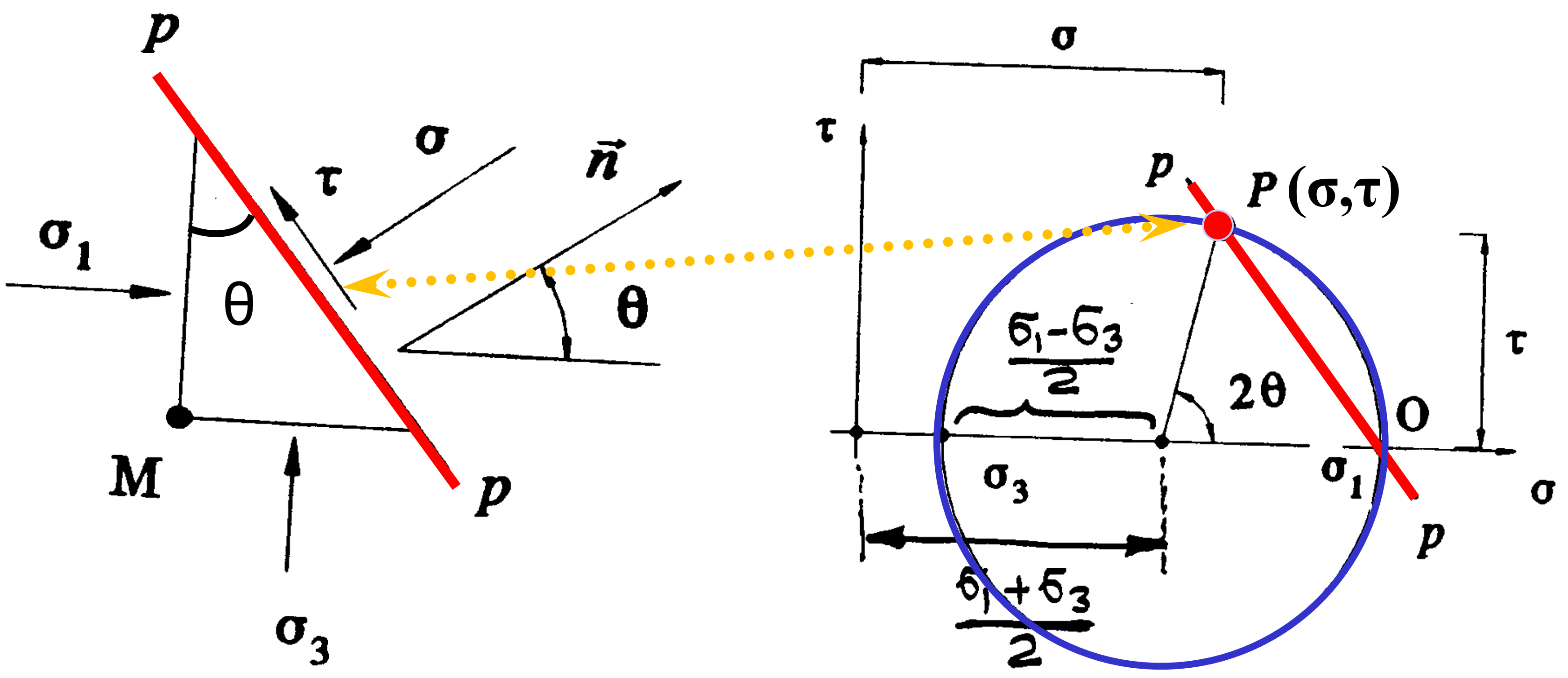
$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\theta \qquad (6)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\theta \qquad (7)$$

Ορισμός κύκλου Mohr

- Από σημείο M διέρχονται άπειρα επίπεδα
- Σε κάθε επίπεδο, ασκείται μια ορθή και μια διατμητική τάση
- Άρα ορίζεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ:

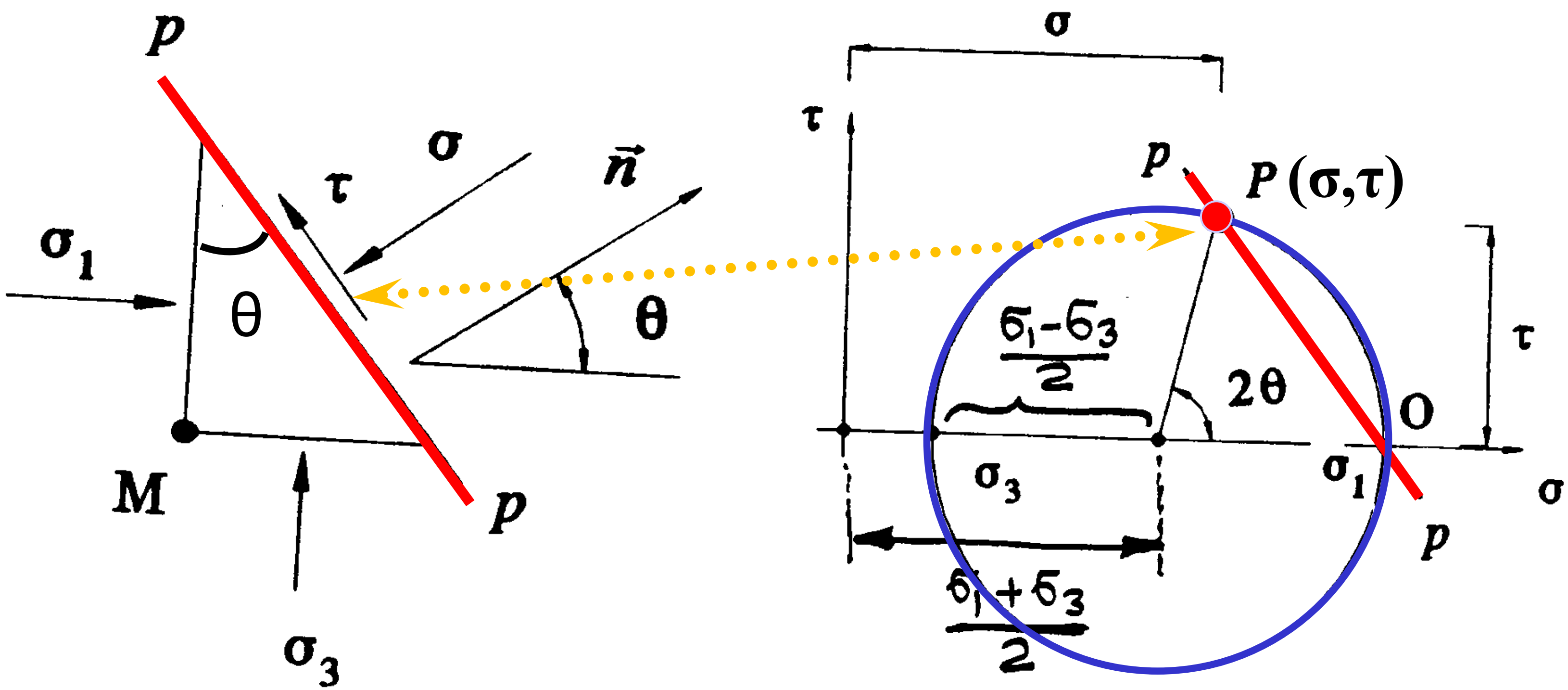
επιπέδων (pp) διά του M και σημείων (P) στο επίπεδο (σ,τ)



Αποδεικνύεται ότι τα σημεία P ανήκουν σε κύκλο (κύκλος Mohr)

Εύρεση σχέσεων (6) και (7) από τον κύκλο Mohr

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\theta \qquad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\ \sin 2\theta$$



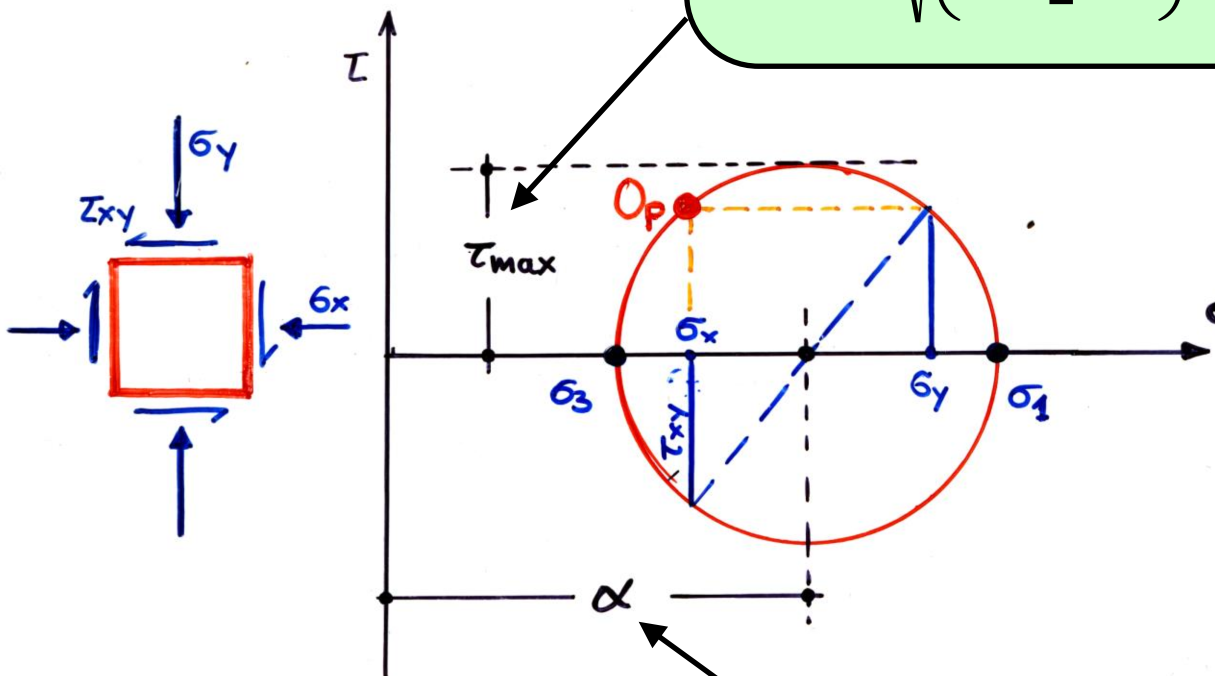
Δηλαδή, τα σημεία (σ,τ) ανήκουν σε κύκλο με διάμετρο (σ_1, σ_3)

Βασικά χαρακτηριστικά κύκλου Mohr
(υπάρχει και συνέχεια)

η ακτίνα:

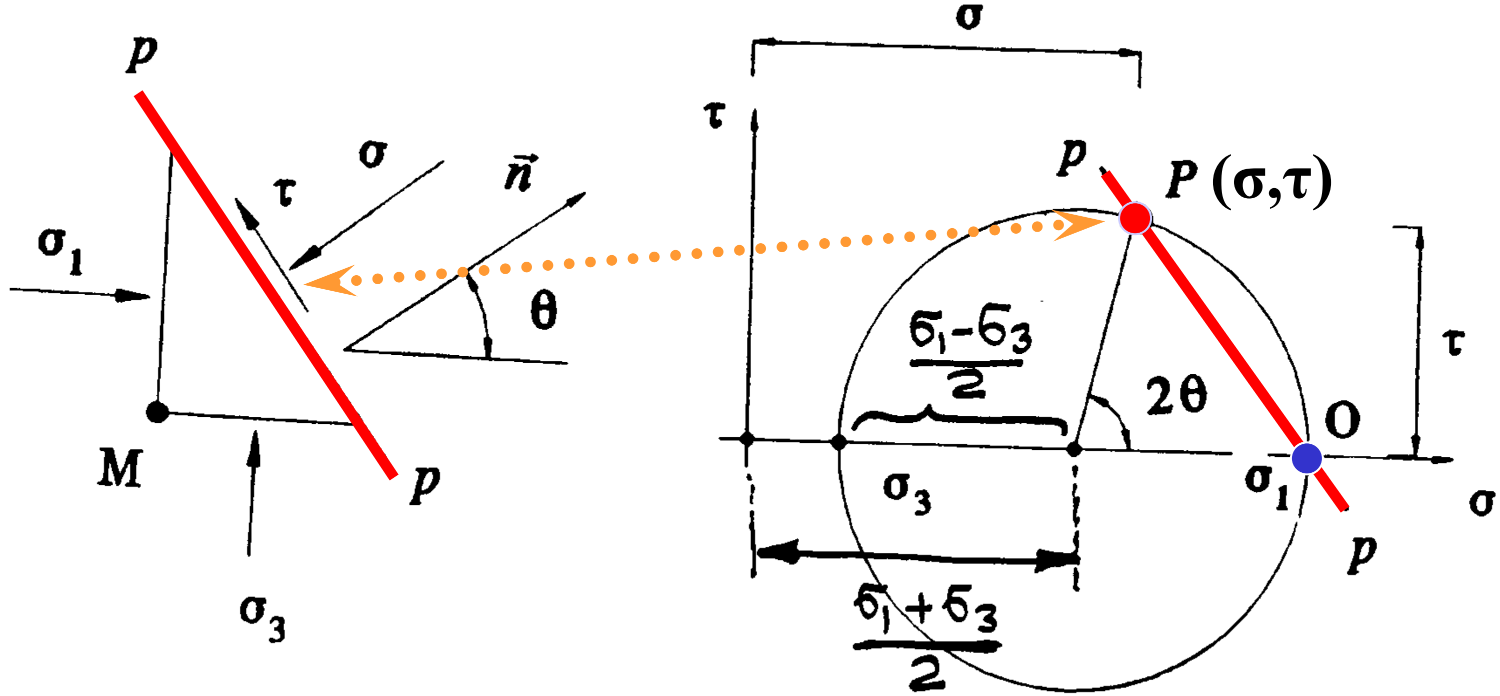
$$\tau_{max}(=R)=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$$\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$



το κέντρο: $\alpha=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$

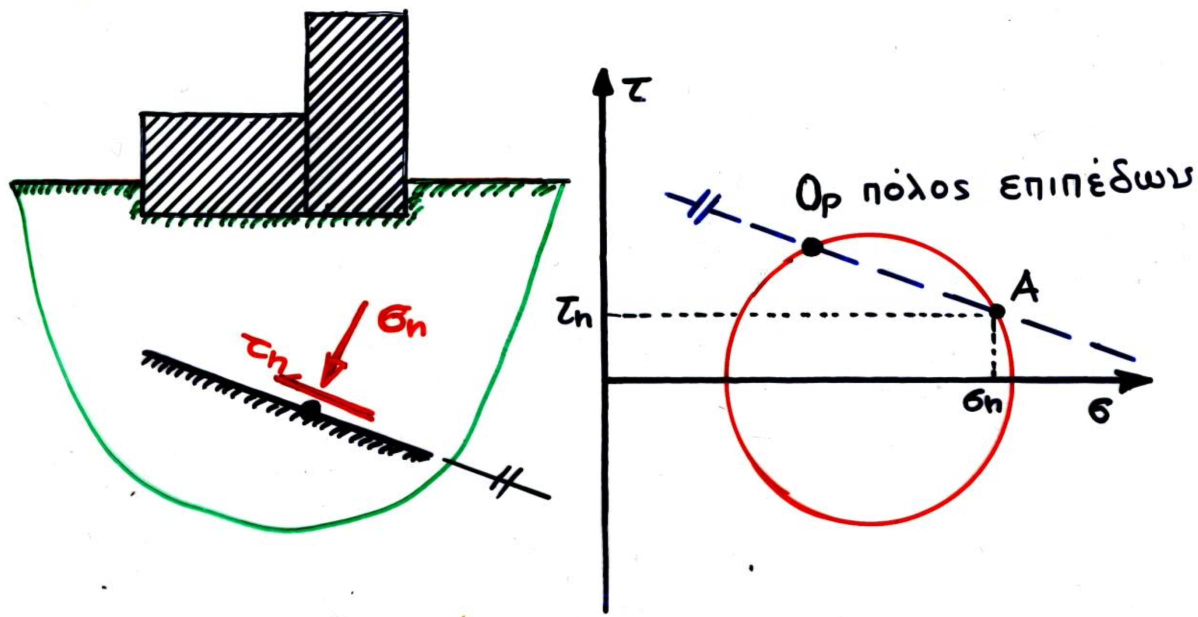
Ιδιότητες κύκλου Mohr



- Όπως είδαμε, σε κάθε επίπεδο (pp) διά του M, αντιστοιχεί ένα σημείο P επί του κύκλου Mohr.
- Αν από το σημείο P(σ,τ) του κύκλου Mohr, αχθεί ευθεία παράλληλη με το επίπεδο pp, η ευθεία γενικά ξανατέμνει τον κύκλο σε σταθερό σημείο O που ονομάζεται πόλος του κύκλου Mohr (σημ: ο κύκλος στο σχήμα είναι για $\sigma_1 = \sigma_x$ και $\sigma_3 = \sigma_y$)

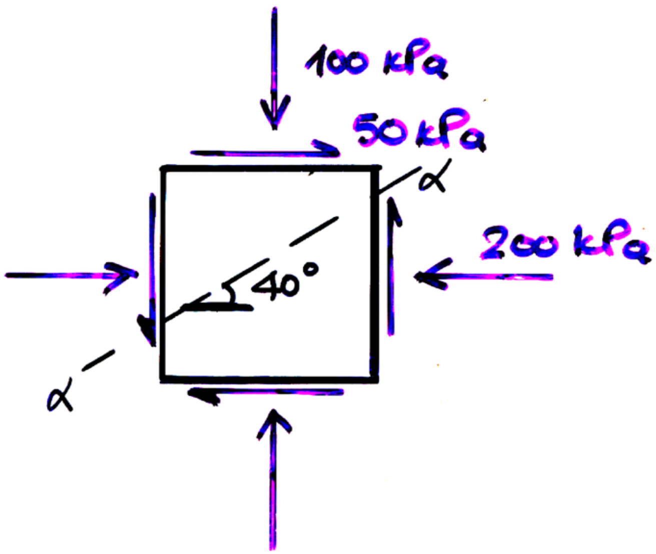
Κύκλος Mohr: γενική περίπτωση

Εάν ενώσω τον πόλο Op ενός κύκλου Mohr με ένα σημείο στην περιφέρειά του A (σ_n, τ_n), τότε η ευθεία OpA είναι παράλληλη προς το επίπεδο επί του οποίου ασκούνται οι τάσεις (σ_n, τ_n)



Χρήση κύκλου Mohr

- Ο κύκλος Mohr έχει ορισθεί πλήρως όταν είναι γνωστά: (α) το κέντρο, (β) η ακτίνα και (γ) ο πόλος των επιπέδων
- Αν γνωρίζω τον κύκλο Mohr σε ένα σημείο Μ, γνωρίζω πλήρως την εντατική κατάσταση στο Μ



Εφαρμογή

- (α) Να σχεδιασθεί ο κύκλος Mohr
- (β) Να υπολογισθούν οι κύριες τάσεις και τα επίπεδα εφαρμογής τους
- (γ) Να υπολογισθούν οι τάσεις στο επίπεδο α-α

Εφαρμογή

- Πώς κινηθήκαμε στην εφαρμογή της προηγούμενης διαφάνειας;
- ΙΣΩΣ ΤΟ ΠΙΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: δεν αρχίσαμε αμέσως να υπολογίζουμε νούμερα, αλλά πρώτα (α) συμπληρώσαμε στο σχήμα τα σύμβολα των τάσεων και (β) αποφασίσαμε τα πρόσημα της διατμητικής τάσης (β_1) στο σημείο με τα εντατικά μεγέθη του σχήματος, (β_2) στο οριζόντιο επίπεδο και (β_3) στο κατακόρυφο επίπεδο.
- (α) Βρίσκω το κέντρο K και την ακτίνα του κύκλου R με τις σχέσεις στη διαφάνεια 13. Βάζω στον κύκλο τα σημεία που αντιστοιχούν στις <u>τάσεις στο οριζόντιο</u> και <u>κατακόρυφο</u> <u>επίπεδο</u> (προσοχή στο πρόσημο των διατμητικών τάσεων που είναι ίσες σε μέγεθος με αντίθετο πρόσημο). Επιλέγω το ένα από τα δύο σημεία και φέρνω ευθεία παράλληλη στο επίπεδο που αντιστοιχεί στο σημείο (σ,τ), πχ αν διαλέξω το σημείο (σ_x = 200 kPa, τ_{xy}) θα φέρω μια κατακόρυφη ευθεία: ο πόλος του κύκλου είναι το σημείο όπου η ευθεία ξανατέμνει τον κύκλο. Προφανώς θα βρω τον ίδιο πόλο αν διαλέξω το σημείο (σ_y = 100 kPa, τ_{yx}) και φέρω μια οριζόντια ευθεία.
- (β) Η μέγιστη και ελάχιστη κύρια τάση βρίσκονται γραφικά προσθαφαιρώντας (μέγιστη/ελάχιστη) την ακτίνα στο κέντρο του κύκλου [σχέσεις (4) και (5)]. Γραφικά βρίσκονται και τα επίπεδά τους, ενώνοντας τα σημεία (σ_1,0) και (σ_3,0) με τον πόλο του κύκλου.
- (γ) ΓΡΑΦΙΚΑ Φέρνουμε από τον πόλο ευθεία παράλληλη στο επίπεδο α-α. Η τομή της ευθείας με τον κύκλο δίνει το σημείο (σ_α, τ_α). ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ Χρησιμοποιώ τις σχέσεις (1) και (2) προσέχοντας να μετρήσω την θ όπως φαίνεται στη διαφάνεια 8. Το κάνω και με τους δύο τρόπους για να βεβαιωθώ ότι βρίσκω το ίδιο.

Πηγές υλικού διαφανειών

- Διαφάνειες Μ. Καββαδά & Γ. Μπουκοβάλα