



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ – ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗΣ**

**ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

**« ΕΔΑΦΟΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι - Τμήμα 2 »**

**4<sup>ο</sup> ΕΞ. ΠΟΛ-ΜΗΧ. ΕΜΠ - Ακαδ. Έτος 2020 - 21**

**ΔΙΑΛΕΞΗ 6**

**ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ – ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ**

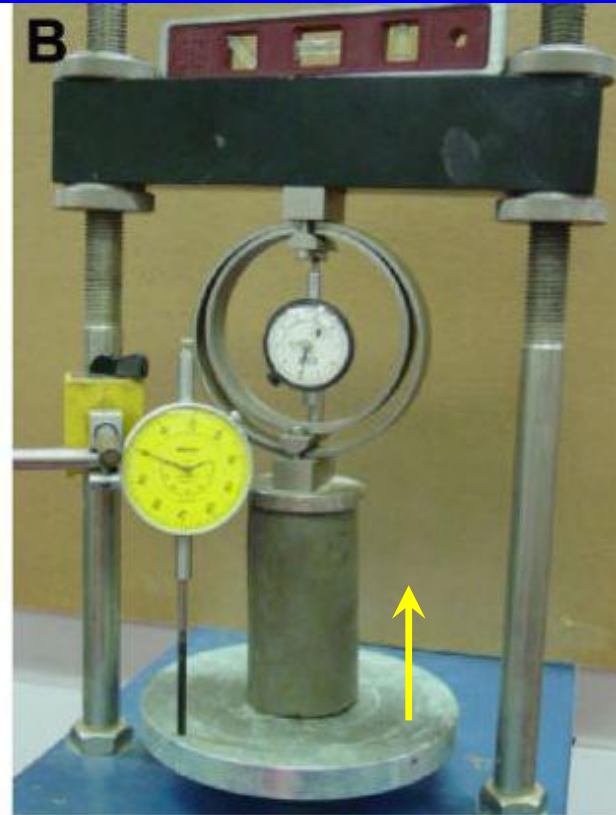
**ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ**

**ΑΠΛΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ – ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ**

31.03.2021

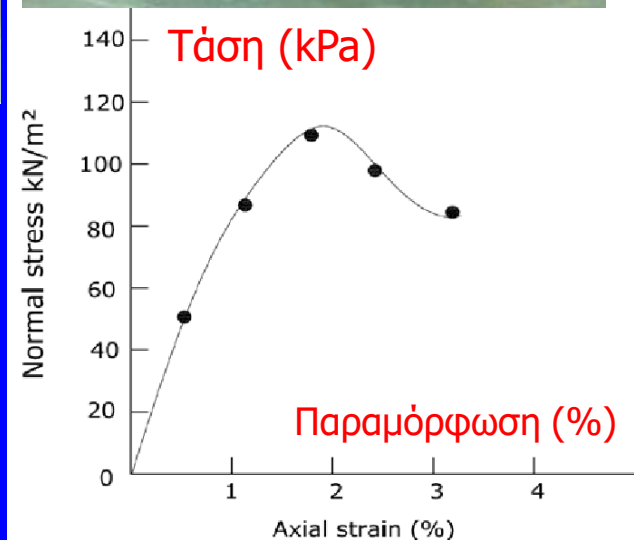
# ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Παράδειγμα : Φόρτιση σε μονοαξονική θλίψη



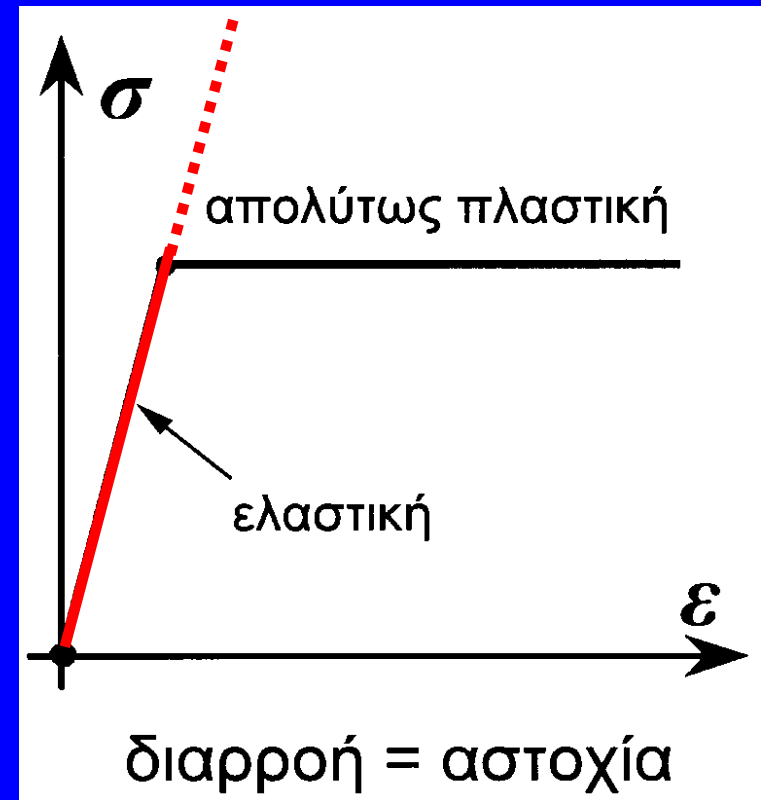
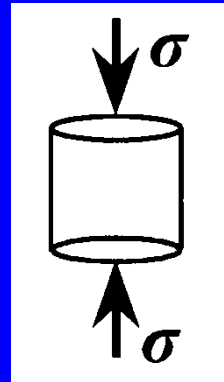
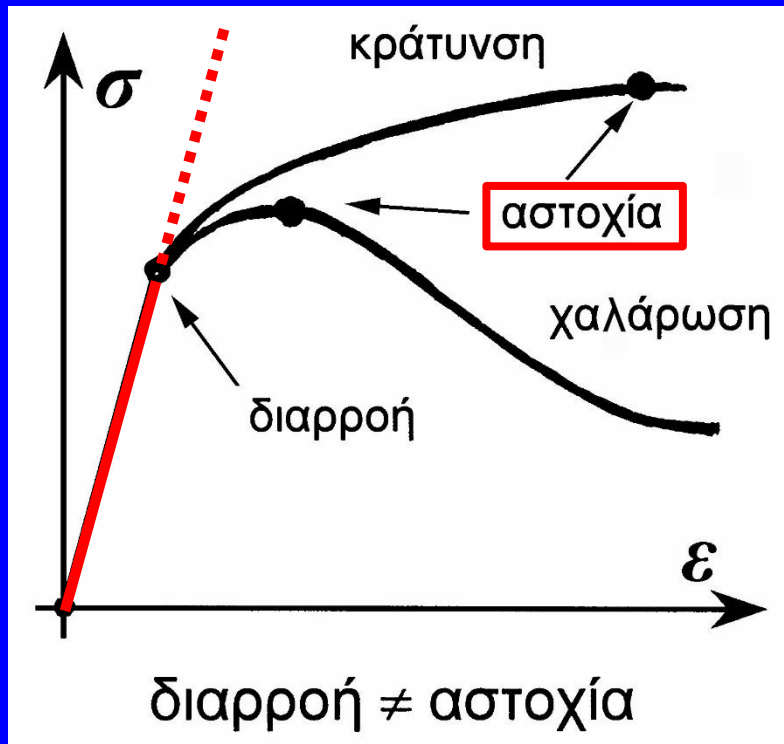
Μονοαξονική φόρτιση εδαφικού δείγματος

Καμπύλη τάσης ( $\sigma$ ) – παραμόρφωσης ( $\epsilon$ ) =  $\Delta L/L$



# ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Παράδειγμα : Φόρτιση σε μονοαξονική θλίψη

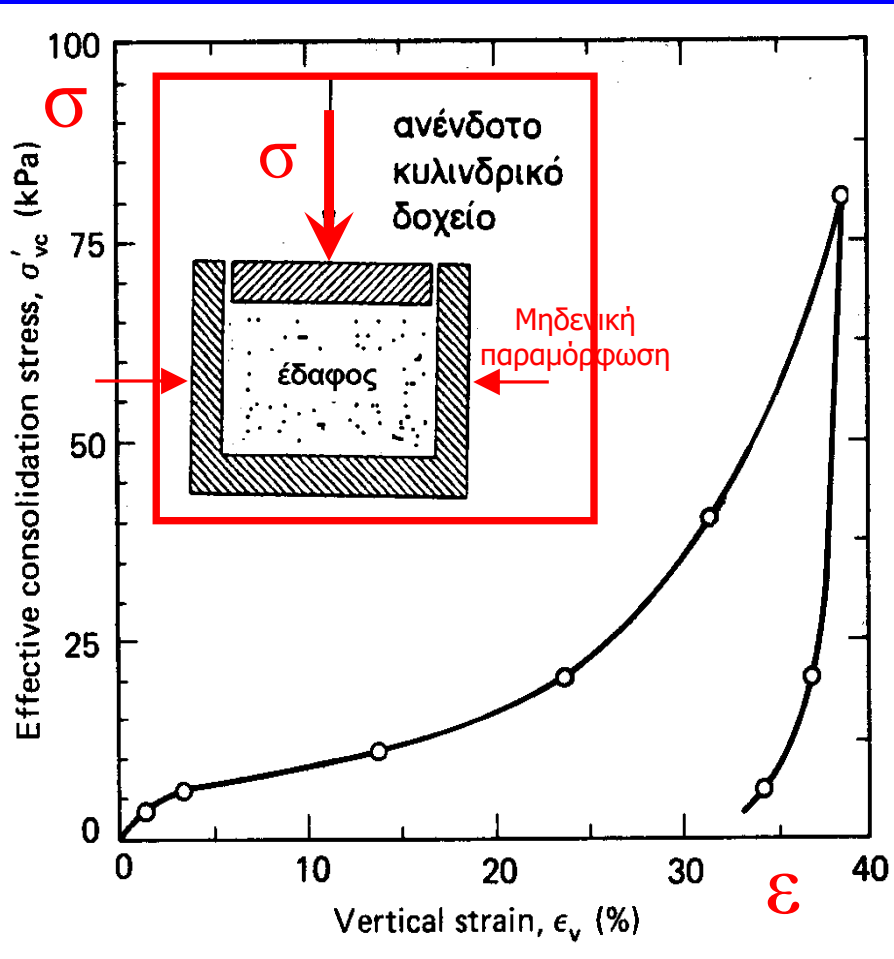


- Στα αρχικά στάδια της φόρτισης, όλα τα υλικά παρουσιάζουν γραμμικώς ελαστική συμπεριφορά
- Σε μεγαλύτερες τάσεις η συμπεριφορά γίνεται μη-γραμμική (διαρροή), και τελικώς ορισμένοι συνδυασμοί τάσεων οδηγούν σε αστοχία

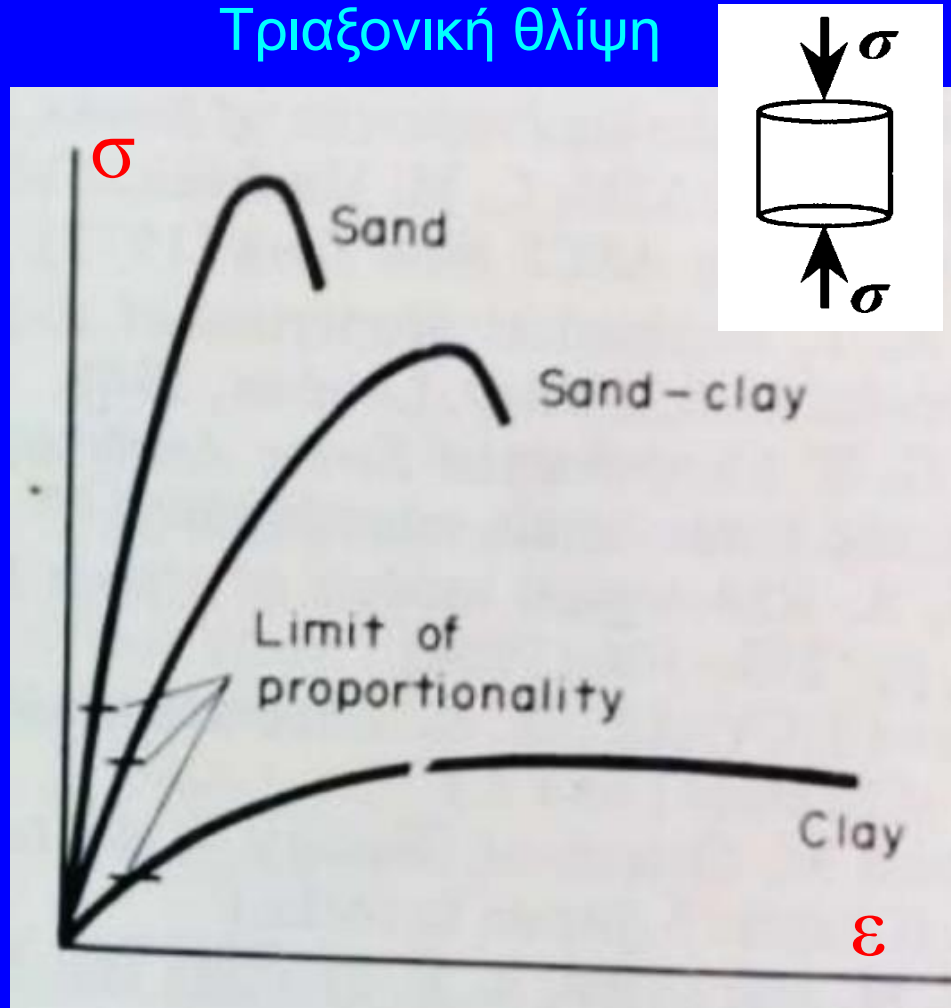
# ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

- Η μορφή της καμπύλης  $\sigma$ - $\epsilon$  διαφέρει αναλόγως του τύπου της φόρτισης
- Ορισμένοι συνδυασμοί φορτίσεων μπορούν να προκαλέσουν αστοχία

## Μονοδιάστατη παραμόρφωση

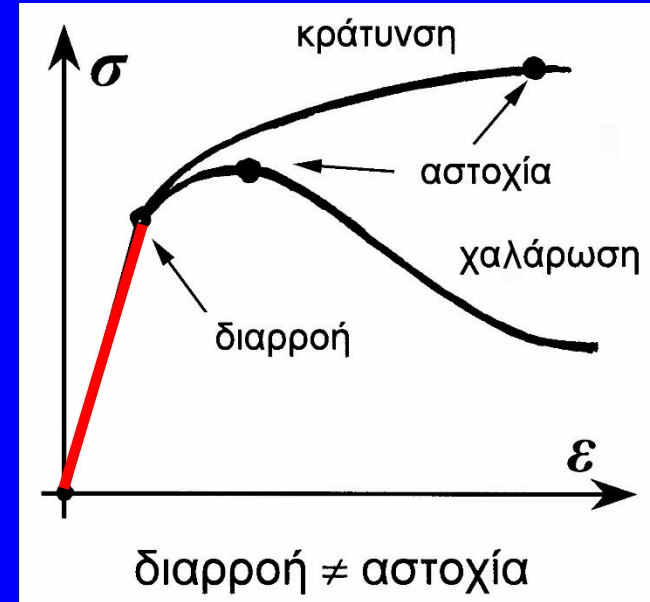
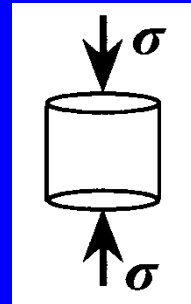
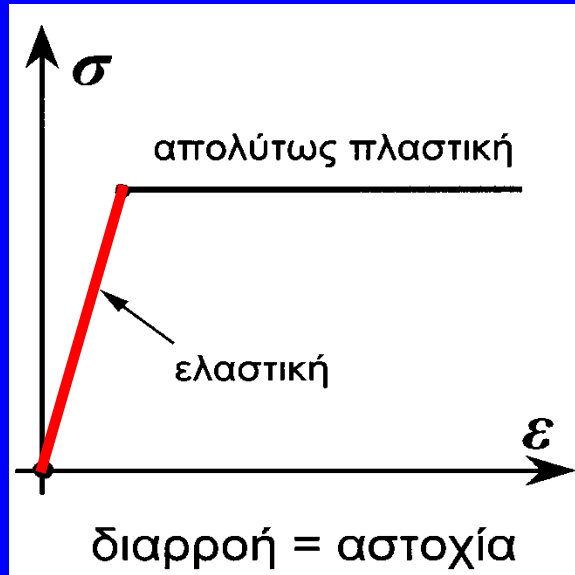


## Τριαξονική θλίψη



# ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

## Παράδειγμα : Φόρτιση σε μονοαξονική θλίψη



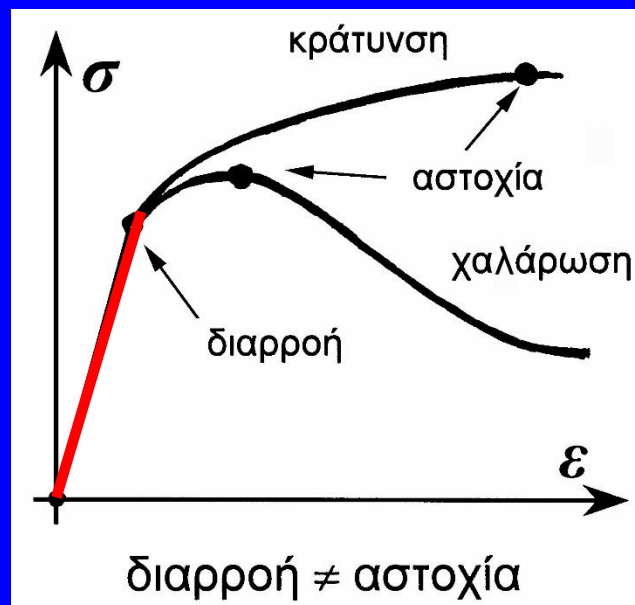
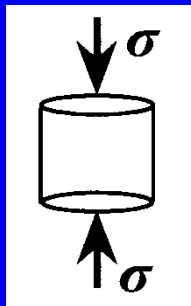
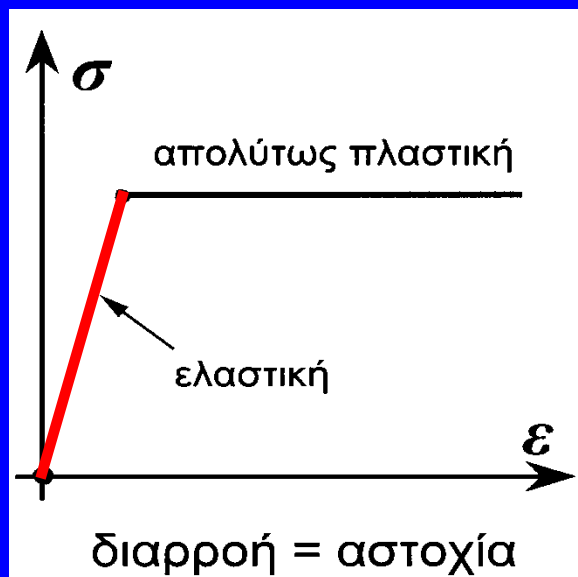
- Οι σχέσεις μεταξύ των τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων ονομάζονται **καταστατικές σχέσεις**
- Στα εδαφικά υλικά, παραμορφώσεις προκαλούνται μόνον από μεταβολές των ενεργών τάσεων ( $\Delta\epsilon \leftrightarrow \Delta\sigma'$ )

Στα εδαφικά υλικά οι καταστατικοί νόμοι συνδέουν :

Παραμορφώσεις ( $\Delta\epsilon_{ij}$ ) με Μεταβολές των ενεργών τάσεων ( $\Delta\sigma'_{kl}$ )

# ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

## Παράδειγμα : Φόρτιση σε μονοαξονική θλίψη



- Ο απλούστερος καταστατικός νόμος είναι η γραμμική, ισότροπη ελαστικότητα (ΓΙΕ)
- Στην γραμμική, ισότροπη ελαστικότητα οι σχέσεις μεταξύ των μεταβολών των ενεργών τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων περιλαμβάνουν δύο σταθερές :

$$E = \text{μέτρο ελαστικότητας} \quad \nu = \text{λόγος του Poisson}$$

# ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα ( $\sigma = E \varepsilon$ )

Στην γραμμική, ισότροπη ελαστικότητα οι σχέσεις μεταξύ των μεταβολών των ενεργών τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων περιλαμβάνουν δύο σταθερές :

$E$  = μέτρο ελαστικότητας       $\nu$  = λόγος του Poisson

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{xx} - \nu (\Delta \sigma'_{yy} + \Delta \sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{xy}$$

$$\Delta \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{yy} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{yz}$$

$$\Delta \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{zz} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{yy}) \right]$$

$$\Delta \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{xz}$$

όπου :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\Delta \tau_{ij} \equiv \Delta \sigma'_{ij}$$

$$\Delta \gamma_{ij} \equiv 2\Delta \varepsilon_{ij}$$

# Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα (ΓΙΕ)

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{xx} - \nu (\Delta \sigma'_{yy} + \Delta \sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{yy} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{zz} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{yy}) \right]$$

$$\Delta \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{xy}$$

$$\Delta \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{yz}$$

$$\Delta \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{xz}$$

## Παρατηρήσεις :

- Όταν το έδαφος είναι ξηρό οι ενεργές τάσεις μπορούν να αντικατασταθούν με τις ολικές (αφού οι πιέσεις πόρων είναι μηδέν:  $\Delta \sigma' = \Delta \sigma - \Delta u$ )
- Οι ορθές τάσεις σχετίζονται μόνον με τις ορθές παραμορφώσεις
- Οι διατμητικές τάσεις σχετίζονται μόνον με τις διατμητικές παραμορφώσεις

## Πόρισμα :

Εάν το έδαφος φορτισθεί μόνον με διατμητικές τάσεις (π.χ. σεισμός) ο όγκος του δεν μεταβάλλεται και συνεπώς δεν συμβαίνει καθίζηση της επιφάνειας.

*Τούτο δεν επιβεβαιώνεται στην πράξη. Άρα, το έδαφος δεν ακολουθεί την ΙΓΕ κατά την σεισμική φόρτιση (τουλάχιστον)*



# Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{xx} - \nu (\Delta \sigma'_{yy} + \Delta \sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{yy} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{zz} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{yy}) \right]$$

$$\Delta \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{xy}$$

$$\Delta \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{yz}$$

$$\Delta \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{xz}$$

Παράγωγα μεγέθη των ελαστικών σταθερών ( $E$ ,  $\nu$ ) :

Μέτρο διάτμησης :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Μέτρο μονοδιάστατης παραμόρφωσης :  $D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Μέτρο ισότροπης συμπίεσης :  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

# Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{xx} - \nu (\Delta \sigma'_{yy} + \Delta \sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{yy} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{zz} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{yy}) \right]$$

$$\Delta \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{xy}$$

$$\Delta \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{yz}$$

$$\Delta \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \Delta \tau_{xz}$$

Ογκομετρική παραμόρφωση :  $\Delta \varepsilon_{vol} \equiv \Delta \varepsilon_{xx} + \Delta \varepsilon_{yy} + \Delta \varepsilon_{zz}$

Με άθροιση των ορθών παραμορφώσεων προκύπτει :

$$\Delta \varepsilon_{vol} = \frac{1}{3K} (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{yy} + \Delta \sigma'_{zz}) = (1/3K) (\Delta \sigma_{xx} + \Delta \sigma_{yy} + \Delta \sigma_{zz}) - (1/K) \Delta u$$

$$\text{αφού : } \Delta \sigma'_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - \Delta u$$

**Πόρισμα :** Κατά την αστράγγιστη φόρτιση εδαφών ( $\Delta \varepsilon_{vol} = 0$ ), η πίεση πόρων μεταβάλλεται κατά :

$$\Delta u = \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{xx} + \Delta \sigma_{yy} + \Delta \sigma_{zz})$$

Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα (ΓΙΕ) και πιέσεις πόρων  
Κατά την αστράγγιστη φόρτιση εδαφών ( $\Delta\varepsilon_{vol}=0$ ), η πίεση πόρων μεταβάλλεται κατά :

$$\Delta u = \frac{1}{3} (\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz})$$

- Η ανάπτυξη των ανωτέρω υπερπιέσεων πόρων οφείλεται στην απαίτηση μηδενικής μεταβολής του όγκου του εδάφους
- Οι υπερπιέσεις πόρων βαθμιαία εκτονώνονται με συνέπεια την μεταβολή των ενεργών τάσεων και χρονικά εξελισσόμενες παραμορφώσεις (στερεοποίηση του εδάφους)

Πορίσματα :

Σύμφωνα με την ΓΙΕ, εάν το έδαφος φορτισθεί μόνον με διατμητικές τάσεις (π.χ. σεισμός)  $\rightarrow$  μόνον διατμητικές παραμορφώσεις, δηλαδή:

1. Ο όγκος δεν μεταβάλλεται  $\rightarrow$  δεν συμβαίνει καθίζηση της επιφάνειας
2. Δεν παρατηρούνται μεταβολές των υδατικών πιέσεων πόρων ( $\Delta u=0$ )

*Και τα δύο ανωτέρω πορίσματα δεν επιβεβαιώνονται στην πράξη. Άρα (τουλάχιστον) κατά την σεισμική φόρτιση το έδαφος δεν ακολουθεί την ΓΙΕ*

# Ρευστοποίηση του εδάφους κατά τον σεισμό της Niigata (1964)



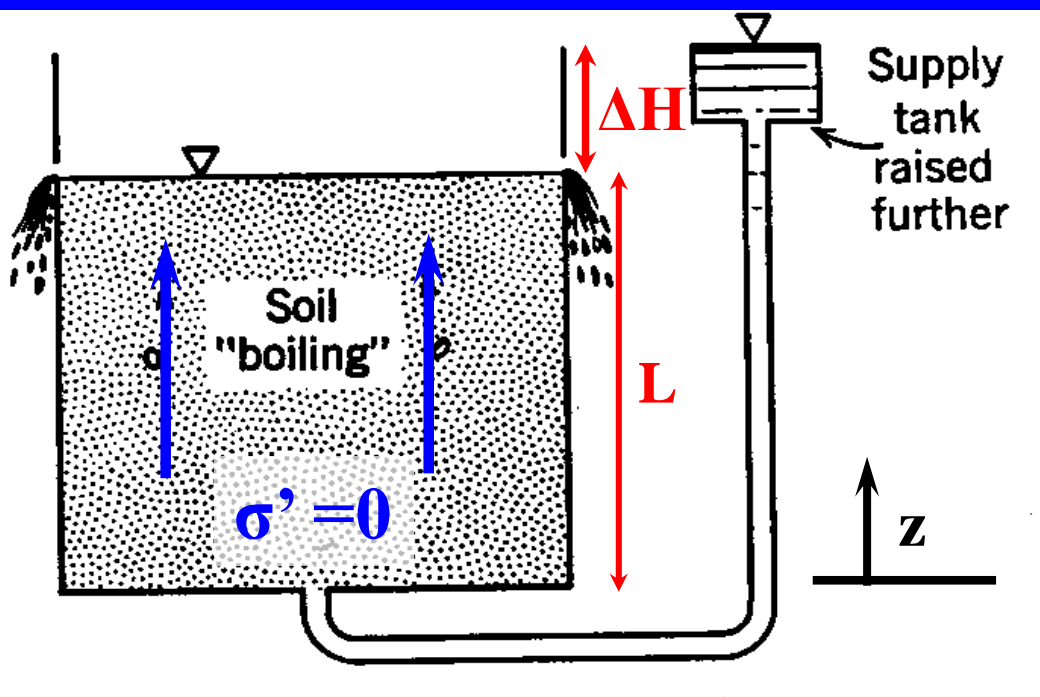
$$\sigma' = \sigma - u$$

Κατά τον σεισμό  $\sigma = \text{σταθ.}$  ενώ οι πιέσεις πόρων αυξάνουν έως ότου  $u = \sigma$ . Τότε  $\sigma' = 0$ , με συνέπεια την πλήρη απώλεια της αντοχής του εδάφους

Παρατήρηση : Ρευστοποίηση του εδάφους μπορεί να συμβεί και λόγω υψηλής υδραυλικής κλίσης

Ενεργό ειδικό βάρος του εδάφους :  $\gamma' = (\gamma - \gamma_w) - i \gamma_w$

Κρίσιμη υδραυλική κλίση είναι η υδραυλική κλίση για την οποία :  $\gamma' = 0$



$$i_{cr} = \frac{\gamma}{\gamma_w} - 1$$

Στο παράδειγμα :  $i = \frac{\Delta H}{L}$

Άρα :  $\Delta H_{cr} = \left( \frac{\gamma}{\gamma_w} - 1 \right) L \approx L$

Στην κρίσιμη κατάσταση οι ενεργές τάσεις είναι μηδενικές (αφού  $\sigma' = \gamma' * d$ ). Συνεπώς οι κόκκοι αιωρούνται στο νερό και το έδαφος χάνει τελείως την αντοχή του.

# Έκφραση των καταστατικών σχέσεων της Γραμμικής Ισότροπης Ελαστικότητας ως προς τις ολικές τάσεις

## 1. Περίπτωση ξηρού εδάφους :

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma'_{ij} \quad \text{και συνεπώς :}$$

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \Delta\sigma_{xx} - \nu(\Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}) \right]$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[ \Delta\sigma_{yy} - \nu(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{zz}) \right]$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[ \Delta\sigma_{zz} - \nu(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy}) \right]$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \Delta\tau_{xy}$$

$$\Delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \Delta\tau_{yz}$$

$$\Delta\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \Delta\tau_{xz}$$

Οι ανωτέρω σχέσεις ισχύουν και στην περίπτωση εδάφους με νερό, όταν οι συνθήκες φόρτισης είναι αρκετά αργές ώστε να επιτυγχάνεται πλήρης στράγγιση (δηλαδή χωρίς να αναπτύσσονται υπερτιέσεις πόρων)

## Έκφραση των καταστατικών σχέσεων της ΓΕ ως προς τις ολικές τάσεις

2. Περίπτωση κορεσμένου εδάφους υπό αστράγγιστες συνθήκες :  
( δηλαδή φόρτιση του εδάφους χωρίς μεταβολή του όγκου του )

$$\Delta\sigma'_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \Delta u \quad \text{όπου :} \quad \Delta u = \frac{1}{3}(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz})$$

$$\text{Π.χ: } \Delta\sigma'_{xx} = \Delta\sigma_{xx} - \Delta u = (2/3) \Delta\sigma_{xx} - (1/3) \Delta\sigma_{yy} - (1/3) \Delta\sigma_{zz}$$

Αντικατάσταση στις σχέσεις  
της ελαστικότητας :

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{xx} - \nu(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz})]$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{yy} - \nu(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz})]$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{zz} - \nu(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy})]$$

Δίνει :

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_u} [\Delta\sigma_{xx} - \nu_u(\Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz})]$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_u} [\Delta\sigma_{yy} - \nu_u(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{zz})]$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_u} [\Delta\sigma_{zz} - \nu_u(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy})]$$

$$\text{όπου :} \quad E_u = \frac{3E}{2(1+\nu)} \quad \nu_u = \frac{1}{2}$$



# Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα (ΓΙΕ)

Γιατί χρησιμοποιείται η Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα ;

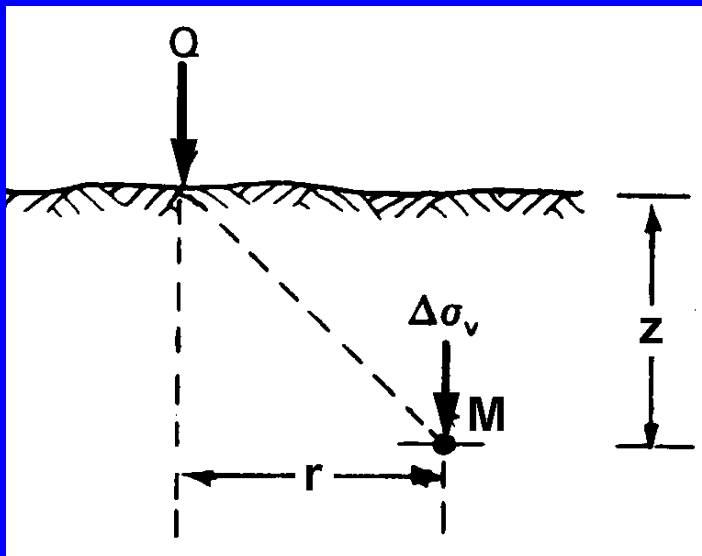
1. Είναι ο απλούστερος καταστατικός νόμος
2. Λόγω της απλότητας των σχέσεων, υπάρχουν αναλυτικές λύσεις σε πολλά πρακτικά προβλήματα
3. Σε αρκετά προβλήματα, οι λύσεις με θεώρηση ΓΙΕ είναι αρκετά ακριβείς για τις πρακτικές εφαρμογές (όχι στην περίπτωση σεισμικής φόρτισης)
4. Δεν έχει βρεθεί ακόμη κάποιος άλλος καταστατικός νόμος που να μπορεί να δώσει σχετικώς απλές και αξιόπιστες λύσεις στα πρακτικά προβλήματα
5. Με την παραδοχή της ΓΙΕ ισχύει η αρχή της επαλληλίας που είναι πολύ χρήσιμη στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων



## Αρχή της επαλληλίας :

Σε οποιαδήποτε γραμμική συνάρτηση  $y = F(x)$  ισχύει :

$$F(ax_1 + bx_2 + \dots + mx_n) = aF(x_1) + bF(x_2) + \dots + mF(x_n)$$



## Εφαρμογή :

Λύση Boussinesq για ένα σημειακό φορτίο στην επιφάνεια ελαστικού ημιχώρου :

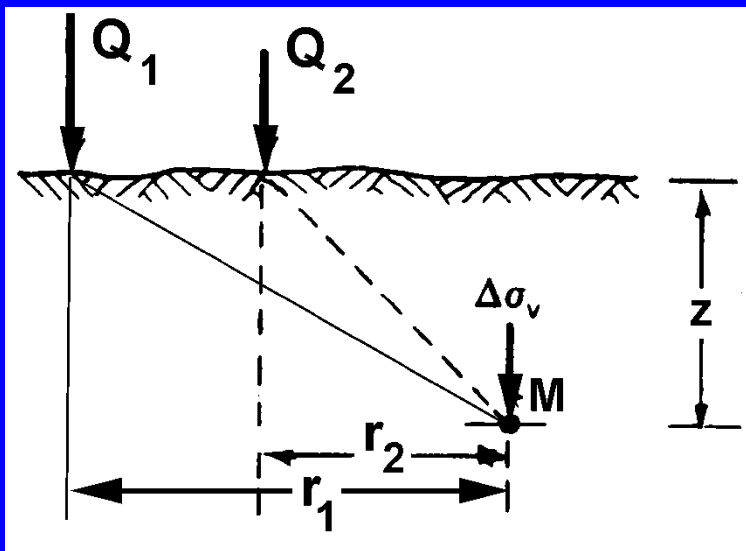
$$\Delta\sigma_v = \frac{3Q}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

Λύση για δύο φορτία :

$$\Delta\sigma_{v1} = \frac{3Q_1}{2\pi} \frac{z^3}{(r_1^2 + z^2)^{5/2}}$$

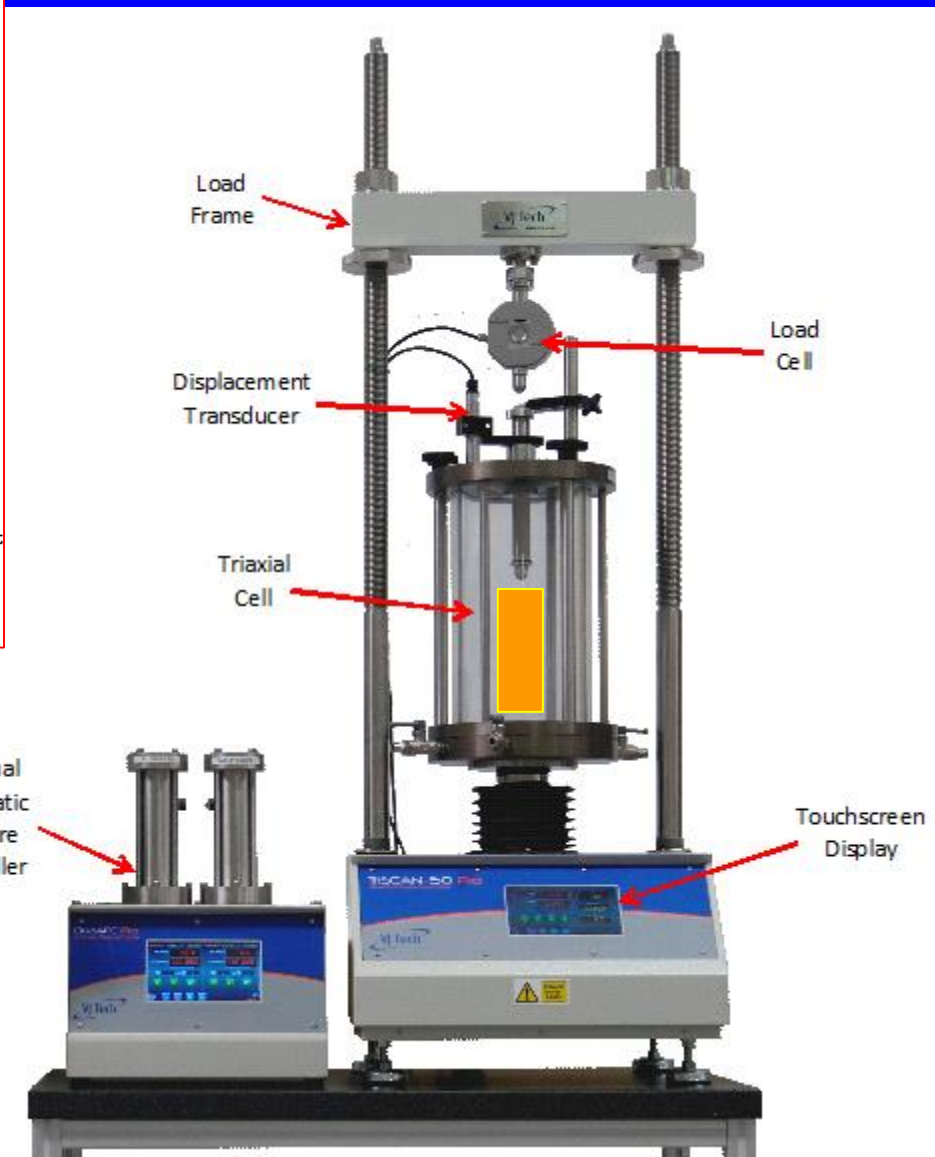
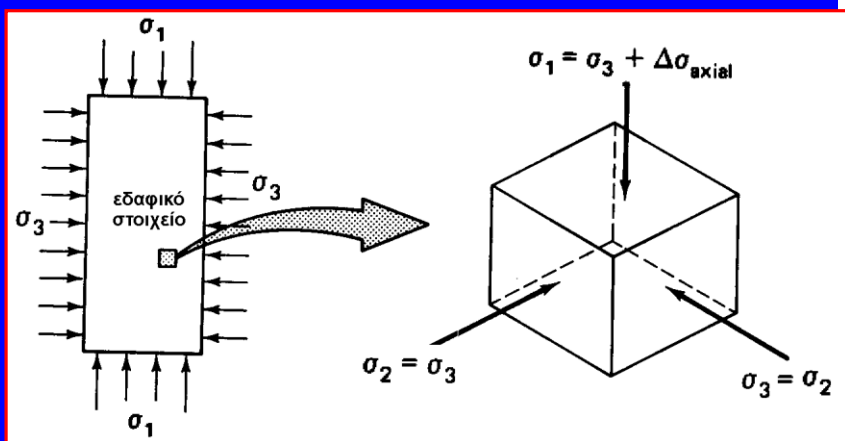
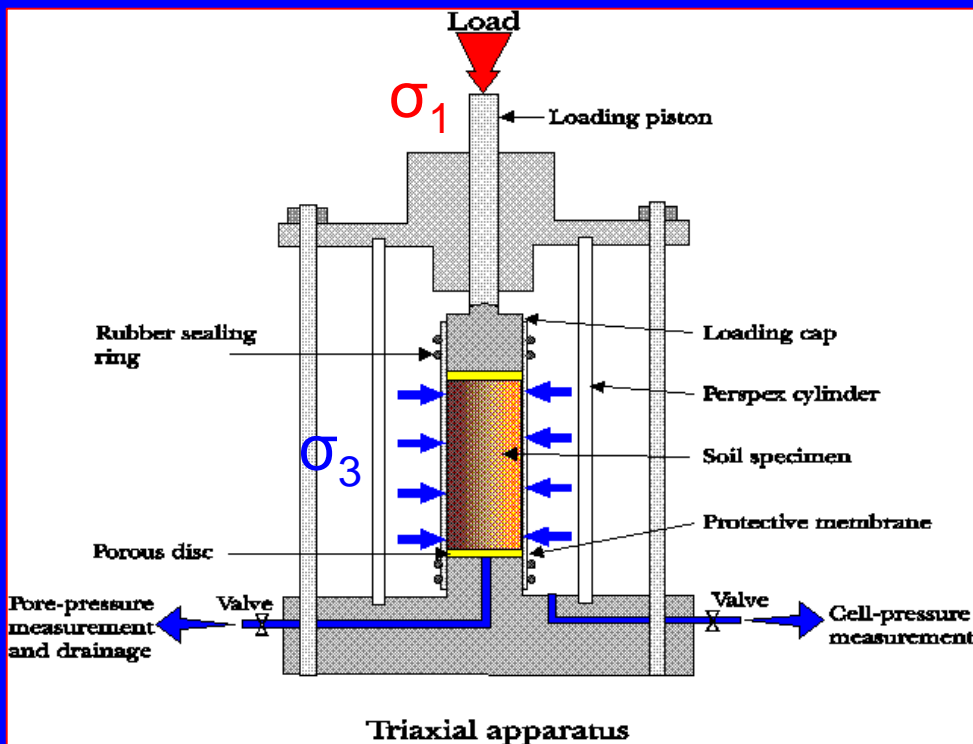
$$\Delta\sigma_{v2} = \frac{3Q_2}{2\pi} \frac{z^3}{(r_2^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\Delta\sigma_v = \Delta\sigma_{v1} + \Delta\sigma_{v2}$$



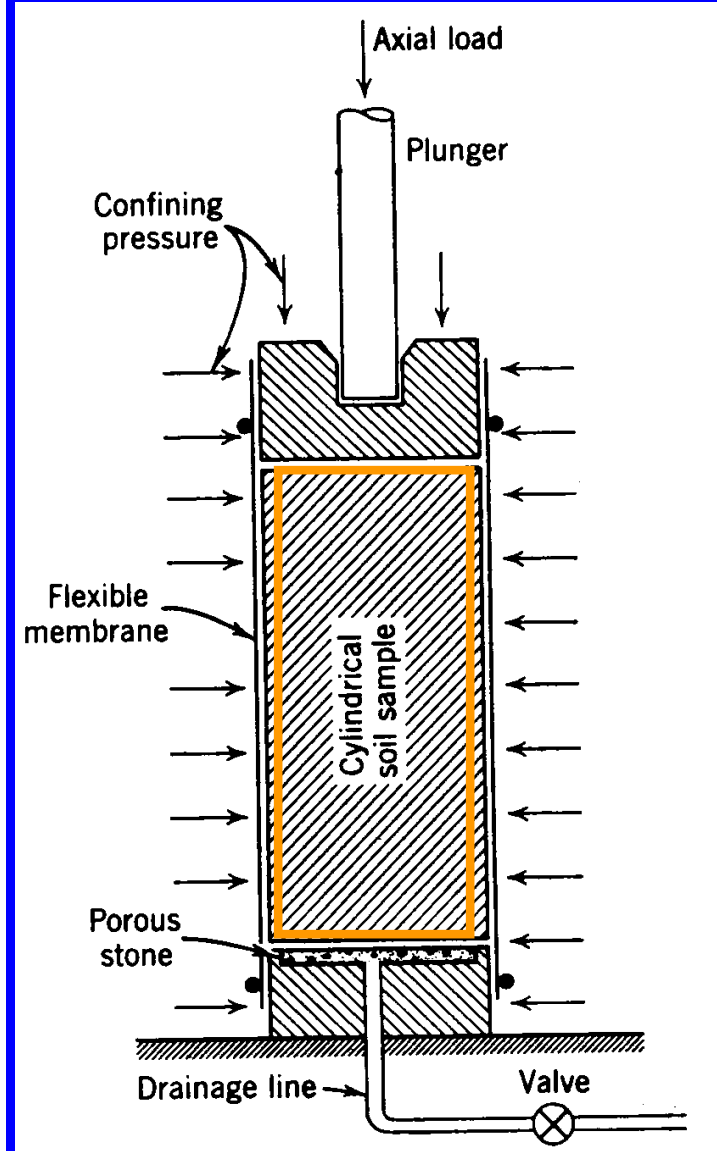
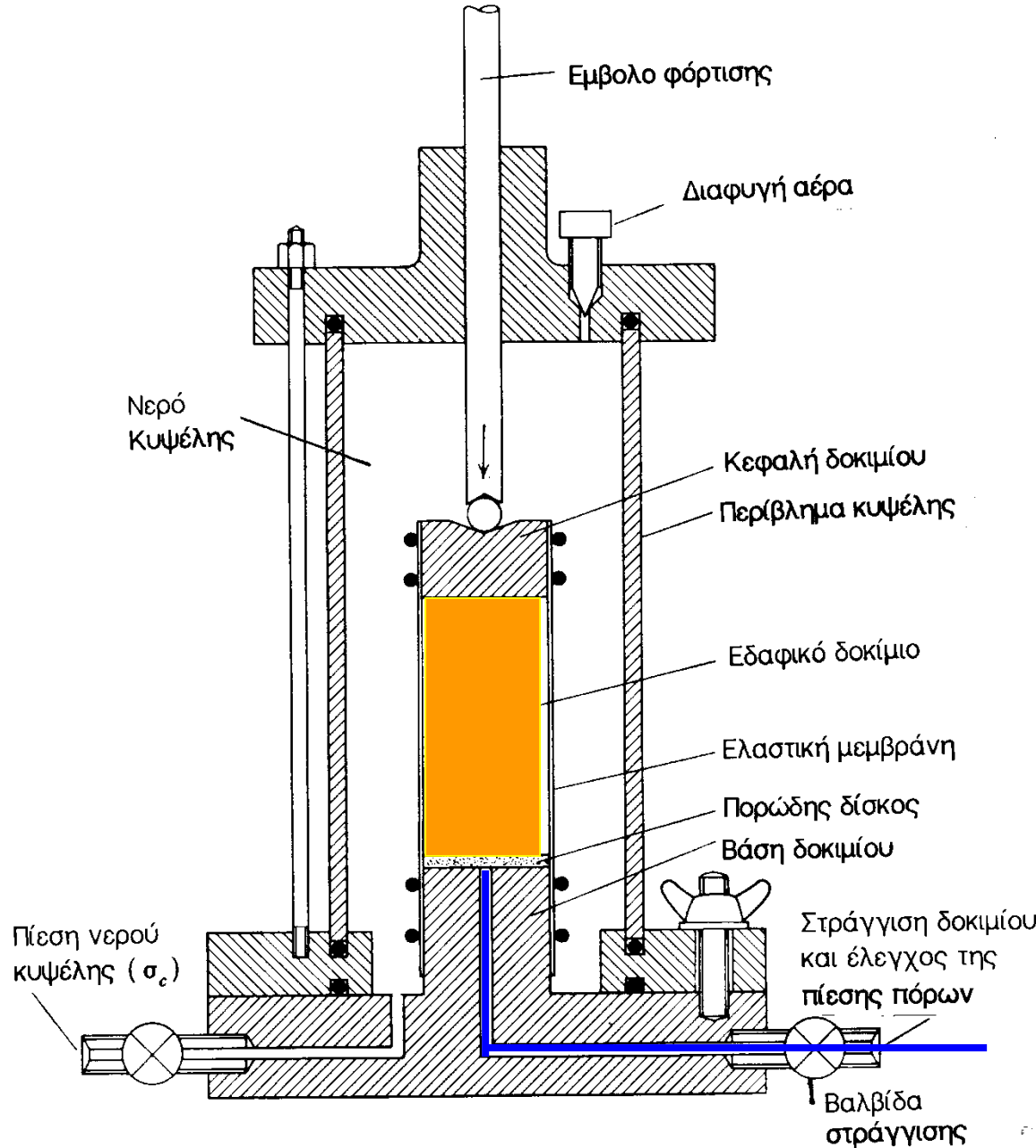
# Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

## 1. Τριαξονική θλίψη: Επιβολή $\sigma_1$ και $\sigma_2 = \sigma_3$



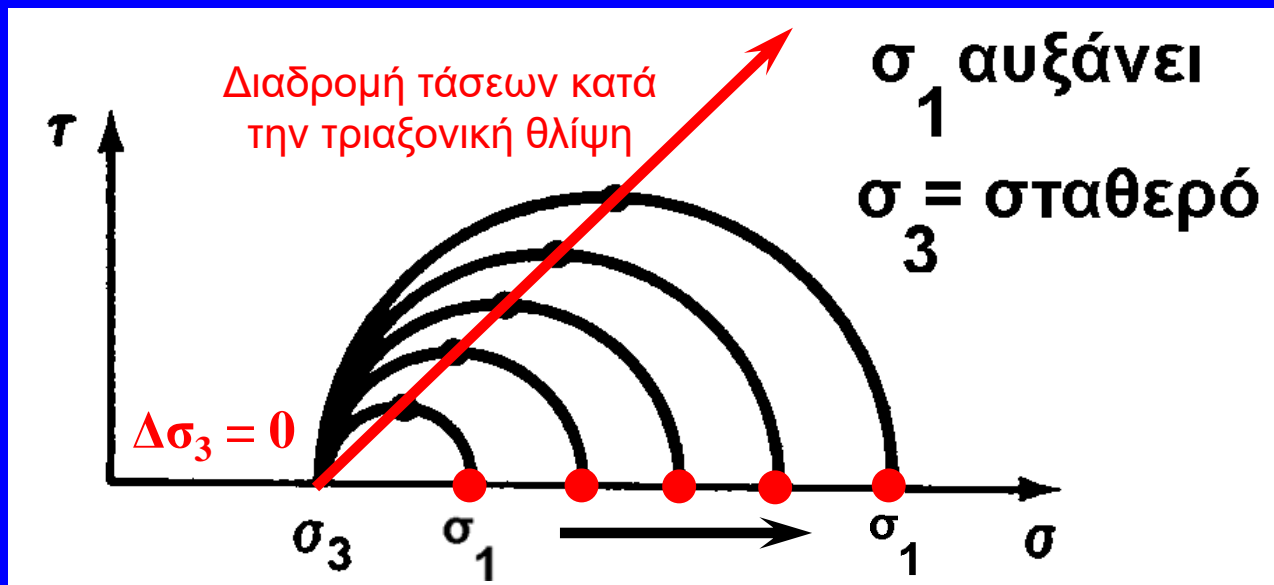
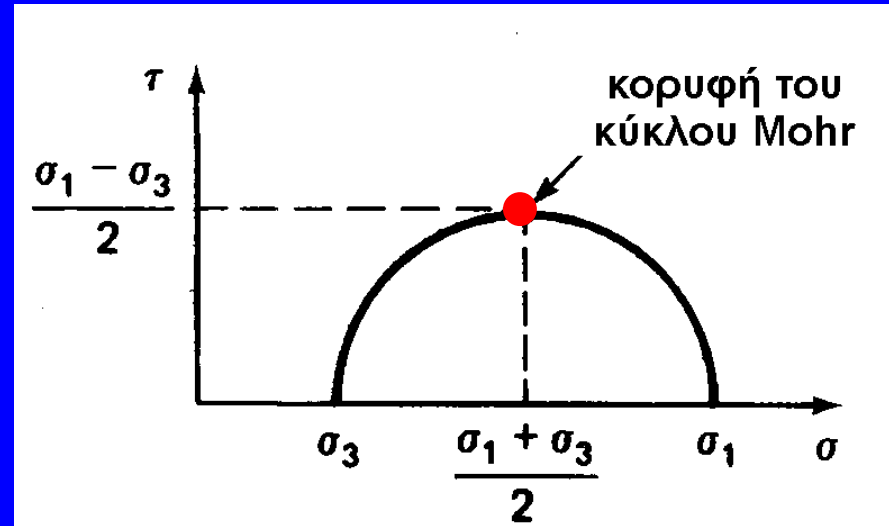
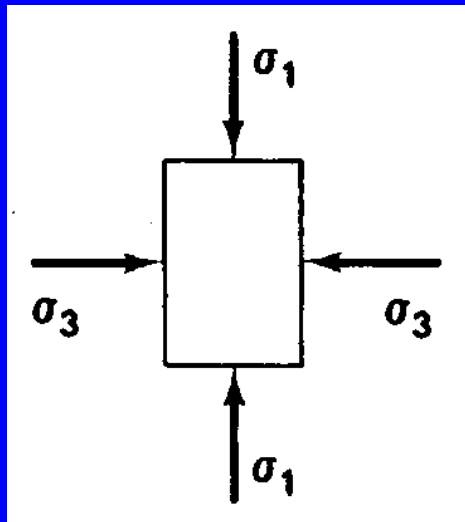
# Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

## 1. Τριαξονική θλίψη



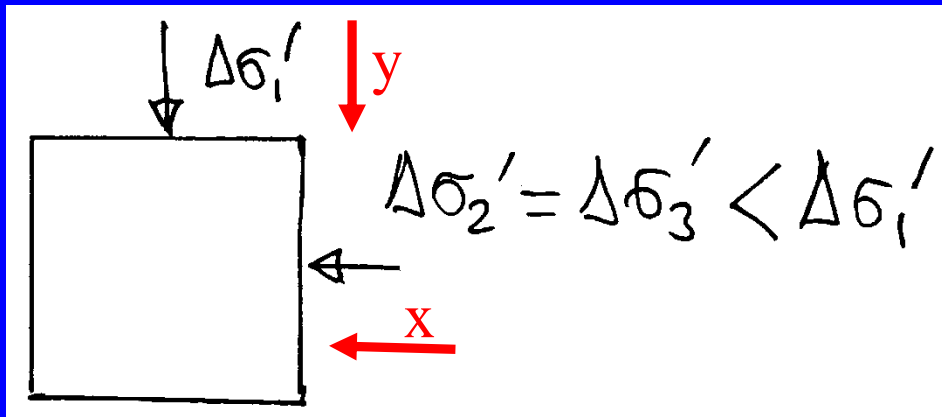
# Περιγραφή της φόρτισης εδαφικού στοιχείου μέσω της διαδρομής των τάσεων

Παρακολούθηση της εξέλιξης του κύκλου Mohr μέσω της κίνησης της κορυφής του :

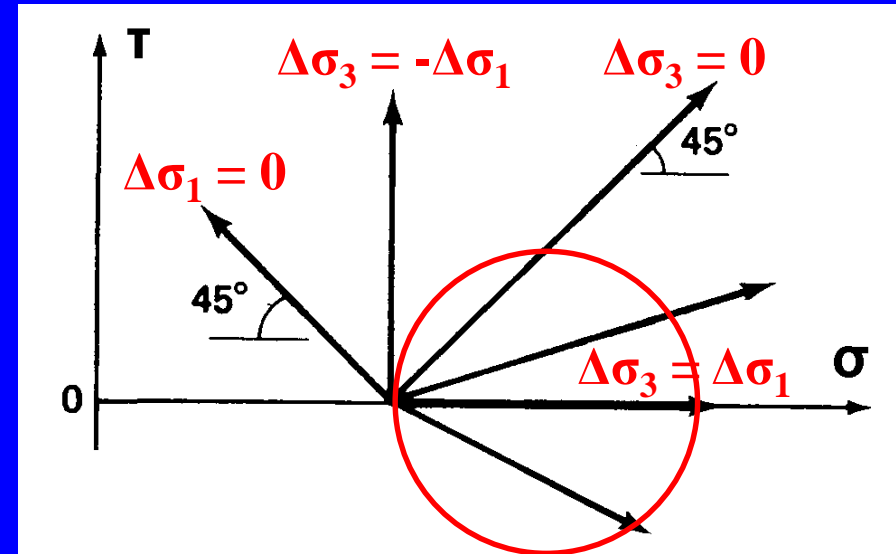


# Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

## 1. Τριαξονική θλίψη



## Διαδρομή τάσεων



Αναλόγως του λόγου  $\Delta\sigma_1/\Delta\sigma_3$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{yy} - 2\nu\Delta\sigma'_{xx}]$$

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [(1-\nu)\Delta\sigma'_{xx} - \nu\Delta\sigma'_{yy}]$$

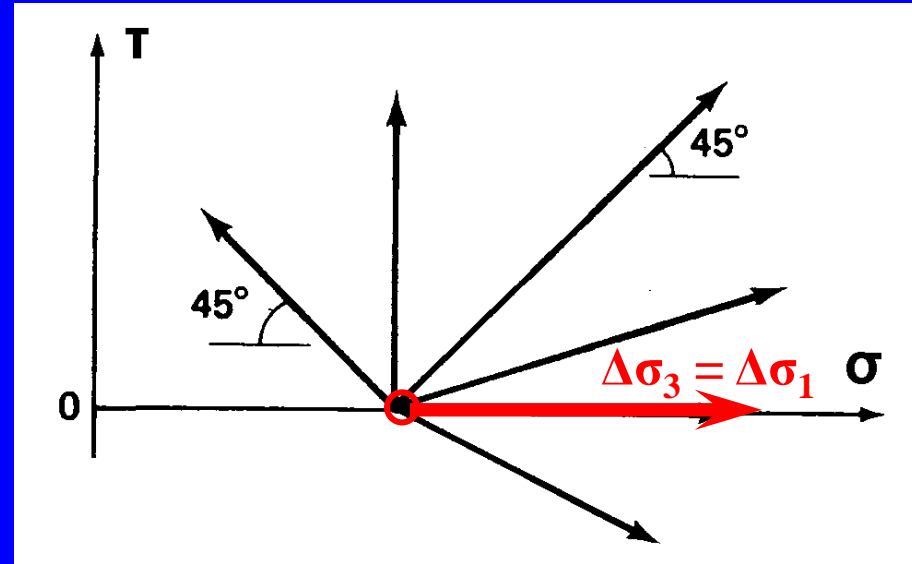
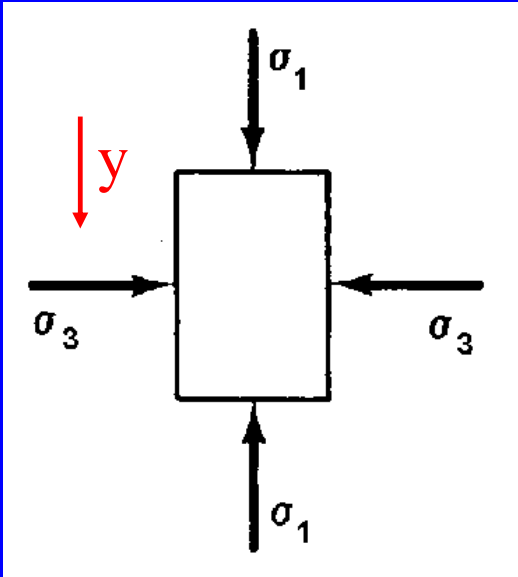
$$\Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{yz} = \Delta\gamma_{xz} = 0$$

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{xx} - \nu(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz})]$$
$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{yy} - \nu(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz})]$$
$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{zz} - \nu(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy})]$$

# Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

## 2. Ισότροπη θλίψη ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ )

Διαδρομή τάσεων



$$\Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{yz} = \Delta\gamma_{xz} = 0$$

$$\Delta\sigma'_{xx} = \Delta\sigma'_{yy} = \Delta\sigma'_{zz} = \Delta\sigma'_c$$

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \Delta\varepsilon_{yy} = \Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E} \Delta\sigma'_c$$

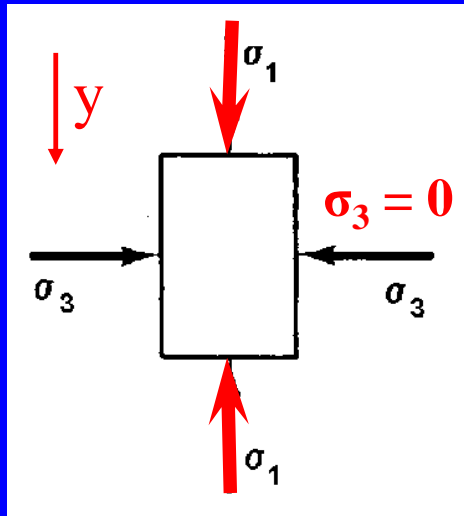
$$\Delta\varepsilon_{vol} = \frac{1}{K} \Delta\sigma'_c \quad \text{όπου: } K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Μέτρο ισότροπης συμπίεσης

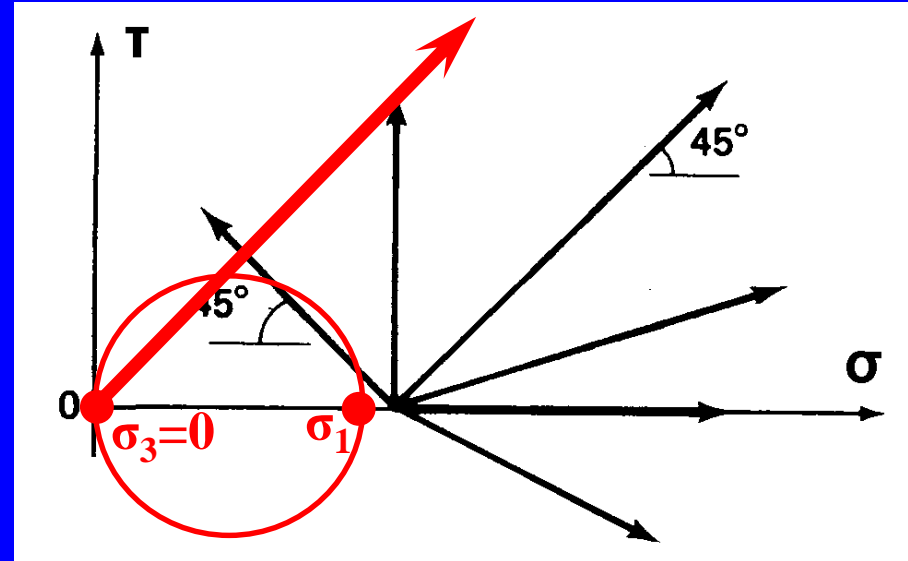
$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{xx} - \nu(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz})] \\ \Delta\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{yy} - \nu(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz})] \\ \Delta\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\Delta\sigma'_{zz} - \nu(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy})] \end{aligned}$$

# Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

## 3. Μονοδιάστατη θλίψη ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ )



Διαδρομή τάσεων



$$\Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{yz} = \Delta\gamma_{xz} = 0$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \Delta\sigma'_{yy}$$

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \Delta\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \Delta\sigma'_{yy}$$

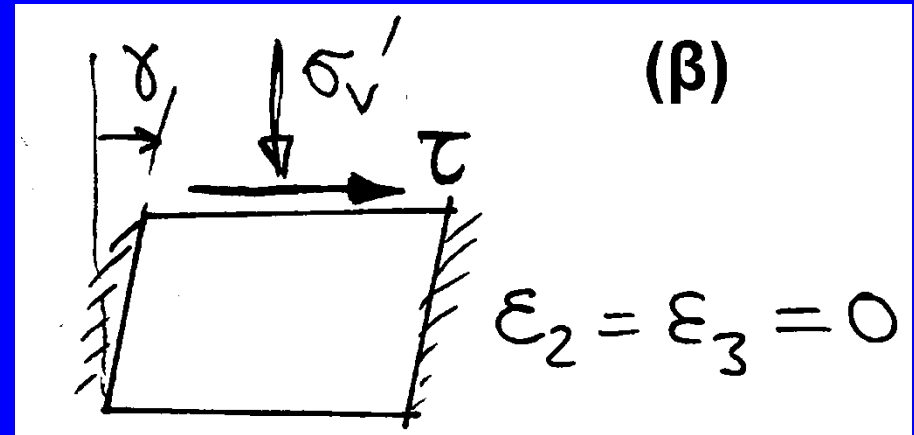
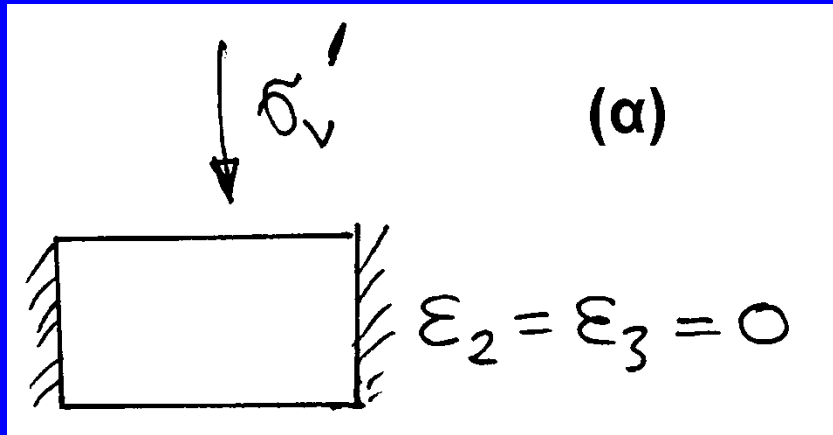
$$\Delta\varepsilon_{vol} = \frac{1}{3K} \Delta\sigma'_{yy} \quad \text{όπου:} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Μέτρο ισότροπης συμπίεσης

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[ \Delta\sigma'_{xx} - \nu(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz}) \right] \\ \Delta\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[ \Delta\sigma'_{yy} - \nu(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz}) \right] \\ \Delta\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[ \Delta\sigma'_{zz} - \nu(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy}) \right] \end{aligned}$$

# Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

## 4. Απλή διάτμηση



$$\Delta\sigma'_{xx} = \Delta\sigma'_{yy} = \Delta\sigma'_{zz} = 0$$

$$\Delta\tau_{xy} = G \Delta\gamma_{xy}$$

$$\Delta\tau_{yz} = \Delta\tau_{zx} = 0$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \Delta\tau_{xy}$$

$$\Delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \Delta\tau_{yz}$$

$$\Delta\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \Delta\tau_{xz}$$

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \Delta\sigma'_{xx} - \nu (\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[ \Delta\sigma'_{yy} - \nu (\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz}) \right]$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[ \Delta\sigma'_{zz} - \nu (\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy}) \right]$$

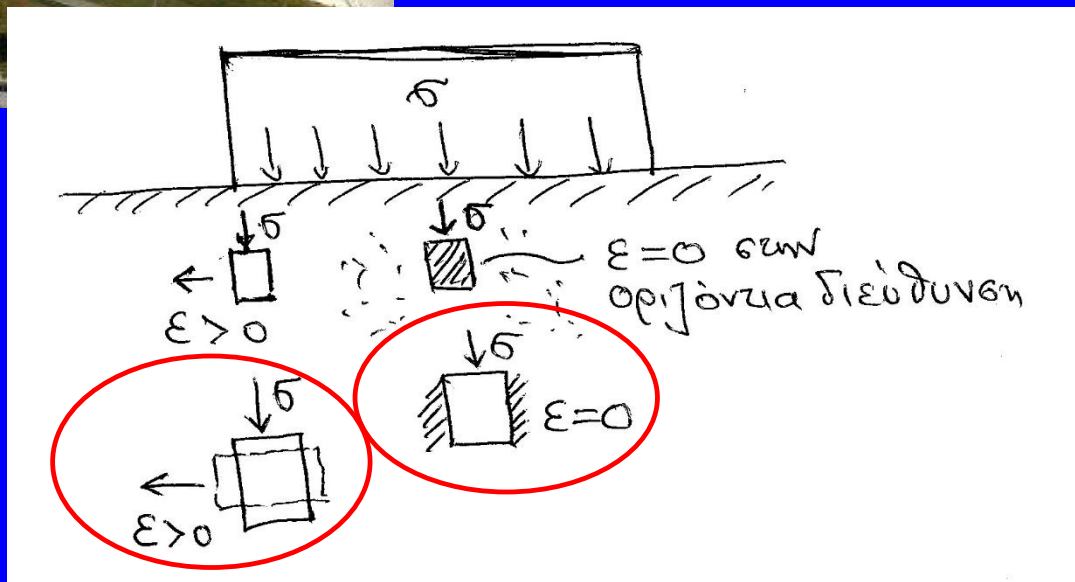


# Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

## 5. Μονοδιάστατη παραμόρφωση ( $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ )

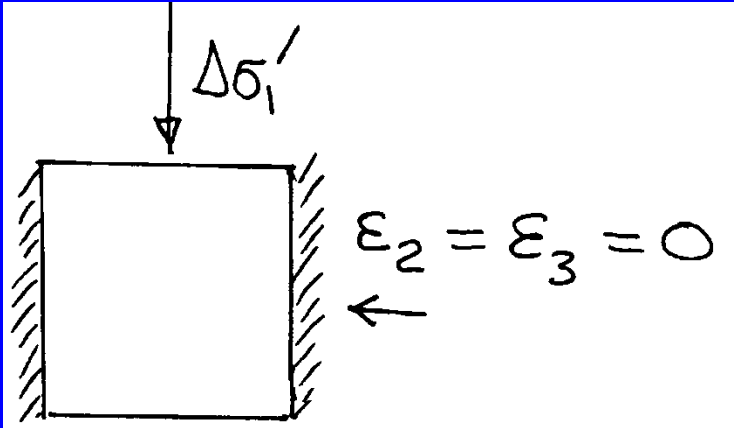


Φόρτιση εδάφους από δεξαμενές καυσίμων

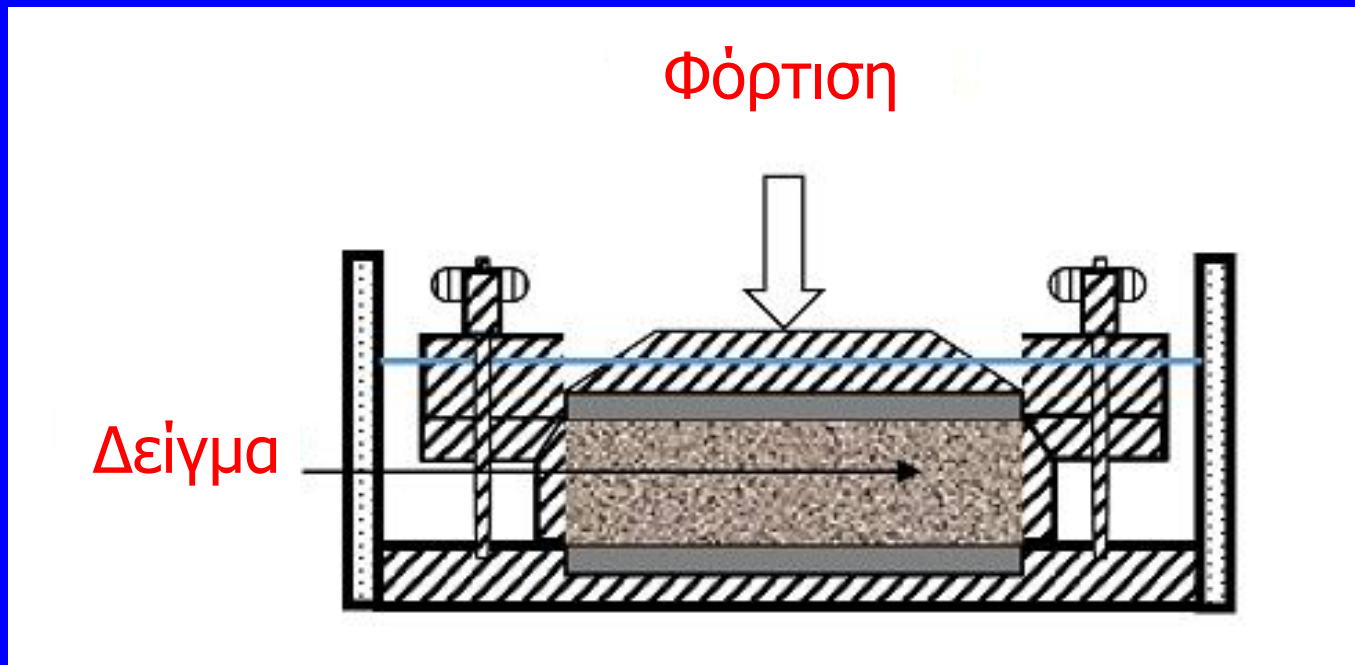


# Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

## 5. Μονοδιάστατη παραμόρφωση ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ )



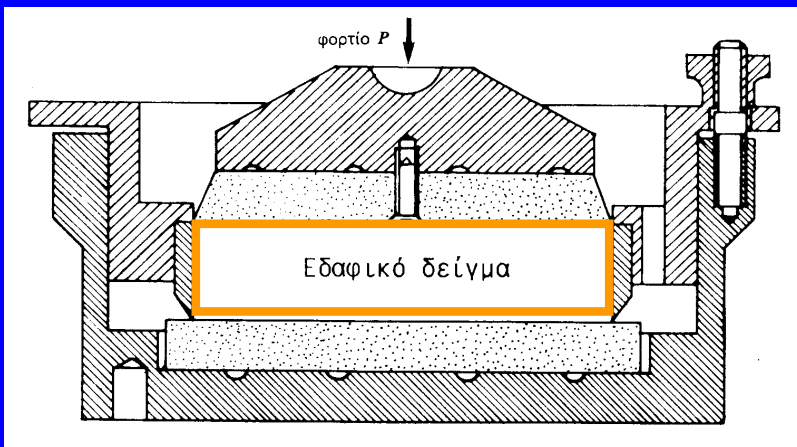
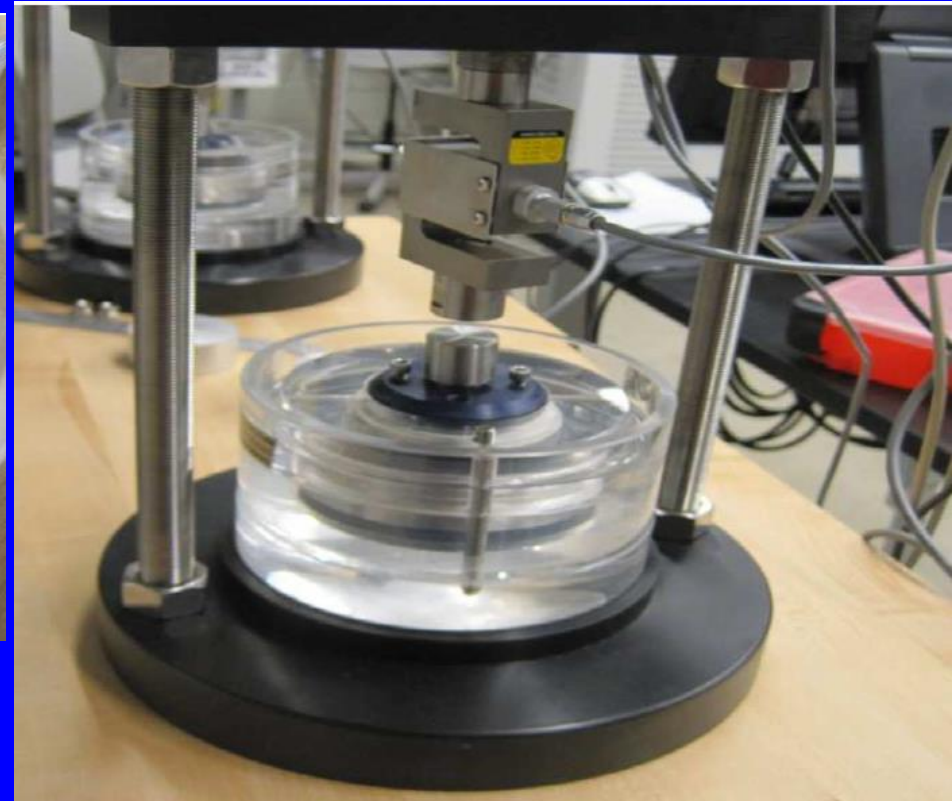
Πειραματική διάταξη της μονοδιάστατης παραμόρφωσης :  
Δοκιμή συμπίεσομέτρου



# Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

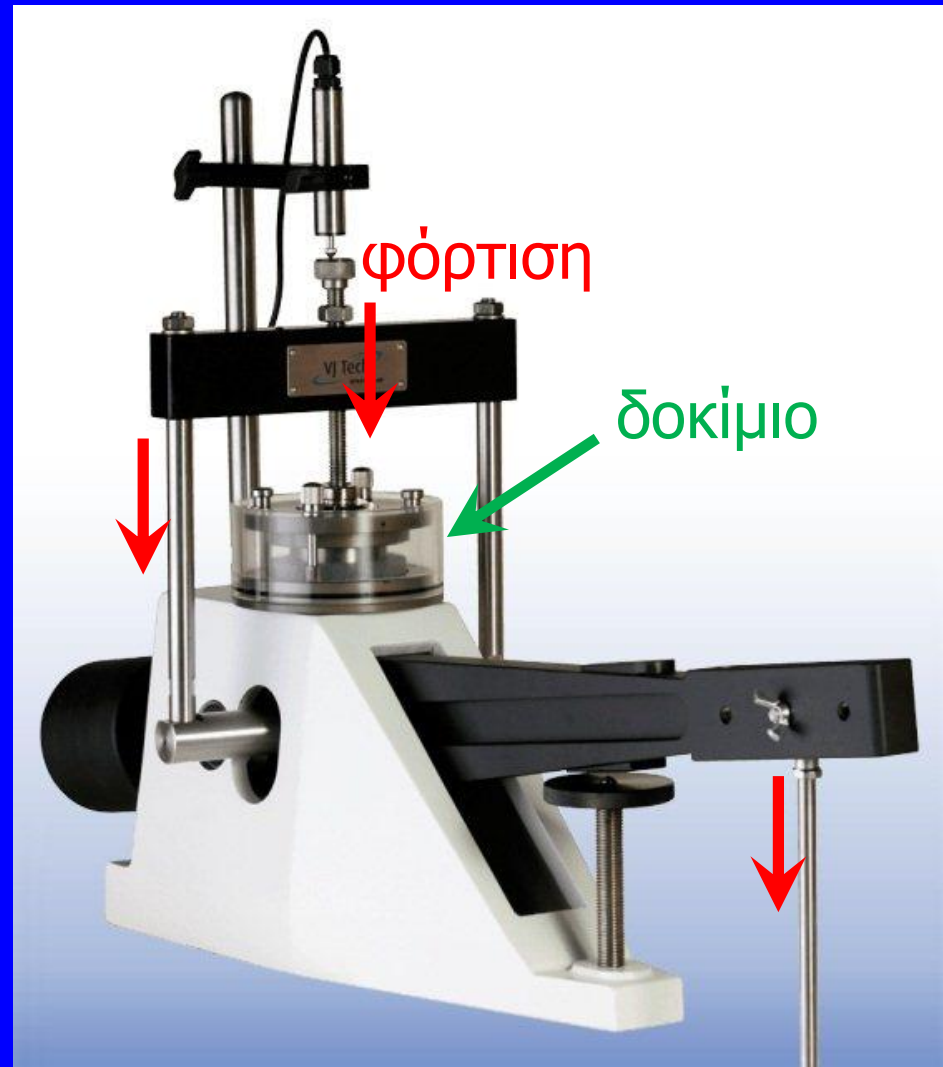
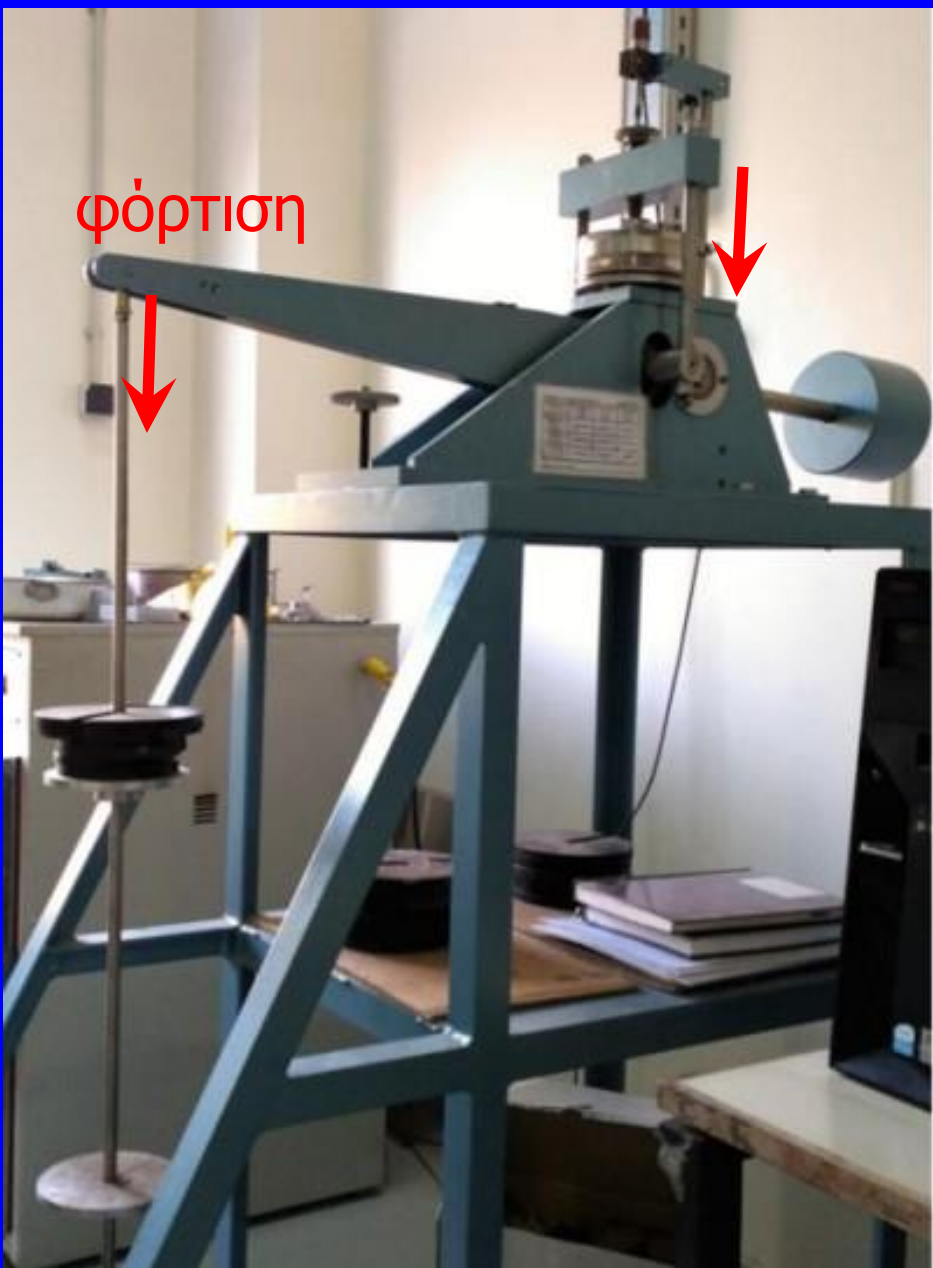
Μονοδιάστατη παραμόρφωση ( $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ )

Πειραματική διάταξη : δοκιμή του συμπιεσομέτρου

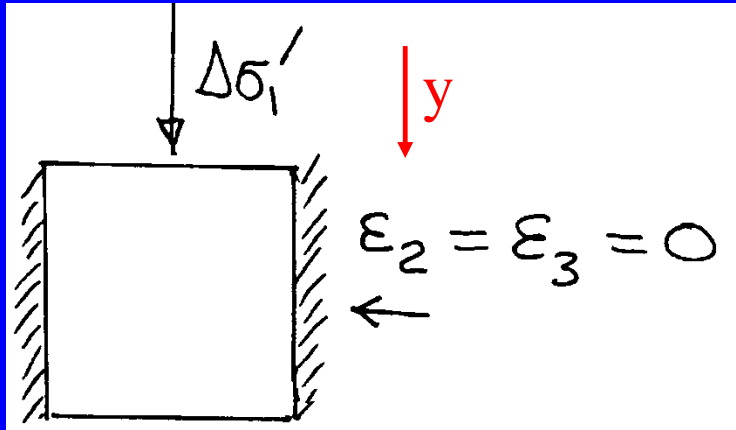




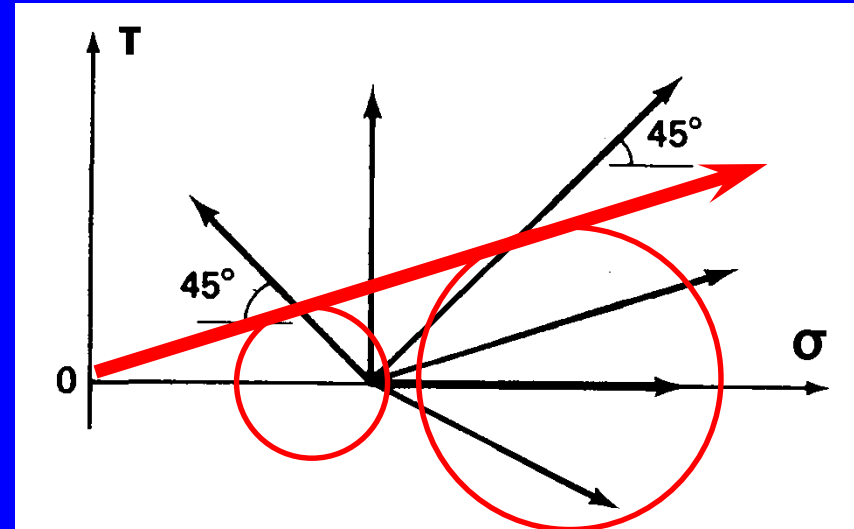
# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (δοκιμή συμπίεσόμετρου)



# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)



## Διαδρομή τάσεων



$$\Delta \varepsilon_{xx} = \Delta \varepsilon_{zz} = \Delta \gamma_{xy} = \Delta \gamma_{yz} = \Delta \gamma_{xz} = 0$$

$$\Delta \varepsilon_{yy} = \frac{1}{D} \Delta \sigma'_{yy} \quad \text{όπου : } D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Μέτρο μονοδιάστατης παραμόρφωσης

$$\Delta \sigma'_{xx} = \Delta \sigma'_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} \Delta \sigma'_{yy}$$

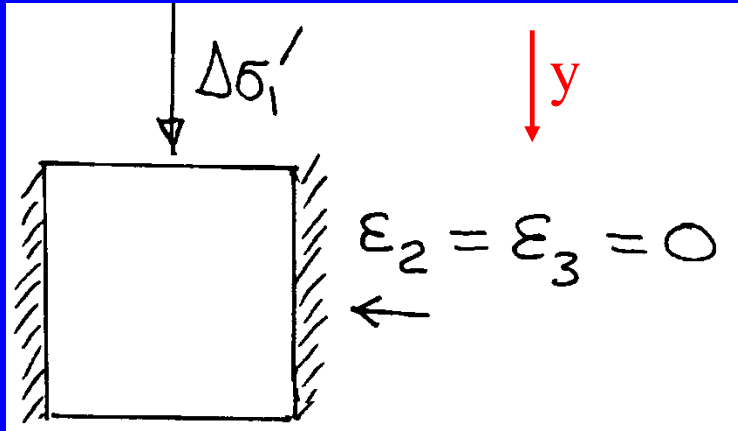
Λόγος μονοδιάστατης παραμόρφωσης :

$$K_o \equiv \frac{\Delta \sigma'_h}{\Delta \sigma'_v} = \frac{\Delta \sigma'_{xx}}{\Delta \sigma'_{yy}}$$

Με θεώρηση ΓΙΕ :  $K_o = \frac{\nu}{1-\nu}$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{xx} - \nu (\Delta \sigma'_{yy} + \Delta \sigma'_{zz}) \right] \\ \Delta \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{yy} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{zz}) \right] \\ \Delta \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[ \Delta \sigma'_{zz} - \nu (\Delta \sigma'_{xx} + \Delta \sigma'_{yy}) \right] \end{aligned}$$

# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)



$$\Delta \varepsilon_{yy} = \frac{1}{D} \Delta \sigma'_{yy} \quad D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\Delta \sigma'_{xx} = \Delta \sigma'_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} \Delta \sigma'_{yy}$$

Λόγος μονοδιάστατης παραμόρφωσης:  $K_o \equiv \frac{\Delta \sigma'_h}{\Delta \sigma'_v} = \frac{\Delta \sigma'_{xx}}{\Delta \sigma'_{yy}}$  για ΓΙΕ:  $K_o = \frac{\nu}{1-\nu}$

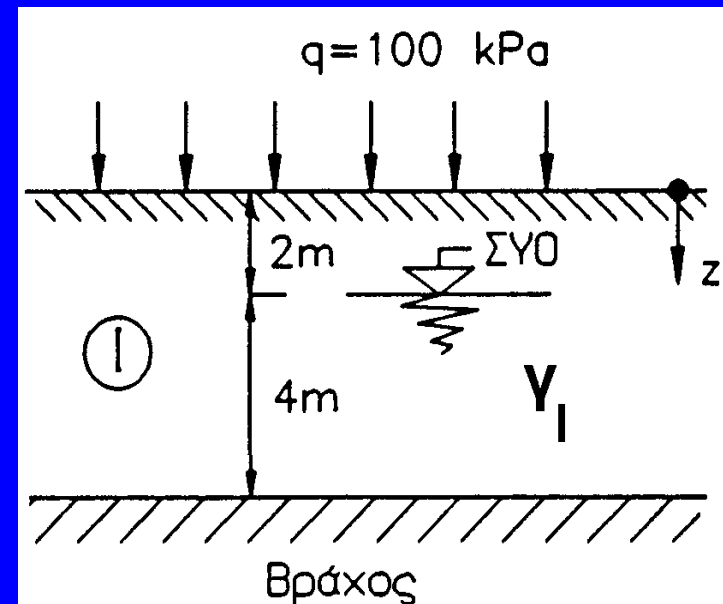
Παράδειγμα εφαρμογής:

$$E=20 \text{ MPa}, \nu=1/3$$

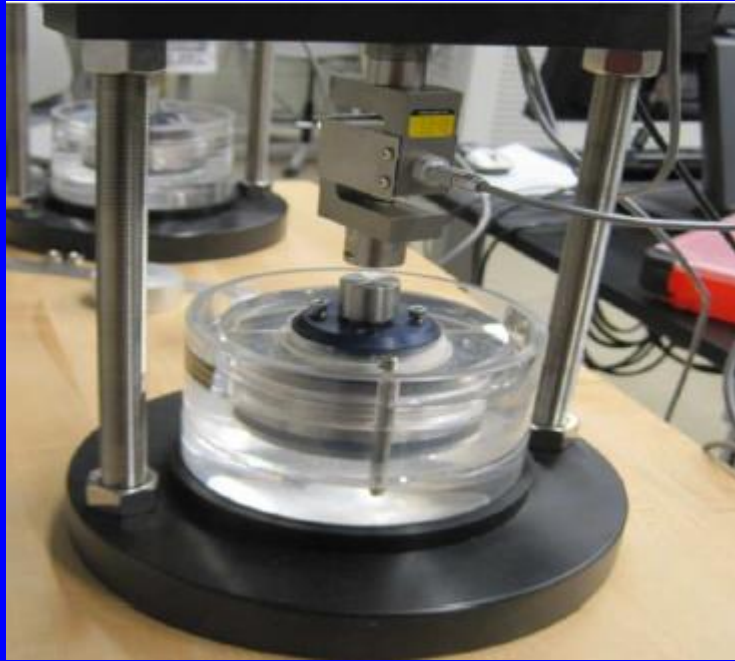
$$\text{Άρα: } D=1.5 * E = 30 \text{ MPa}, K_o=0.50$$

Συμπίεση του εδαφικού στρώματος:

$$\delta = \Delta \varepsilon_{yy} \cdot H = \frac{\Delta \sigma'_{yy}}{D} \cdot H = \frac{100}{30000} \cdot 600 = 2 \text{ cm}$$

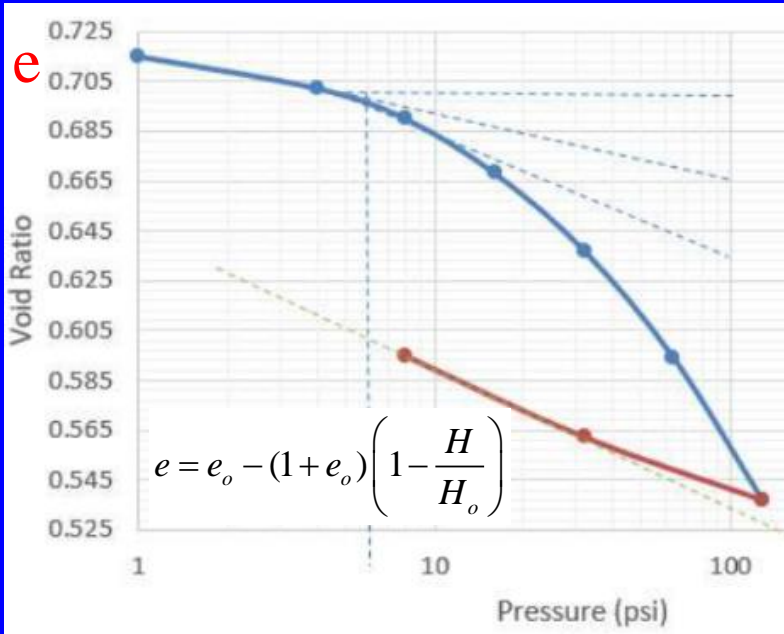


# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

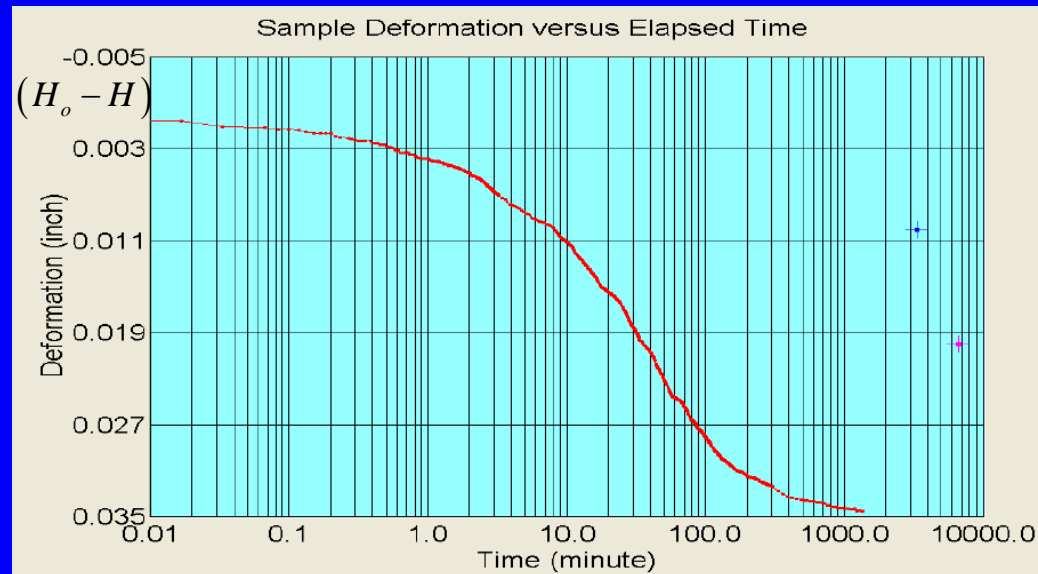


## Πρόγραμμα βημάτων φόρτισης και αποφόρτισης

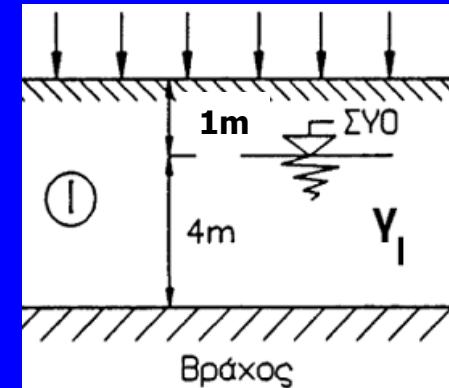
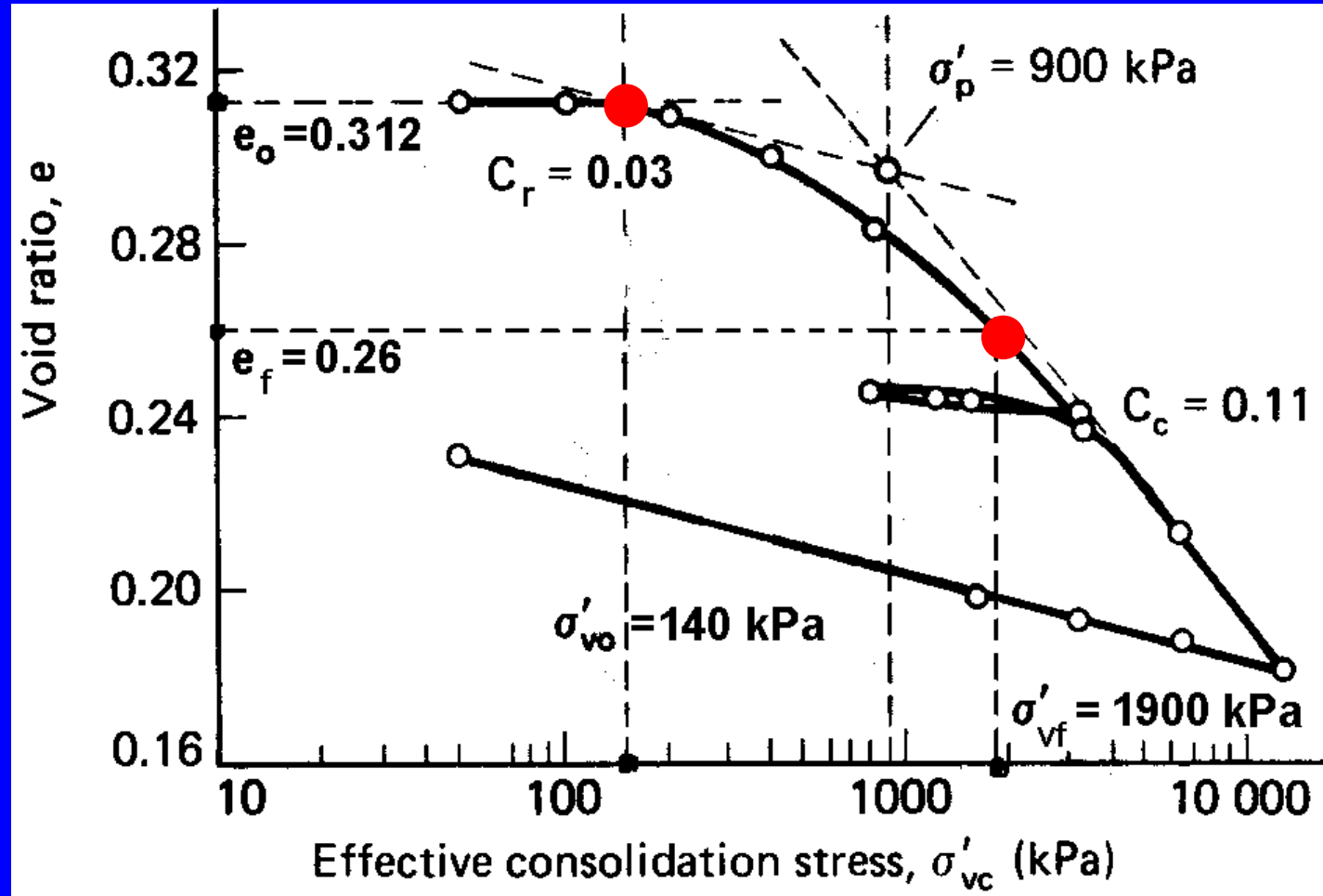
Loading Step	Stress (kPa)	Load (lbs.)	Duration (hr.)	Comment
1	50	35.60	24	Loading
2	100	71.20	24	Loading
3	200	142.41	24	Loading
4	400	284.81	24	Loading
5	800	569.63	24	Loading
6	400	284.81	24	Unloading
7	200	142.41	24	Unloading
8	100	71.20	24	Unloading
9	50	35.60	24	Unloading



## Διάγραμμα καθίζησης – χρόνου σε ένα βήμα φόρτισης



# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)



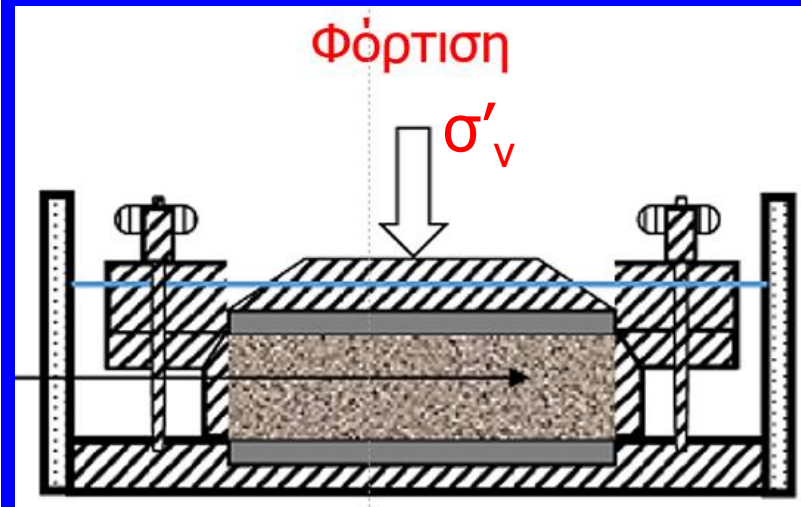
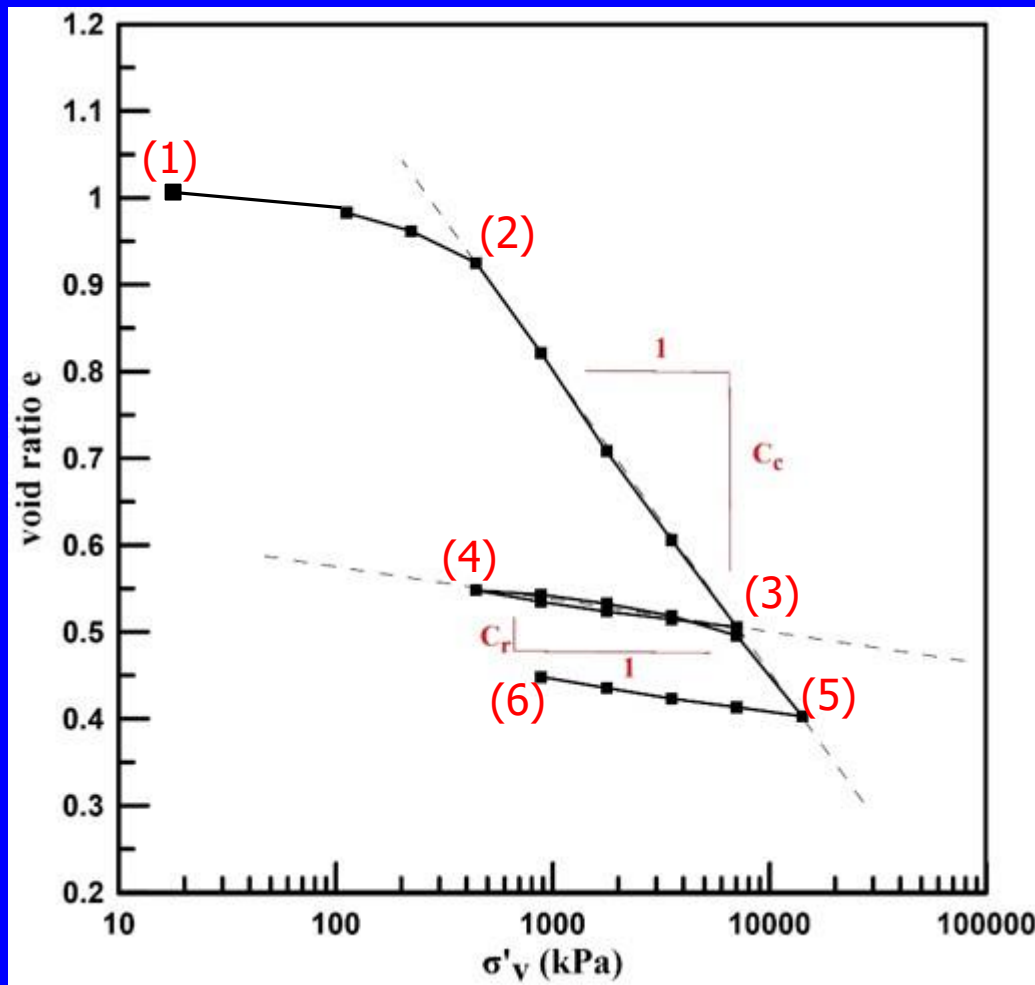
Παράδειγμα εφαρμογής : Συμπύεση στρώσης πάχους 5m λόγω αύξησης της κατακόρυφης ενεργής τάσης από 140 kPa σε 1900 kPa.

$$\Delta \varepsilon_v = \frac{e_o - e}{1 + e_o} = \frac{0.312 - 0.26}{1 + 0.312} = 0.0396 \quad \delta = \Delta \varepsilon_v \cdot H = 0.0396 \cdot 500 = 19.8 \text{ cm}$$



# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

Ανάπτυξη προστερεοποίησης στα εδάφη λόγω προφόρτισης



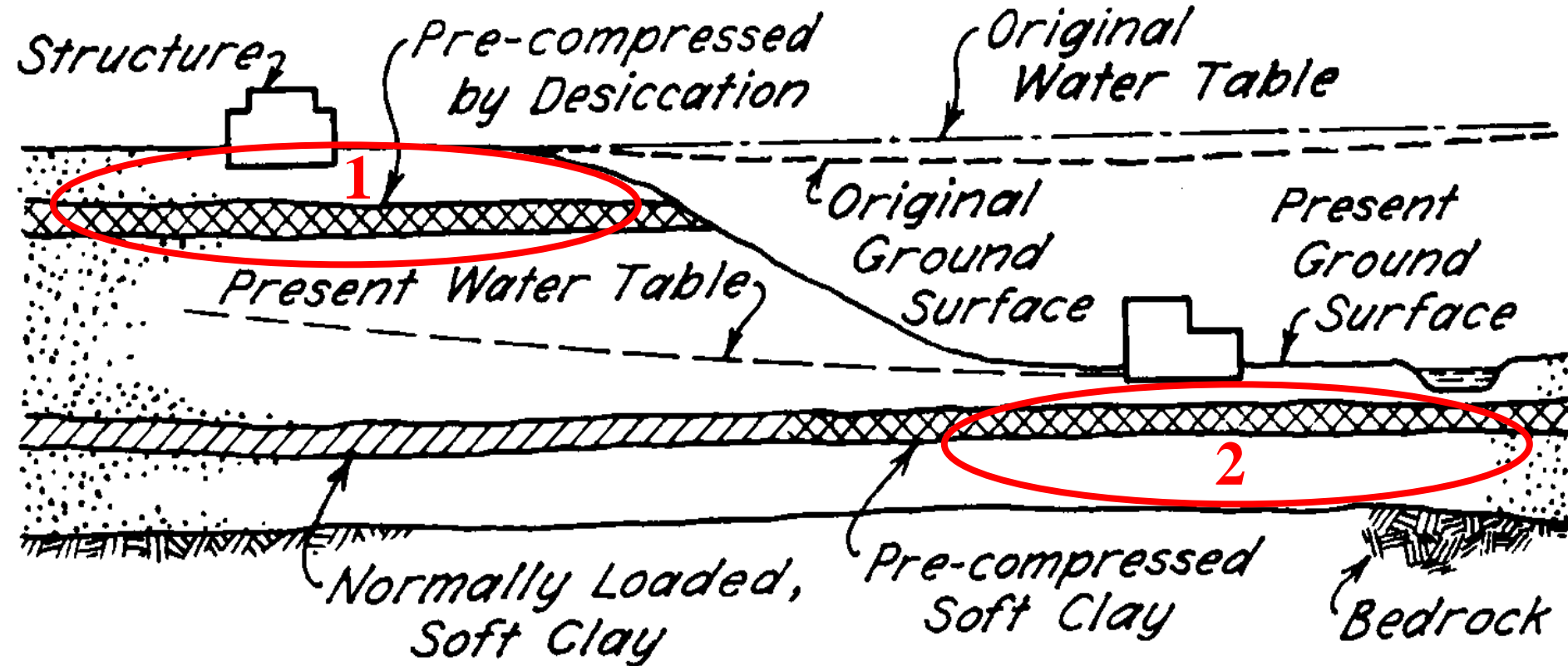
Η συμπίεση από το (1) στο (2) και από το (4) στο (3) έχει πολύ μικρότερη συμπίεσιότητα απ' ό τι από το (2) στο (3) και από το (3) στο (5)

Ο λόγος είναι ότι το έδαφος έχει υποστεί προηγουμένως μεγαλύτερη ενεργό τάση

Η μεγαλύτερη ενεργός τάση του παρελθόντος λέγεται «τάση προ-φόρτισης» ή «τάση προ-στερεοποίησης»

# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

Μηχανισμοί ανάπτυξης προστερεοποίησης στα εδαφικά υλικά



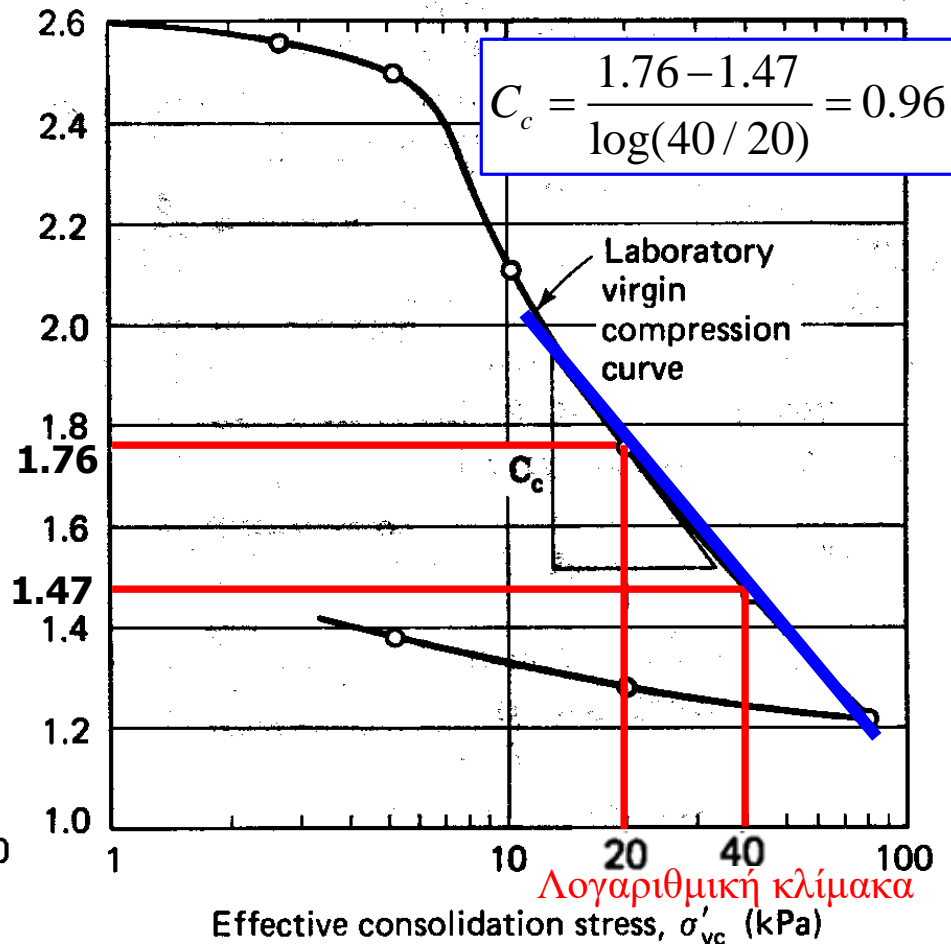
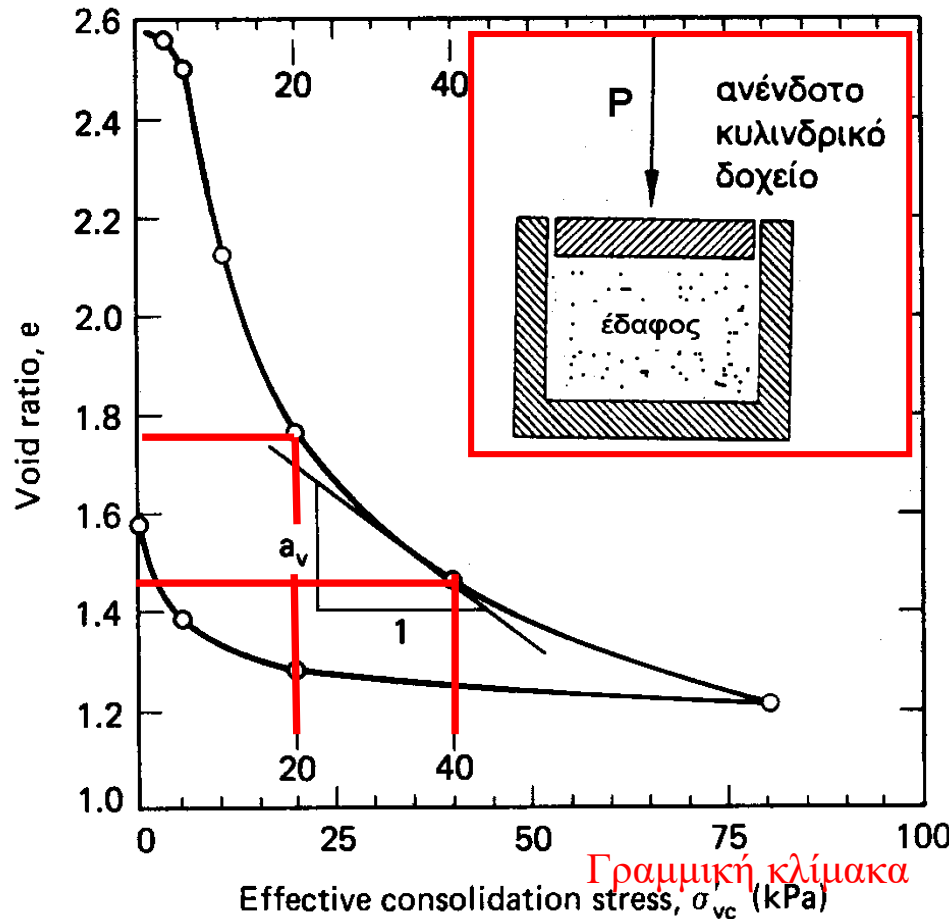
1. Προφόρτιση λόγω παλαιότερης ταπείνωσης της στάθμης του υπόγειου ορίζοντα
  - Ταπείνωση της ΣΥΟ → Μείωση της πίεσης πόρων → Αύξηση της ενεργού τάσης
  - Μετά, άνοδος της ΣΥΟ → Μείωση της ενεργού τάσης (προστερεοποίηση)
2. Προφόρτιση λόγω αφαίρεσης γαιών (διάβρωση)
  - Μείωση της ενεργού γεωστατικής τάσης → προστερεοποίηση

# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

Η συμπεριφορά των εδαφών κατά την μονοδιάστατη παραμόρφωση δεν είναι γραμμική

Λόγος στερεοποίησης :  $a_v = \frac{e_o - e}{\sigma'_v - \sigma'_{vo}}$

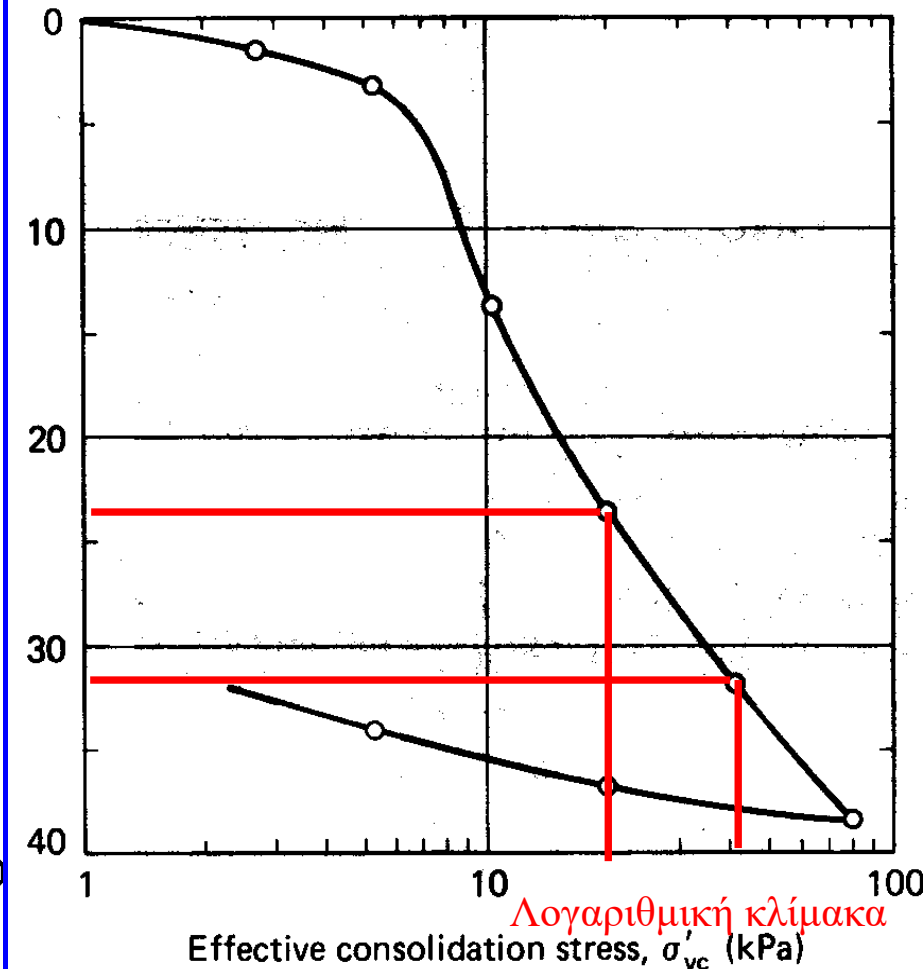
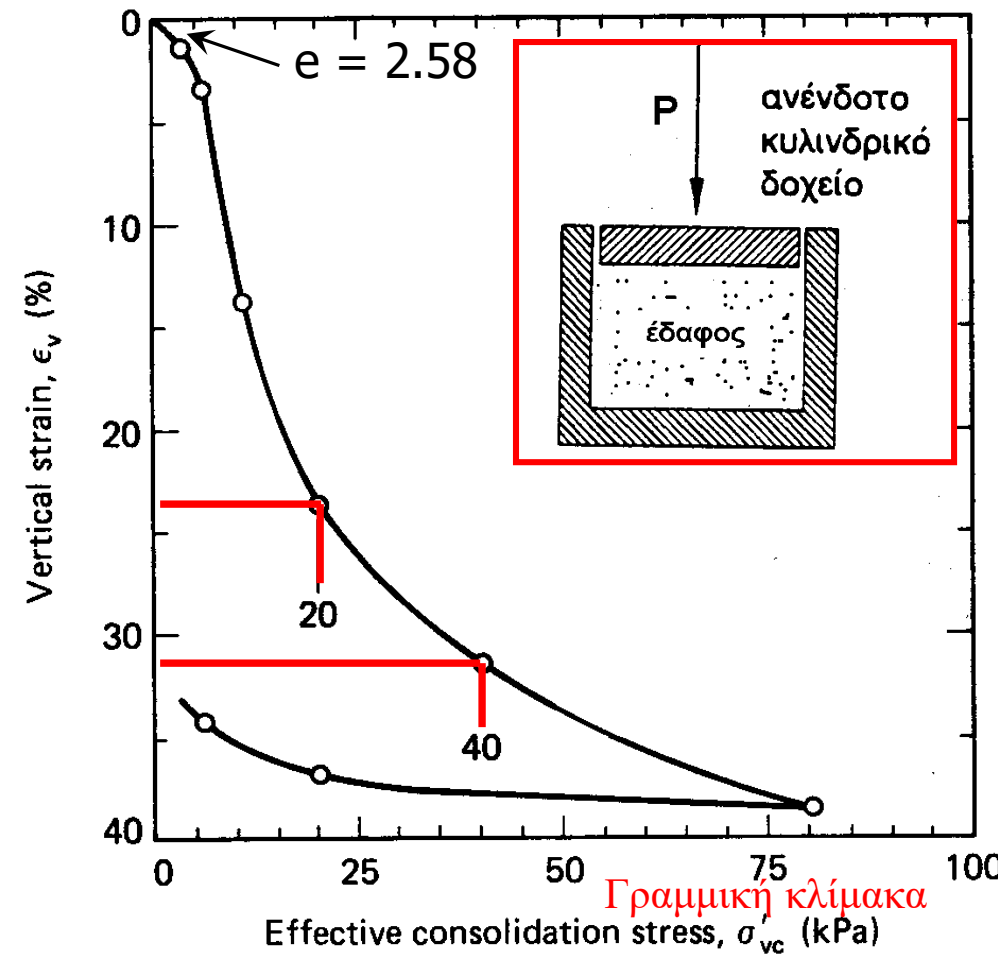
Συντελεστής στερεοποίησης :  $C_c = \frac{e_o - e}{\log(\sigma'_v / \sigma'_{vo})}$



# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

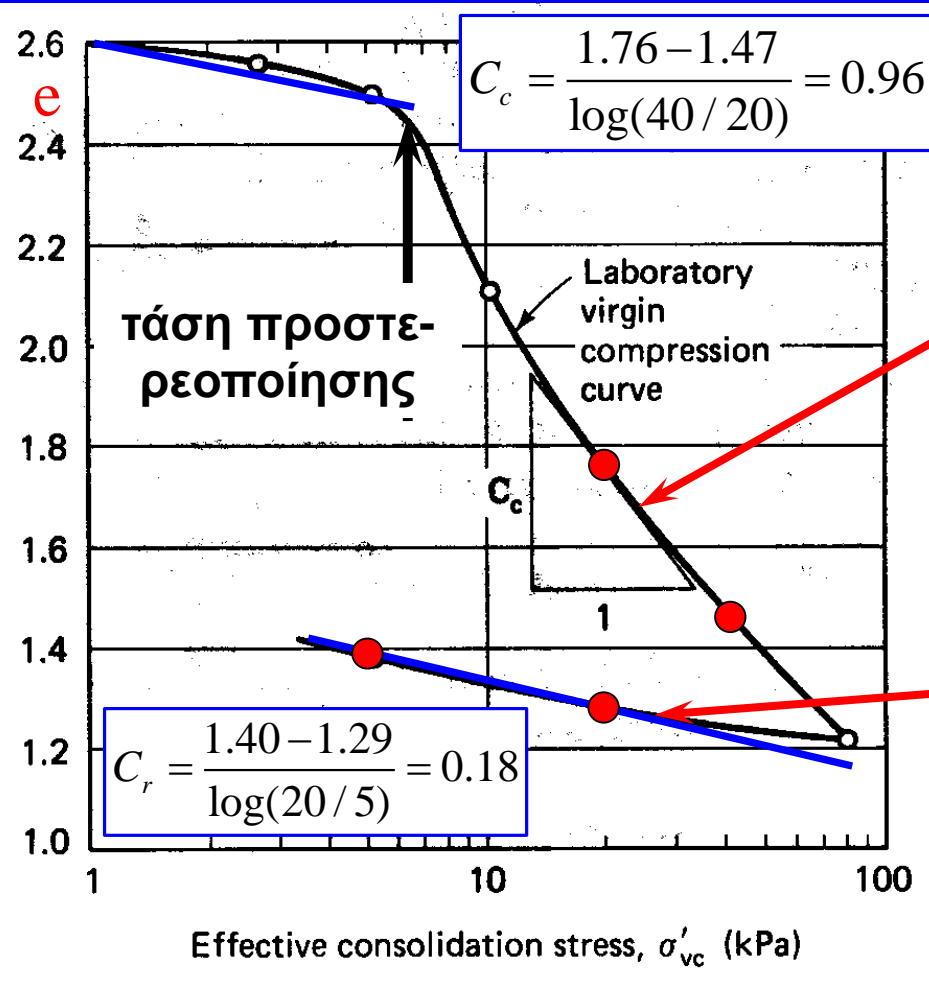
Αντίστοιχες καμπύλες συμπίεσης ως προς την παραμόρφωση (αντί του δείκτη πόρων)

$$\Delta \varepsilon_v = \frac{e_o - e}{1 + e_o} \quad \text{Άρα:} \quad \Delta \varepsilon_v = \frac{C_c}{1 + e_o} \log \left( \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{vo}} \right)$$



# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

- Απότομη αλλαγή κλίσης στην τάση προστερεοποίησης
- Πολύ μικρή κλίση κατά την αποφόρτιση και επαναφόρτιση σε σχέση με την κανονική φόρτιση



Συντελεστής στερεοποίησης κατά την κανονική φόρτιση :

$$C_c = \frac{e_o - e}{\log(\sigma'_v / \sigma'_{vo})}$$

Συντελεστής στερεοποίησης κατά την επαναφόρτιση :

$$C_r = \frac{e_o - e}{\log(\sigma'_v / \sigma'_{vo})}$$

# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

Πολύ μικρή κλίση της καμπύλης κατά την αποφόρτιση και επαναφόρτιση σε σχέση με την κανονική φόρτιση

Μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης :

$$D = \frac{\sigma'_v - \sigma'_{vo}}{\Delta \epsilon_v}$$

Η τιμή του  $D$  κατά την επαναφόρτιση είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι κατά την αρχική φόρτιση

Αρχική φόρτιση :

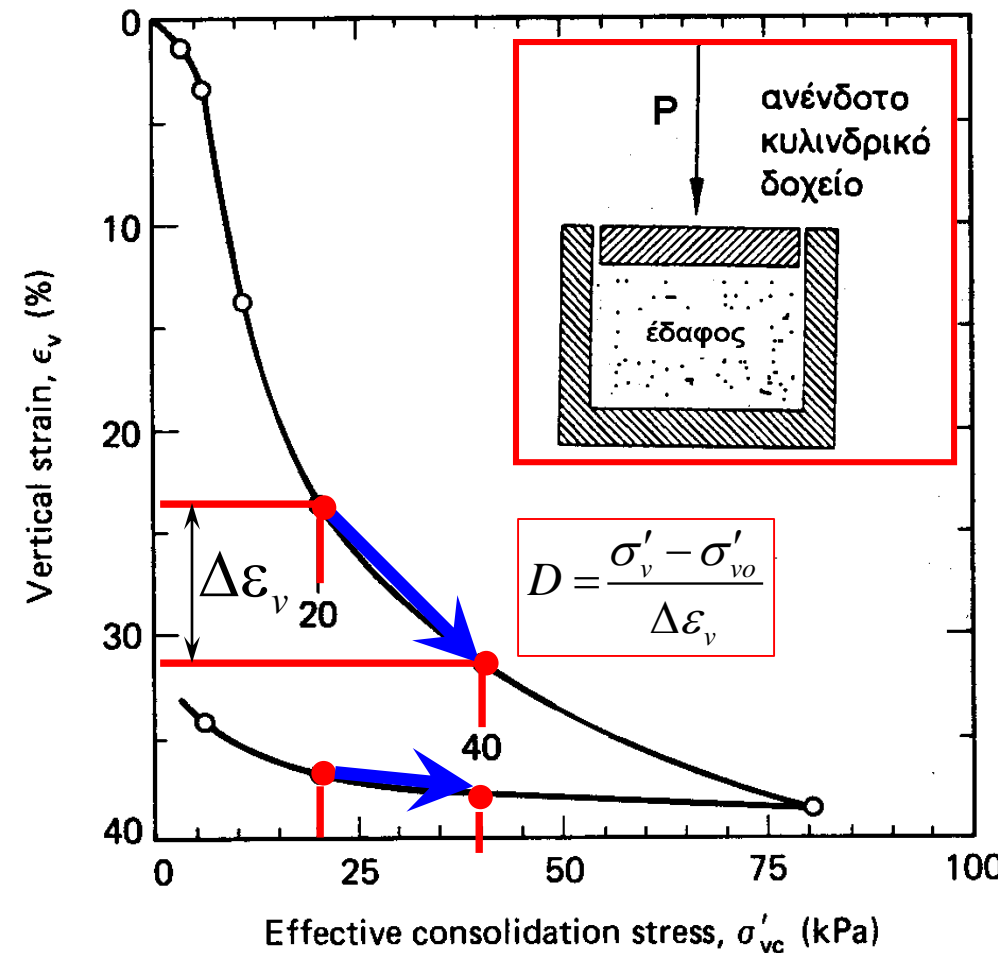
$$D = (40-20)/(0.32-0.23)=222 \text{ kPa}$$

Επαναφόρτιση :

$$D = (40-20)/(0.38-0.37)=2000 \text{ kPa}$$

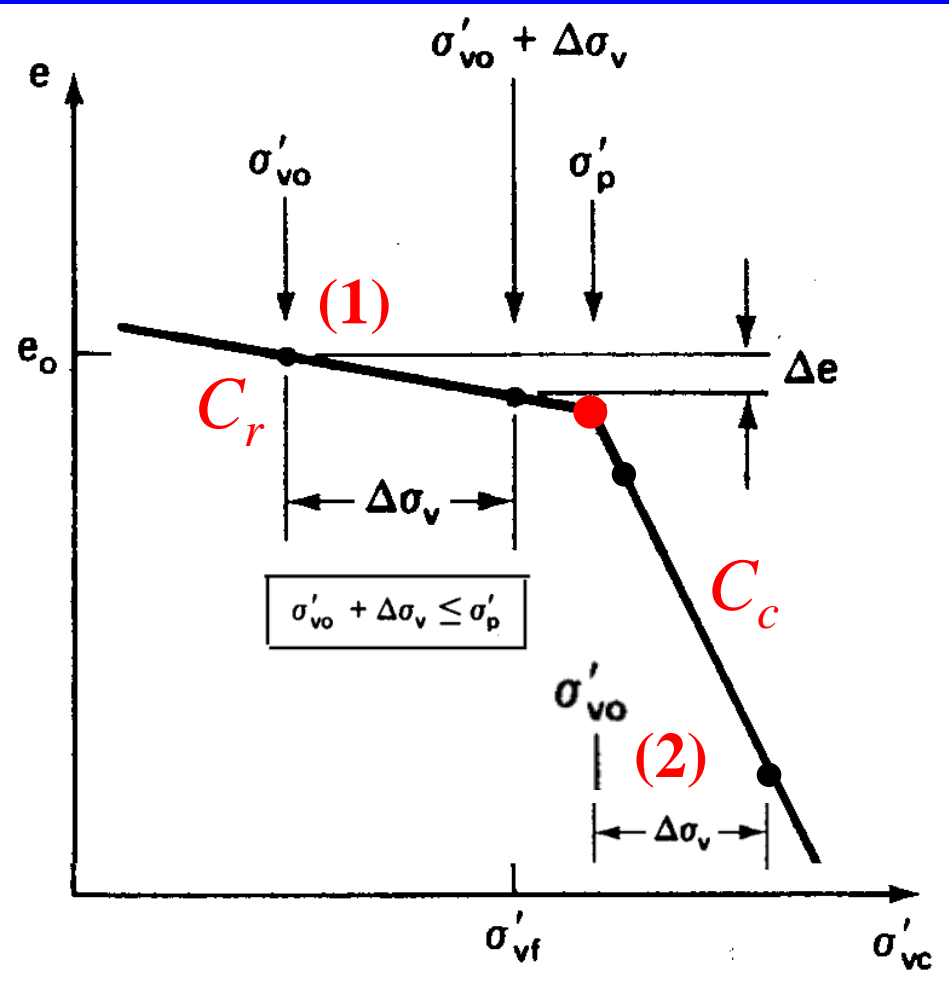
Παρατήρηση:

Η τιμή του  $K_o$  κατά την επαναφόρτιση είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι κατά την αρχική φόρτιση



# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

Εκτίμηση της καθίζησης εδαφικού στρώματος πάχους (H) λόγω αύξησης της κατακόρυφης ενεργού τάσης από  $\sigma'_{vo}$  σε  $\sigma'_{vo} + \Delta\sigma_v$



$$\Delta \varepsilon_v = \frac{C_c}{1 + e_0} \log \left( \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{vo}} \right) \quad \text{ή } C_r$$

Περίπτωση (1):  $\sigma'_{vo} + \Delta\sigma_v < \sigma'_p$

$$\delta = H \frac{C_r}{1 + e_0} \log \left( \frac{\sigma'_{vo} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_{vo}} \right)$$

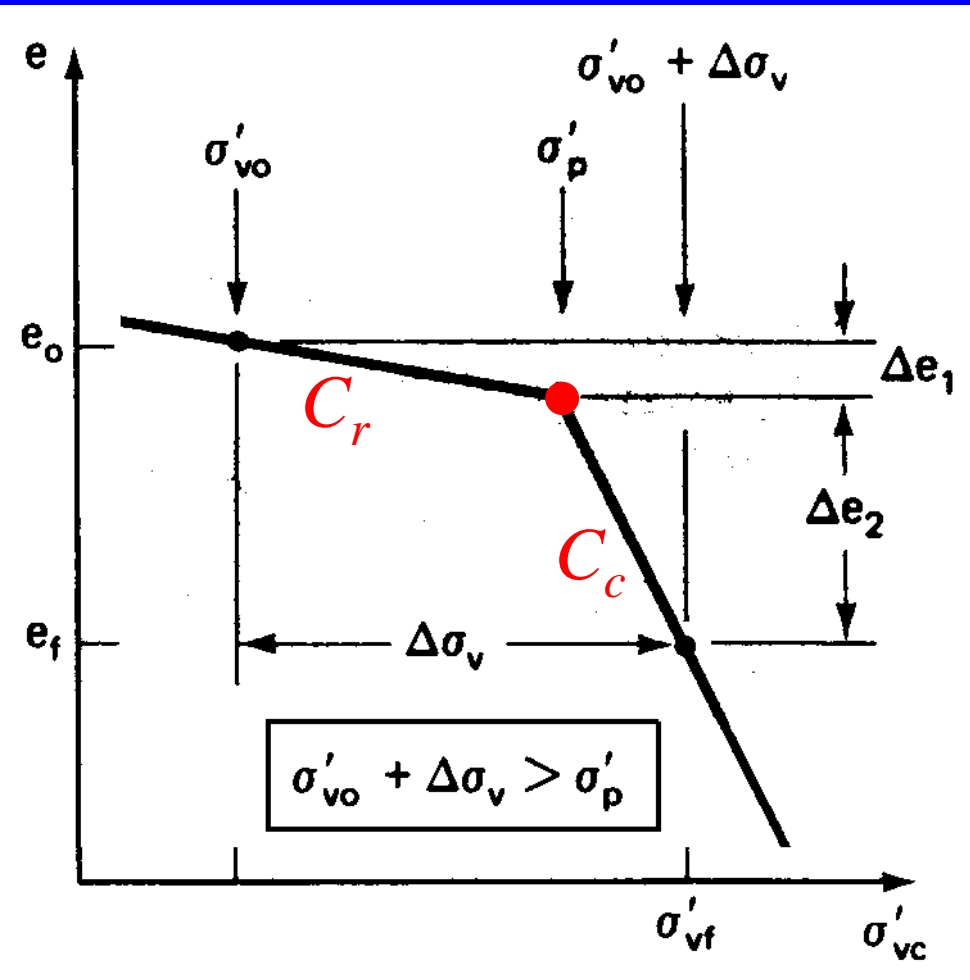
Περίπτωση (2):  $\sigma'_p < \sigma'_{vo}$

$$\delta = H \frac{C_c}{1 + e_0} \log \left( \frac{\sigma'_{vo} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_{vo}} \right)$$

$\sigma'_p =$  τάση προφόρτισης

# Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

Εκτίμηση της καθίζησης εδαφικού στρώματος πάχους (H) λόγω αύξησης της κατακόρυφης ενεργού τάσης από  $\sigma'_{vo}$  σε  $\sigma'_{vo} + \Delta\sigma_v$



Περίπτωση :  $\sigma'_{vo} < \sigma'_p$  και  
 $\sigma'_{vo} + \Delta\sigma_v > \sigma'_p$

$$\delta_1 = H \frac{C_r}{1 + e_o} \log \left( \frac{\sigma'_p}{\sigma'_{vo}} \right)$$

$$\delta_2 = H \frac{C_c}{1 + e_o} \log \left( \frac{\sigma'_{vo} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_p} \right)$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

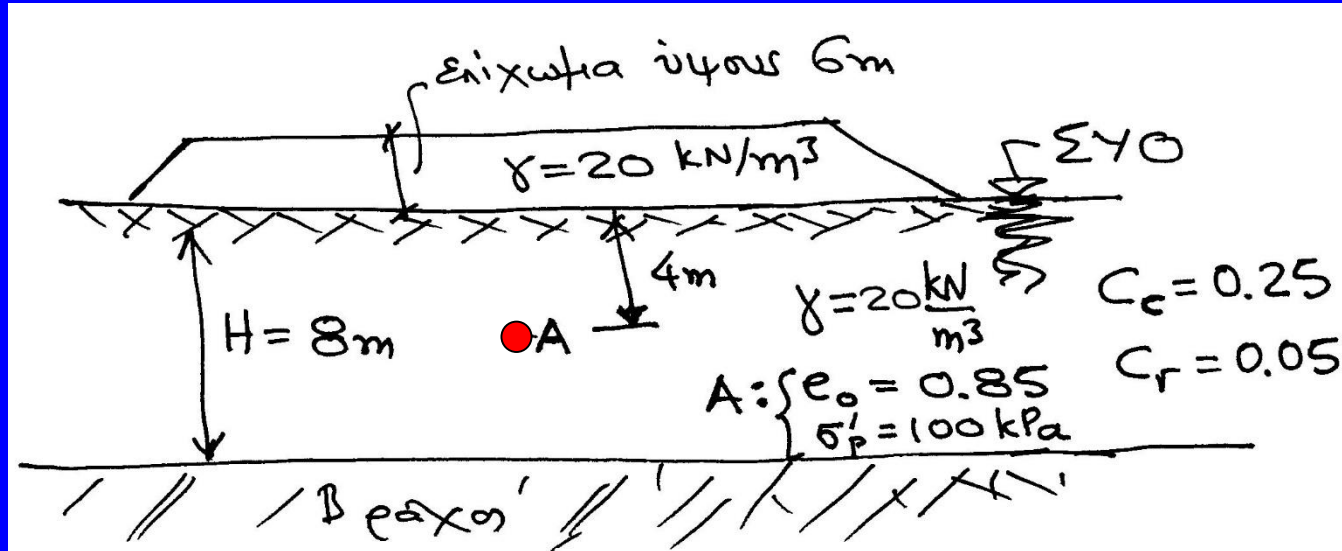
$\sigma'_p =$  τάση προφόρτισης



## Μονοδιάστατη παραμόρφωση (συνέχεια)

Εκτίμηση της καθίζησης εδαφικού στρώματος πάχους ( $H$ ) λόγω αύξησης της κατακόρυφης ενεργού τάσης από  $\sigma'_{v0}$  σε  $\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v$

Παράδειγμα εφαρμογής :



Επίχωμα μεγάλου εύρους και ύψους 6m (υλικό επιχώματος  $\gamma = 20\text{ kN/m}^3$ ) κατασκευάζεται σε κορεσμένη αργιλική στρώση πάχους  $H = 8\text{m}$  (Στάθμη Υπογείου Ορίζοντα - ΣΥΟ στην επιφάνεια του εδάφους). Η άργιλος έχει τα εξής χαρακτηριστικά : Ειδικό βάρος :  $\gamma = 20\text{ kN/m}^3$   
Δείκτης συμπίεστικότητας :  $C_c = 0.25$ , Δείκτης επαναφόρτισης :  $C_r = 0.05$

Για το σημείο A (στο μέσον του πάχους της αργίλου) :

Αρχικός δείκτης πόρων :  $e_0 = 0.85$  , Τάση προστερεοποίησης :  $\sigma'_p = 100\text{ kPa}$

Ζητείται η καθίζηση της αργίλου λόγω της κατασκευής του επιχώματος.

Σε πόσο χρόνο θα συμβεί αυτή η καθίζηση ;

## Παράδειγμα εφαρμογής :

Επιφόρτιση λόγω του επιχώματος :

$$q = \gamma d = 20 \times 6 = 120 \text{ kPa}$$

Γεωστατική τάση στο A :

$$\sigma'_A = \gamma' (H/2) = 10 \times 4 = 40 \text{ kPa}$$

και δείκτης πόρων :  $e_A = 0.85$

Καμπύλη επαναφόρτισης (II) :

$$e_p = e_A - C_r \log \frac{\sigma'_p}{\sigma'_A}$$

$$\text{Για } e_A = 0.85, C_r = 0.05, \sigma'_A = 40 \text{ kPa}, \sigma'_p = 100 \text{ kPa} \Rightarrow e_p = 0.83$$

Τελική ενεργός τάση στο σημείο A, μετά την κατασκευή του επιχώματος :

$$\sigma' = 40 + 120 = 160 \text{ kPa}$$

Καμπύλη φόρτισης (I) :  $e = e_p - C_c \log \frac{\sigma'}{\sigma'_p}$

$$\text{Για } e_p = 0.83, C_c = 0.25, \sigma'_p = 100 \text{ kPa}, \sigma' = 160 \text{ kPa} \Rightarrow e = 0.779$$

Μεταβολή του δείκτη πόρων στο A :  $\Delta e = 0.779 - 0.85 = -0.071$

$$\Delta \varepsilon_v = \frac{-\Delta e}{(1 + e_o)} = \frac{0.071}{1.85} = 0.0384 = 3.84\% \quad \text{Άρα, καθίζηση : } \rho = \Delta \varepsilon_v H = 0.0384 \times 800 = 30.7 \text{ cm}$$

