



ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ανασκόπηση
στοιχείων

ΒΑΘΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΣΗ



Τανυστές

- Τανυστές μηδενικής τάξης - Βαθμωτά (Scalars)
 - ένας μόνο αριθμός ($s \in \mathfrak{R}$)

- Τανυστές πρώτης τάξης - Διανύσματα (Vectors)
 - μονοδιάστατος πίνακας όπου $x_1 \dots x_n \in \mathfrak{R}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Τανυστές δεύτερης τάξης - Πίνακες (Matrices)
δισδιάστατοι πίνακες, με $a_{11} \dots a_{nn} \in \mathfrak{R}$

και

$$A \in \mathfrak{R}^{m \times n}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Τανυστές μεγαλύτερης από 2ης τάξης - Τανυστές (Tensors)
πολυδιάστατοι πίνακες π.χ. 3ης τάξης όπου $b_{111} \dots b_{kmn} \in \mathfrak{R}$ και $B \in \mathfrak{R}^{k \times m \times n}$



Ανάστροφο διάνυσμα \mathbf{x}^T και πίνακας \mathbf{A}^T

- Ορίζουμε τον ανάστροφο (transpose) του διανύσματος \mathbf{x} και συμβολίζουμε \mathbf{x}^T , ως τον πίνακα γραμμή N θέσεων με στοιχεία:

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n]$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Ορίζουμε τον ανάστροφος πίνακα του πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ και συμβολίζουμε \mathbf{A}^T , ως τον πίνακα που προκύπτει από τον \mathbf{A} με εναλλαγή μεταξύ γραμμών και στηλών του:

$$(\mathbf{A}^T)_{i,j} = (\mathbf{A})_{j,i} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \end{bmatrix}$$

Κύρια διαγώνιος



Ανάστροφος πίνακας A^T

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -6 \\ -4 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \\ -1 & -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$



Ανάστροφος πίνακας A^T

Ιδιότητες αναστροφού

α) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

β) $(A^T)^T = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

γ) $(AB)^T = B^T A^T$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$

και γενικώς: $(A_1 A_2 \dots A_p)^T = A_p^T A_{p-1}^T \dots A_2^T A_1^T$
γινόμενο
p πινάκων

π.χ. $(AB\Gamma)^T = \Gamma^T B^T A^T$

δ) Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5-6} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

και $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Τετραγωνικοί Πίνακες

Ένας πίνακας A είναι τετραγωνικού τύπου n όταν έχει διάσταση $n \times n$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ είναι τετραγωνικού τύπου 2

Διαγώνιοι Πίνακες

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται διαγώνιος πίνακας αν και μόνο αν $a_{ij} = 0$ όταν $i \neq j$ δηλαδή όλα τα στοιχεία έξω από την κύρια διαγώνιο είναι 0

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Μοναδιαίος Πίνακας Τύπου n , I_n

Ένας διαγώνιος πίνακας $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται μοναδιαίος πίνακας αν και μόνο αν

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i=j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases}$$

Ίχνος Τετραγωνικού Πίνακας

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε το ίχνος του A ορίζεται ως : $\text{tr}(A) = \text{trace}(A) : \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

δηλαδή ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.



Κάτω Τριγωνικός Πίνακας

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται κάτω τριγωνικός αν και μόνο αν $a_{ij} = 0$ όταν $i < j$, δηλαδή όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Άνω Τριγωνικός Πίνακας

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται άνω τριγωνικός αν και μόνο αν $a_{ij} = 0$ όταν $i > j$, δηλαδή όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$



Αντίστροφος πίνακας

Ο πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας πίνακας $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έτσι ώστε $\mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ και $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{I}$, όπου \mathbf{I} είναι $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας.

Υπάρχει το πολύ ένας τέτοιος \mathbf{B} και λέγεται αντίστροφος του \mathbf{A} και συμβολίζεται με \mathbf{A}^{-1} : $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$

- Εάν $\mathbf{A} = [a]$ τότε $\mathbf{A}^{-1} = [1/a]$

- Εάν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ και $ad - bc \neq 0$ τότε $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Για να είναι ο πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμοι θα πρέπει η ορίζουσά του είναι διάφορη του 0: $\det \mathbf{A} \neq 0$



Συμμετρικοί πίνακες

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο οποίος είναι ίσος με τον ανάστροφό του, δηλαδή $S = S^T$, είναι ένας συμμετρικός πίνακας.

π.χ. εάν A είναι ένας πίνακας μέτρησης αποστάσεων, με $A_{i,j}$ που δίνει την απόσταση από το σημείο i στο σημείο j , τότε $A_{i,j} = A_{j,i}$ επειδή οι συναρτήσεις απόστασης είναι συμμετρικές.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 & -3 \\ 6 & 7 & 2 & 9 \\ -4 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$



Αντισυμμετρικοί πίνακες

- Αν αντίθετα, ο τετραγωνικός πίνακας $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο οποίος είναι ίσος με τον αρνητικό του ανάστροφο, δηλαδή $S = S^{-T}$ τότε λέμε ότι ο S είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας.

Δηλαδή: $(A)^{ij} = -(A)^{ji}, \forall i, j$

Παραδείγματα

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 & 3 \\ -6 & 0 & 2 & 9 \\ 4 & -2 & 0 & -5 \\ -3 & -9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$



Hermitian πίνακες

- Σε μιγαδικούς πίνακες, η συμμετρία συχνά αντικαθιστάται από την έννοια Hermitian πίνακες A^H , που ικανοποιεί $A^* = \overline{A^T} = A$ όπου ο αστερίσκος υποδηλώνει το συζυγή ανάστροφο ενός πίνακα, δηλαδή, η μετάθεση του συζυγή του A : $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Παράδειγμα

$$A: \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b+ic} \\ \overline{b-ic} & \overline{d} \end{bmatrix} \quad A^T: \begin{bmatrix} a & b-ic \\ b+ic & d \end{bmatrix} \quad \overline{A^T} \begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{bmatrix}$$



Πράξεις πινάκων

- Πρόσθεση πινάκων

Αν οι πίνακες έχουν το ίδιο μέγεθος μπορούμε να προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους: $C=A+B$ όπου $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$

- Πίνακας με βαθμωτό ή διάνυσμα

Προσθέτουμε/πολλαπλασιάζουμε το βαθμωτό με κάθε στοιχείο του πίνακα:

$$\mathbf{D} = a \cdot \mathbf{B} + c \text{ όπου } D_{i,j} = a \cdot B_{i,j} + c$$

- Πολλαπλασιασμός πινάκων

Προϋπόθεση: Οι στήλες του A ίσες με τις γραμμές του B

$$C = A * B, C_{i,j} = \sum_k (A_{i,k} \cdot B_{k,j}) \qquad C(m \times p) = A(m \times n) * B(n \times p)$$

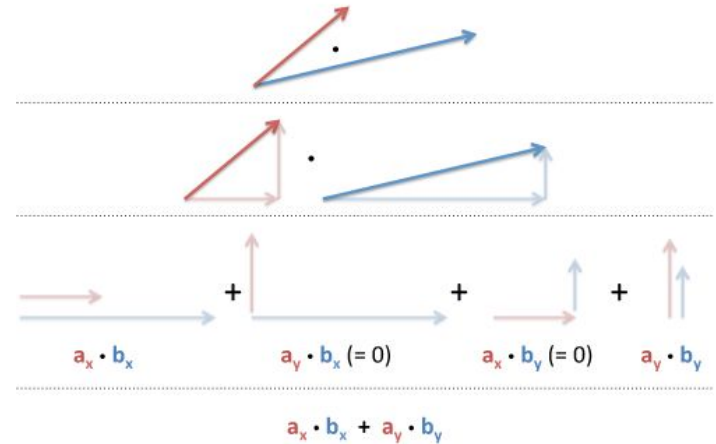
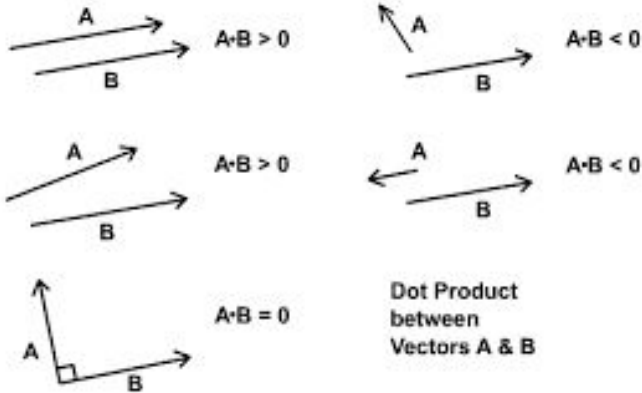
- Γινόμενο στοιχείο προς στοιχείο (Element-wise product ή Hadamard product)

$$A \cdot B = a_{i,j} \cdot b_{i,j}$$

Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Η ποσότητα $x^T y$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x και y του \mathcal{R}^n
 Αν τα x, y είναι ορθογώνια, $x^T y = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 * y_1 + x_2 * y_2 \dots + x_n * y_n$$





Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

Εάν ο τετριμμένος συνδυασμός είναι ο μόνος που παράγει το μηδέν δηλαδή

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0 \text{ συμβαίνει μόνον όταν } c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

τότε τα διανύσματα u_1, u_2, \dots, u_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\text{πχ. } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1] * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε είναι γραμμικώς εξαρτημένα και κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_2 + 3/2c_3 &= 0 \end{aligned}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

Άσκηση Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή όχι και ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ (-)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \cdot (-1) \\ (-)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 - R_3 \\ (-)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U, \quad \text{άρα } r(A) = [\text{πλήθος μη-μηδεν. γραμμών του } U]$$

$$\Rightarrow r(A) = 3 \rightarrow \text{Πλήθος βασικών μεταβλητών}$$

και $\dim N(A) = n - r(A) = 4 - 3 = 1 \neq 0 \rightarrow$ Πλήθος ελευθέρων μεταβλητών
 άρα $\exists c \neq 0$ τ.ω. $Ac = 0$ και τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα



Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

Άσκηση Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή όχι και ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν.

Το διάνυσμα $(0,0,0,1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν αν \exists
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ τ.ω.
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

η τελευταία γραμμή δίνει $0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 1$, άρα το σύστημα είναι ασύμβατο και επομένως,

$$(0,0,0,1) \notin \langle (1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1) \rangle$$

Αν δεν υπάρχει λύση, τότε λέμε ότι το σύστημα είναι **ασύμβατο** (inconsistent).



Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

Ένα σύνολο n διανυσμάτων του \mathcal{R}^m είναι κατ' ανάγκην εξαρτημένο, όταν $n > m$

Κάθε διάνυσμα u του διανυσματικού χώρου V μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός του w : $u = c_1 w_1 + \dots + c_l w_l$ για κάποιους συντελεστές c_i

Έστω διανύσματα που ξεκινούν από την αρχή ενός 3D χώρου:

2 εξαρτημένα διανύσματα \Rightarrow Περιέχονται στην ίδια ευθεία

3 εξαρτημένα διανύσματα \Rightarrow Περιέχονται στο ίδιο επίπεδο



Βάση και Διάσταση Διανυσματικού Χώρου

Βάση ενός διανυσματικού χώρου είναι ένα σύνολο διανυσμάτων που έχει ταυτόχρονα τις δύο ιδιότητες:

1. Είναι γραμμικώς ανεξάρτητο
2. Παράγει τον χώρο.

Όταν ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, τότε οι στήλες του είναι ανεξάρτητες και αποτελούν μία βάση του \mathcal{R}^n .

Αν u_1, \dots, u_m και w_1, \dots, w_n είναι δύο βάσεις του ίδιου διανυσματικού χώρου V , τότε $m=n$

Το m (ή το n) εκφράζει τους “βαθμούς ελευθερίας” του χώρου και ονομάζεται **διάσταση** του V

$\dim(V) = [\text{μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του } V]$

π.χ. $\dim(\mathcal{R}^2)=2$, $\dim(\mathcal{R}^3)=3$

Βάση και Διάσταση Διανυσματικού Χώρου

Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του χώρου

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$$

$$x - y + 2z = 0 \rightarrow x = y - 2z, y, z \in \mathbb{R}$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z\} = \{(y - 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(y, y, 0) + (-2z, 0, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (1, 1, 0), (-2, 0, 1) \rangle$$

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$$

Οδηγοί

Για να αποτελέσουν βάση του χώρου αυτά τα 2 διανύσματα θα πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1st*2+2nd} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ορθογώνιοι πίνακες

- Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται ορθογώνιος πίνακας εάν και μόνο αν τα n διανύσματα-στήλες (ή -γραμμές) του αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα του χώρου διάστασης $n \times n$

Π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ταυτοτικός) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (μετάθεσης) $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ (περιστροφή)

- Ισοδύναμα, ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι ορθογώνιος αν η μετάθεσή του είναι ίση με τον αντίστροφό του: $A^T = A^{-1}$
και ισχύει $A^T A = A A^T = I$



Ορθογώνιοι πίνακες

- Η ορίζουσα οποιουδήποτε ορθογώνιου πίνακα είναι είτε +1 (κάνει μια καθαρή περιστροφή), ή -1 (είναι μια καθαρή αντανάκλαση, ή μια σύνθεση της αντανάκλασης και της περιστροφής).
- Εάν $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας, τότε $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

Έπεται ότι $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \det(\mathbf{I}_n) = 1$, $\det(\mathbf{A}^T) \det(\mathbf{A}) = 1$, $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$



Ορθογώνιοι πίνακες

- Η ορίζουσα οποιουδήποτε ορθογώνιου πίνακα είναι είτε +1 (κάνει μια καθαρή περιστροφή), ή -1 (είναι μια καθαρή αντανάκλαση, ή μια σύνθεση της αντανάκλασης και της περιστροφής).
 - Έστω $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας. Τότε $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$
Έπεται ότι:

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \det(\mathbf{I}_n) = 1,$$

$$\det(\mathbf{A}^T) \det(\mathbf{A}) = 1,$$

$$\det(\mathbf{A}) = \pm 1$$

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, γνωστός πίνακας,

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, διάνυσμα,

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, διάνυσμα με τις άγνωστες μεταβλητές

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Αναλύεται σε:

$$\begin{array}{lcl}
 A_{1,:} \mathbf{x} = b_1 & & A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,n}x_n = b_1 \\
 A_{2,:} \mathbf{x} = b_2 & \text{ή} & A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,n}x_n = b_2 \\
 \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\
 A_{m,:} \mathbf{x} = b_m & & A_{m,1}x_1 + A_{m,2}x_2 + \cdots + A_{m,n}x_n = b_m
 \end{array}$$

Μπορεί να έχει καμία λύση, πολλές λύσεις, ακριβώς μία λύση (πολ/σμό με ανάστροφο)



Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Σκέψη : Οι στήλες του A ορίζουν διαφορετικές κατευθύνσεις που μπορούμε να “κινηθούμε” στο χώρο από το αρχικό σημείο 0 για να προσεγγίσουμε το \mathbf{b} .

$$\mathbf{Ax} = \sum_i x_i \mathbf{A}_{:,i} \rightarrow \text{Γραμμικός συνδυασμός}$$

Το εύρος (span) ενός συνόλου διανυσμάτων είναι το σύνολο όλων των σημείων που μπορούν να ληφθούν με γραμμικό συνδυασμό των αρχικών διανυσμάτων.



Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Έχει λύση η $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$;

Θα ελέγχουμε αν το \mathbf{b} είναι στο εύρος των στηλών του \mathbf{A} .

Για να μπορεί το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ να έχει λύση για όλες τις τιμές του $\mathbf{b} \in \mathcal{R}_m$ απαιτούμε ο χώρος των στηλών του \mathbf{A} να είναι ο \mathcal{R}_m .

Πρέπει να έχει ακριβώς m γραμμικές ανεξάρτητες στήλες, όχι τουλάχιστον m .

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων

$$Ax = b$$

ε.δε.μ²
ΕΠΙΤΗΝΙ-ΣΕΒΟΜΕΝΟΝ Ε ΜΗΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ



Προκειμένου η μήτρα A να έχει αντίστροφο, πρέπει επιπλέον να διασφαλίσουμε ότι η εξίσωση έχει το πολύ μία λύση για κάθε τιμή του b .

(Διαφορετικά, υπάρχουν περισσότεροι από έναν τρόποι παραμετροποίησης κάθε λύσης)

Για να έχει αντίστροφο η μήτρα A θα πρέπει:

- να είναι τετράγωνη, δηλαδή, απαιτούμε ότι $m = n$ και
- όλες οι στήλες πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες

Μια τετράγωνη μήτρα με γραμμικά εξαρτημένες στήλες είναι γνωστή ως μοναδική.

Εάν η A δεν είναι τετράγωνη, αλλά μοναδική, μπορεί ακόμα να επιλυθεί η εξίσωση.

→ Ωστόσο, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντιστροφής της μήτρας για να βρούμε τη λύση.

Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$



Λύση

$$Ax = b$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$I_n x = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Τριγωνική παραγοντοποίηση $A=LU$

Αν δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών, ο αρχικός πίνακας μπορεί να γραφεί ως γινόμενο $A=LU$

L : κάτω τριγωνικός

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{2,1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

U : άνω τριγωνικός

- Εμφανίζεται μετά τη διαδοχική απαλοιφή και πριν την ανάδρομη αντικατάσταση.
- Τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι οδηγοί

π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = LU$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{33}{27} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -\frac{27}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{42}{5} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{41}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{68}{3} \end{bmatrix} = LU$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = LU$$



Εύρεση A^{-1} : Μέθοδος των Gauss-Jordan

Έστω η εξίσωση: $AA^{-1}=I$.

Εάν θεωρηθεί στήλη προς στήλη αυτή η εξίσωση προσδιορίζει τις στήλες του A^{-1}

$$Ax_1 = e_1, Ax_2 = e_2, Ax_3 = e_3$$

όπου

$$[e_1 \quad e_2 \quad e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3] = [U \quad L]$$

$$[U \quad L] = [I \quad A^{-1}]$$



Εύρεση A^{-1} : Μέθοδος των Gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A \mid I_3) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 20/9 & | & -4/9 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 5/9 & | & -1/9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [A \ e_1 \ e_2 \ e_3] &= [U \ L] \\ [U \ L] &= [I \ A^{-1}] \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & | & 9/5 & -9/5 & 0 \\ 0 & 5/3 & 20/9 & | & -4/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & | & 1/15 & -2/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & | & 9/5 & -9/5 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 & | & 0 & -5/3 & 20/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & | & 1/15 & -2/5 & 1 \end{pmatrix}$$

Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της i -γραμμής του πίνακα εκ δεξιών της διακεκομμένης γραμμής με το μη μηδενικό στοιχείο της i -γραμμής του διαγώνιου πίνακα και παίρνουμε:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1/5 & 6/5 & -3 \end{pmatrix}$$



Παραγοντοποίηση $A=LDU$

Ο L παραμένει ίδιο όπως στην $A=LU$

Ο πίνακας D είναι διαγώνιος και περιέχει την διαγώνιο του πίνακα U της παραγοντοποίησης LU (στοιχεία οδηγών):

Ο νέος άνω τριγωνικός πίνακας U προκύπτει από τον πίνακα U της παραγοντοποίησης LU διαιρώντας κάθε στοιχείο του με το στοιχείο της διαγωνίου (δηλ. τον οδηγό) της ίδιας γραμμής

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = LDU$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = LU$$

Νόρμες (Norms)

Μέτρηση μεγέθους ενός διανύσματος \mathbf{x}

$$L^p = \|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p} \quad p \in \mathbb{R}, p \geq 1$$

Η νόρμα είναι μία συνάρτηση f που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$f(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \text{ (the **triangle inequality**)}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha \mathbf{x}) = |\alpha| f(\mathbf{x})$$



L^2 νόρμα (Ευκλείδεια νόρμα)

- Για $p=2 \rightarrow$ η ευκλείδεια απόσταση από την αρχή μέχρι το σημείο που προσδιορίζεται από το x .
- Δηλώνεται συχνά ως $\|x\|$, με τον δείκτη 2 να παραλείπεται.
- Συνήθως υπολογίζουμε το τετράγωνο της L^2 νόρμας, απλά ως $x^T x$
- Υπολογιστικά, συχνά, το τετράγωνο της L^2 νόρμα μπορεί να αυξάνεται πολύ αργά κοντά το σημείο που προσδιορίζεται από το x
 \rightarrow απαγορευτικό υπολογιστικά



L¹ νόρμα

- Συχνά είναι σημαντικό να γίνεται διάκριση μεταξύ στοιχείων που είναι ακριβώς μηδενικά και αυτών που είναι μικρά αλλά μη μηδενικά.

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

- Κάθε φορά που ένα στοιχείο του x μετακινείται κατά ϵ μακριά από το 0, η L¹ αυξάνεται κατά ϵ
- Υποκαθιστά το πλήθος των μη μηδενικών τιμών.

Μερικές φορές μετράμε το μέγεθος του διανύσματος υπολογίζοντας τον αριθμό των μη-μηδενικών στοιχείων (Λανθασμένη ορολογία το νόρμα L⁰).



L^∞ νόρμα (Max νόρμα)

Υπολογίζει την απόλυτη τιμή του μεγαλύτερου στοιχείου του διανύσματος x

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Υπολογισμός μεγέθους μήτρας

Νόρμα Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2}$$

Είναι το ανάλογο της L^2 ενός διανύσματος.

Εσωτερικό γινόμενο με χρήση νόρμας

$$x^T y = \|x\|_2 \|y\|_2 \cos\theta \quad \text{όπου } \theta \text{ η γωνία μεταξύ } x \text{ και } y$$



Διαγώνιοι πίνακες

Ένας πίνακας D είναι διαγώνιος εάν και μόνο εάν $D_{i,j} = 0$ για όλα τα $i \neq j$

$diag(v)$: τετραγωνικός διαγώνιος πίνακας,
το διάνυσμα v περιέχει τις τιμές της διαγωνίου

Ο πολ/σμός του με άλλο πίνακα είναι υπολογιστικά αποδοτικός.

$$diag(v)x = v \odot x$$

Αντίστροφος : \exists αν τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μη μηδενικά

$$diag(v)^{-1} = diag([1/v_1, \dots, 1/v_n])$$

- Σε πολλές περιπτώσεις, αλγόριθμοι μηχανικής μάθησης περιορίζουν πίνακες να είναι διαγώνιοι, κερδίζοντας υπολογιστικό κόστος και χρόνο.
- Είναι δυνατή η κατασκευή διαγώνιου πίνακα

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Επινοήθηκαν για επίλυση διαφορικών εξισώσεων :

Η λύση θα είναι της μορφής :

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

$$y(t) = e^{\lambda t} x$$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda t} x = A e^{\lambda t} x \Rightarrow \underline{Ax = \lambda x}$$

Ιδιοτιμή Ιδιοδιάνυσμα

- Ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του A όταν και μόνον όταν ισχύει $\det(A - \lambda I) = 0$
- Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση και σε κάθε λύση της λ αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα x :

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad \text{ή} \quad Ax = \lambda x$$

Βήματα επίλυσης του προβλήματος ιδιοτιμών



1. Υπολογισμός της ορίζουσας του
2. Εύρεση των ριζών αυτού του πολυωνύμου $A - \lambda I \rightarrow$ ιδιοτιμές
3. Για κάθε ιδιοτιμή, επίλυση του συστήματος $(A - \lambda I)x = 0 \rightarrow$ ιδιοδιανύσματα

π.χ. Διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy_1}{dt} = 4y_1 - 5y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 2y_1 - 3y_2$$

$$t = 0 : y_1 = 8, y_2 = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

1., 2.

$$|A - \lambda I| = (4 - \lambda)(3 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

3.

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ειδικές λύσεις :

$$u = e^{\lambda_1 t} x_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = e^{\lambda_2 t} x_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Γενική λύση:

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$$

Χρήση αρχικών συνθηκών $\rightarrow \begin{cases} 8 = c_1 + 5c_2 \\ 5 = c_1 + 2c_2 \end{cases}$

$$u = 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Εξίσωση-κλειδί: $Ax = \lambda x$

- Οι ιδιοτιμές παριστάνουν το βηματισμό στο χρόνο (magnitude)
- Τα ιδιοδιανύσματα παριστάνουν τις “κανονικές καταστάσεις” του συστήματος και επιδρούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο (direction)
- Μπορούμε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά κάθε ιδιοδιανύσματος και να συνδυάσουμε αυτές τις κανονικές καταστάσεις για να βρούμε μια λύση

→ Διαγωνοποίηση

Διαγωνοποίηση $A = V\Lambda V^{-1}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Ay \\ y(t) &= e^{\lambda t} x \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda t} x = A e^{\lambda t} x \Rightarrow Ax = \lambda x$$

Eigenvector
Matrix

$$\Rightarrow A [x_1 \ x_2] = [\lambda_1 x_1 \ \lambda_2 x_2]$$

Eigenvalue
Matrix

$$\Rightarrow A [x_1 \ x_2] = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AV = V\Lambda$$

$$A^2 = ;$$

$$\Rightarrow AVV^{-1} = V\Lambda V^{-1}$$

$$A^2 = V\Lambda V^{-1} V\Lambda V^{-1} = V\Lambda I \Lambda V^{-1} = V\Lambda^2 V^{-1}$$

Ο πίνακας
ιδιοτιμών
υψωμένος στο
τετράγωνο

$$\Rightarrow AI = V\Lambda V^{-1}$$

$$A^n = ;$$

$$\Rightarrow \boxed{A = V\Lambda V^{-1}}$$

$$\boxed{A^n = V\Lambda^n V^{-1}}$$

Ίδιος πίνακας
ιδιοδιανυσμάτων
όπως ο A

Ο πίνακας ιδιοτιμών
υψωμένος στην n



Πίνακες, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Συμμετρικός πίνακας

$$S = S^T$$

→ πραγματικές ιδιοτιμές

→ ορθογώνια ιδιοδιανύσματα

Ανάστροφος πίνακας

$$A^T = -A$$

→ φανταστικές ιδιοτιμές

→ ορθογώνια μιγαδικά ιδιοδιανύσματα

Ορθογώνιος πίνακας

$$Q^T Q = I$$

→ για όλες τις ιδιοτιμές ισχύει: $|\lambda| = 1$

→ ορθογώνια μιγαδικά ιδιοδιανύσματα

Ένας πίνακας ονομάζεται **ιδιάζων (singular)** ανν οποιαδήποτε από τις ιδιοτιμές του είναι μηδέν.



Πίνακες, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Ορισμένος πίνακας

- Ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας ονομάζεται θετικά (αρνητικά) ορισμένος, εάν για όλα τα μη μηδενικά διανύσματα $x \in \mathbb{R}^n$ το $Q(x) = x^T A x$ παίρνει μόνο θετικές τιμές (αρνητικές τιμές).
- Εάν ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας παίρνει μόνο θετικές (αρνητικές) ονομάζεται γνησίως-θετικός (αρνητικός) $\rightarrow x^T A x = 0 \Rightarrow x = 0$
- Εάν ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας παίρνει θετικές (αρνητικές) ή μηδενικές ονομάζεται ημι-θετικός (αρνητικός) $\rightarrow \forall x, x = x^T A x \geq 0$
- Εάν ένας συμμετρικός $n \times n$ δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός τότε ο πίνακας είναι αόριστος.



Παραγοντοποίηση

$$A=LU \quad (\text{Απαλοιφή})$$

$$A=QR \quad (\text{Gram-Schmidt})$$

$$S=Q\Lambda Q^T \quad (\text{Symmetric: } [\sigma_1 \ \dots \ \sigma_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^T \\ \vdots \\ \sigma_n^T \end{bmatrix})$$

$$A=XLX^{-1}$$

$$A=U\Sigma V^T \quad (\text{Ορθογώνιος} \times \text{Διαγώνιος} \times \text{Ορθογώνιος})$$



Trace Operator

Δίνει το άθροισμα όλων των διαγωνίων τιμών ενός πίνακα $Tr(\mathbf{A}) = \sum_i A_{i,i}$

Frobenius νόρμα του A: $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{Tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)}$

$$Tr(\mathbf{A}) = Tr(\mathbf{A}^T)$$

$Tr(\mathbf{ABC}) = Tr(\mathbf{CAB}) = Tr(\mathbf{BCA})$, αν το επιτρέπουν οι διαστάσεις των πινάκων

ή $Tr(\prod_{i=1}^n \mathbf{F}^{(i)}) = Tr(\mathbf{F}^{(n)} \prod_{i=1}^n \mathbf{F}^{(i)})$

Ένα βαθμωτό είναι το δικό του ίχνος: $a = Tr(a)$

Ορίζουσα (Determinant)

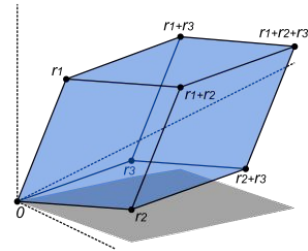
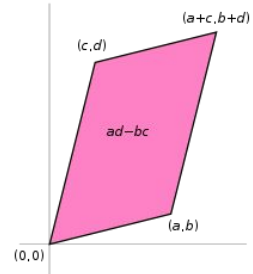
$\det(A)$: αντιστοιχεί πίνακα σε βαθμωτό

- Ισούνται με το γινόμενο όλων των ιδιοτιμών του πίνακα
- Γεωμετρική ερμηνεία
 - Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας δίνει την κλίμακα με την οποία το εμβαδόν ή ο όγκος (ή μιας μεγαλύτερης διάστασης αναλογία) πολλαπλασιάζεται με τον σχετικό γραμμικό μετασχηματισμό,
 - το πρόσημό της δείχνει αν ο μετασχηματισμός διατηρεί τον προσανατολισμό.

π.χ. $A_{2 \times 2}$, $\det(A) = -2$: όταν εφαρμόζεται στην περιοχή ενός επιπέδου με πεπερασμένο εμβαδόν, θα μετασχηματιστεί σε μια περιοχή με το διπλάσιο εμβαδόν, ενώ αντιστρέφει τον προσανατολισμό της.

$\det(A) = 0$: ο χώρος συστέλλεται

$\det(A) = 1$: ο μετασχηματισμός διατηρεί τον όγκο



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

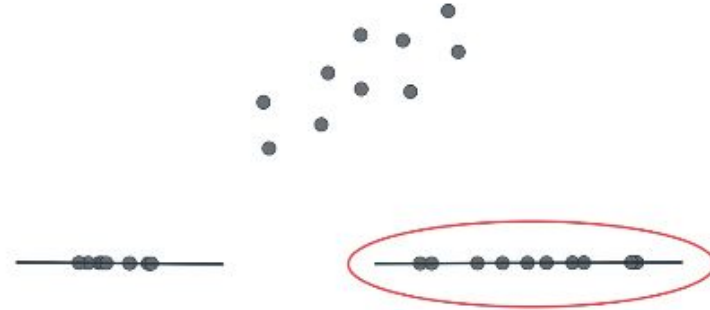
Taking a picture



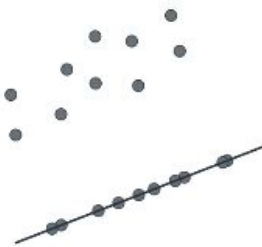
Dimensionality Reduction



Dimensionality Reduction



Taking a picture



Ποια είναι η ιδανική γραμμή για προβολή των δεδομένων (όπου αυτά θα είναι όσο πιο διακριτά γίνεται);

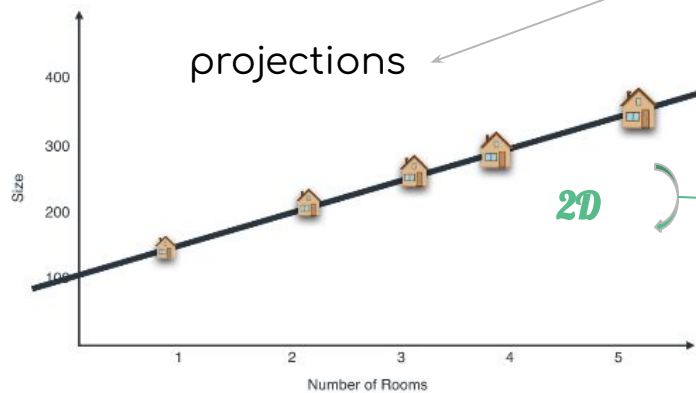
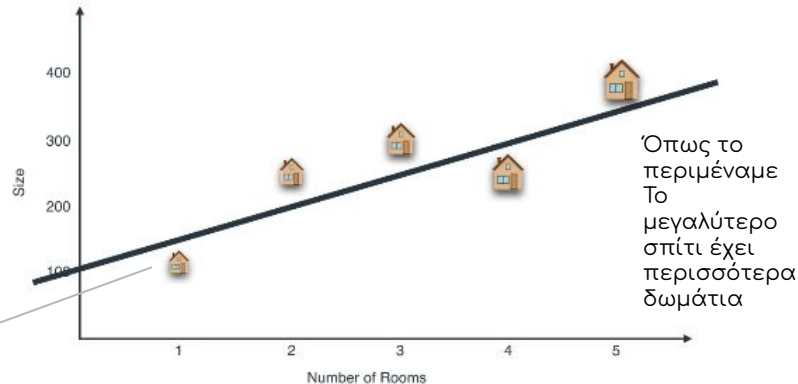
Principal Component Analysis (PCA)



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Housing Data

Διάνυσμα 5 χαρακτηριστικών $\xrightarrow{\text{PCA}}$ Διάνυσμα 2 χαρακτηριστικών



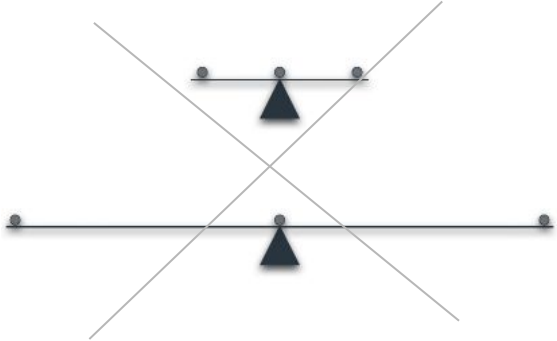


Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

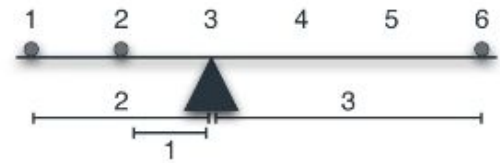
Mean



$$\text{Mean} = \frac{1+2+6}{3} = 3$$



Ίδιο mean value



$$\text{Variance} = \frac{2^2+1^2+3^2}{3} = 14/3$$



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Variance

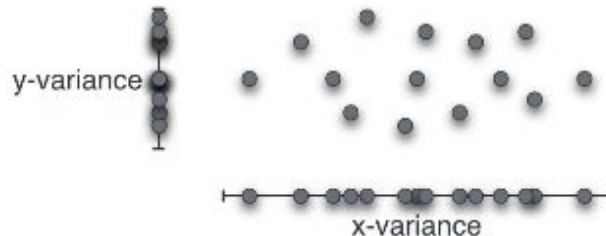


$$\text{Variance} = \frac{1^2 + 0^2 + 1^2}{3} = 2/3$$

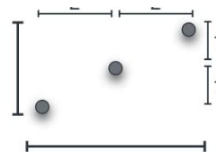
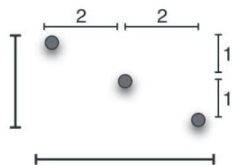


$$\text{Variance} = \frac{5^2 + 0^2 + 5^2}{3} = 50/3$$

Variance?



Variance?



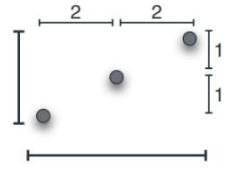
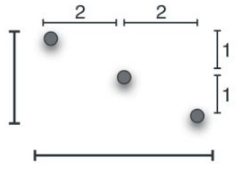
$$\text{x-variance} = \frac{2^2 + 0^2 + 2^2}{3} = 8/3$$

$$\text{y-variance} = \frac{1^2 + 0^2 + 1^2}{3} = 2/3$$

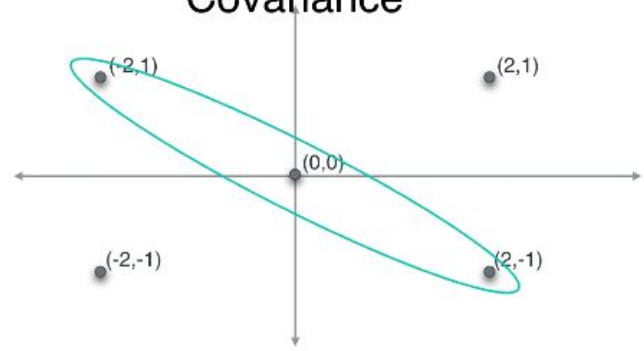
Είναι ίδιο για x y προβολές



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα



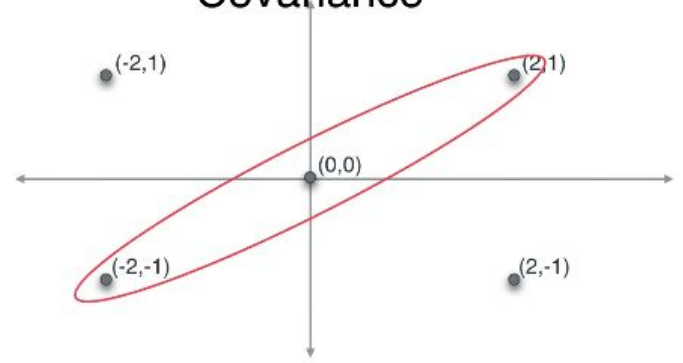
Covariance



Διαφορά;



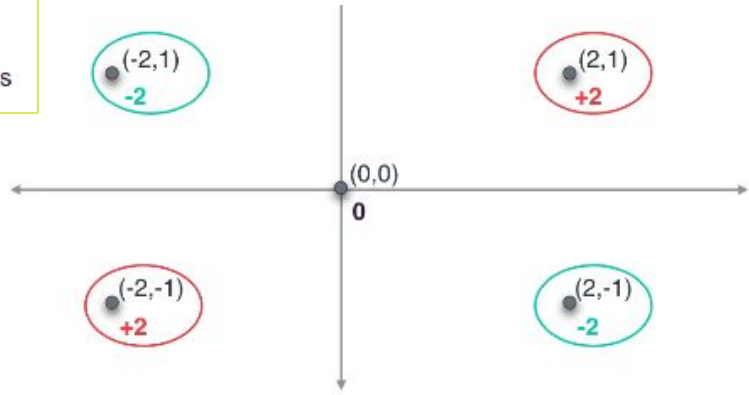
Covariance



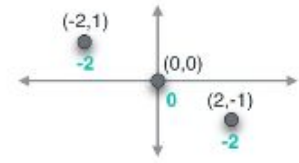


Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

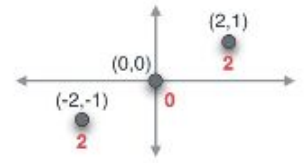
Product of coordinates



Covariance



$$\text{covariance} = \frac{(-2) + 0 + (-2)}{3} = -4/3$$

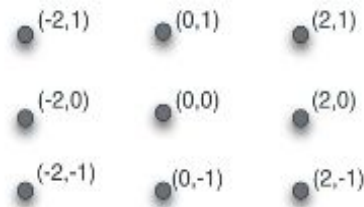
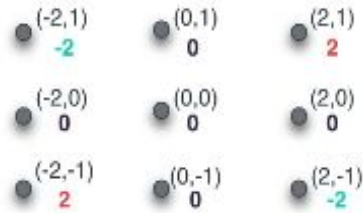
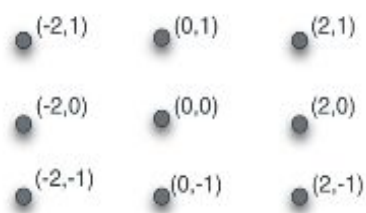


$$\text{covariance} = \frac{2 + 0 + 2}{3} = 4/3$$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το covariance των σημείων

Covariance



$$\text{covariance} = \frac{-2 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + -2}{9} = 0$$

Είναι 0 και αυτό φαίνεται λογικό αφού δεν φαίνεται να υπάρχει κάποια θετική ή αρνητική συσχέτιση

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα



Covariance



negative
covariance



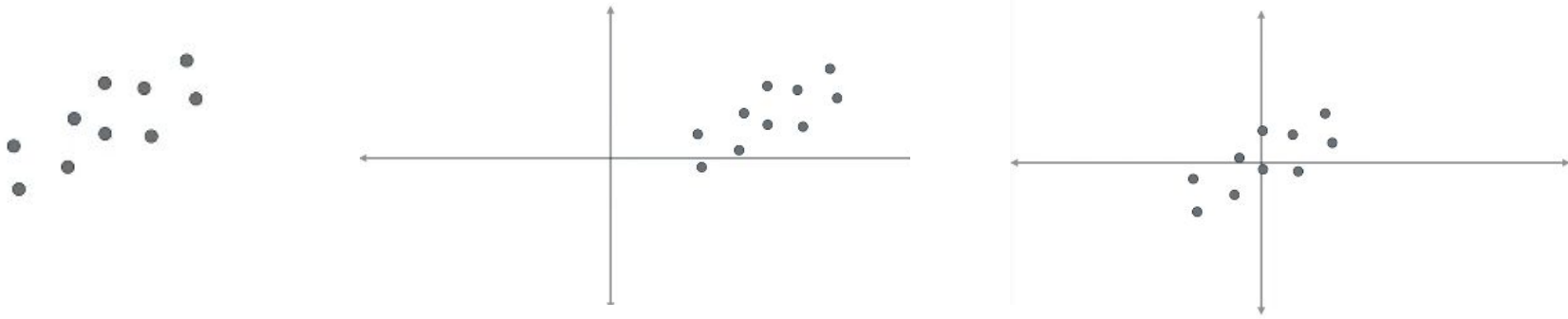
covariance zero
(or very small)



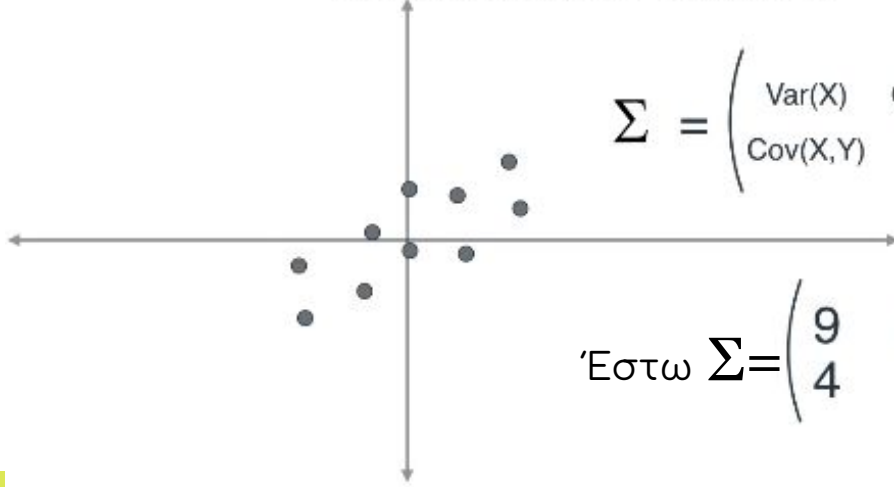
positive
covariance



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα



Covariance matrix



$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(X,Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

Έστω $\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Linear Transformations

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \rightarrow (9x+4y, 4x+3y)$$

Linear Transformations

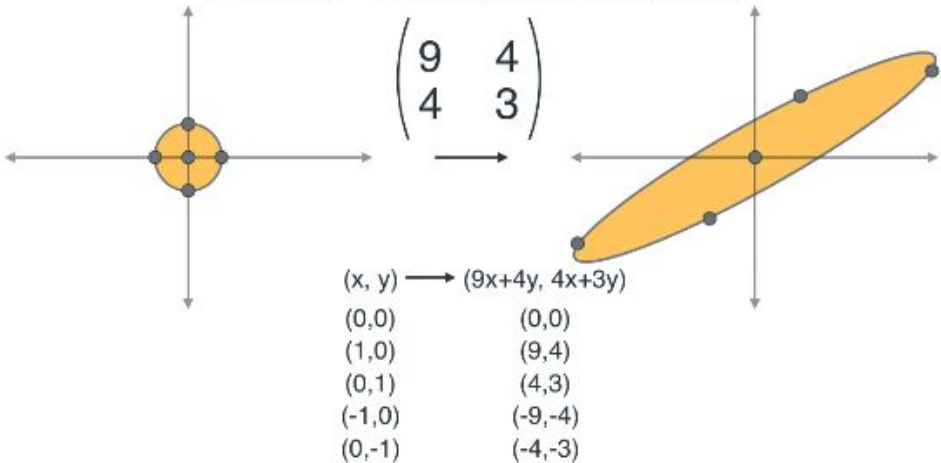
$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &\rightarrow (9x+4y, 4x+3y) \\ (0, 0) &\quad (0, 0) \\ (1, 0) &\quad (9, 4) \end{aligned}$$

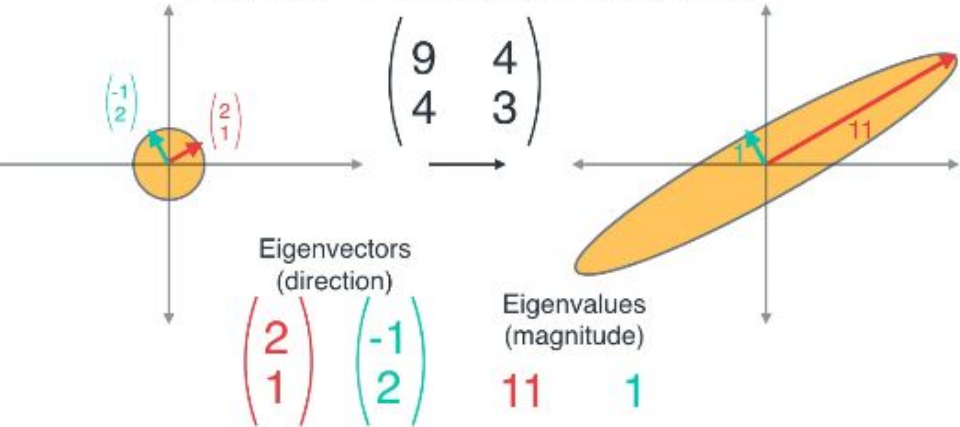


Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Linear Transformations



Linear Transformations



$$\begin{vmatrix} x-9 & -4 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} = (x-9)(x-3) - (-4)(-4) = x^2 - 12x + 11 = (x-11)(x-1)$$

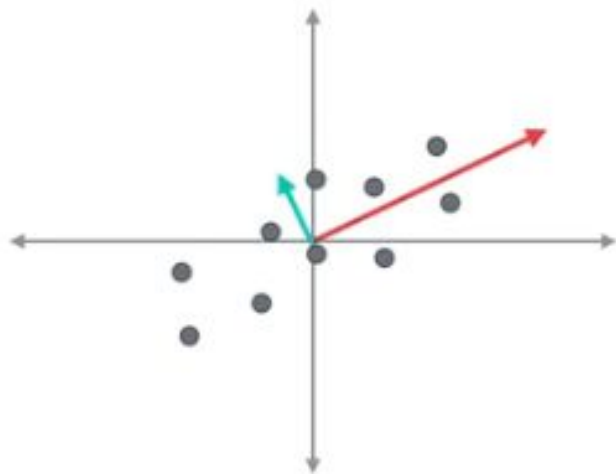
$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 11 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Principal Component Analysis (PCA)



$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eigenvectors
(direction)

$$11$$

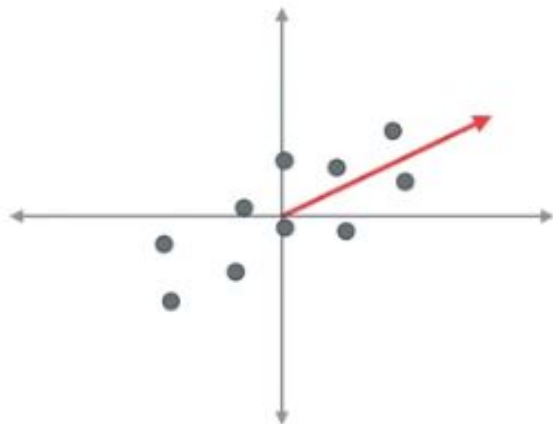
$$1$$

Eigenvalues
(magnitude)

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα



Principal Component Analysis (PCA)



$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvectors
(direction)

$$11$$

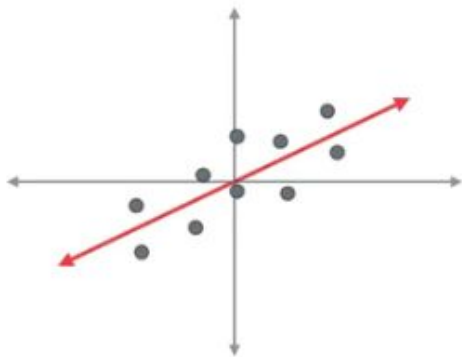
Eigenvalues
(magnitude)





Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα

Principal Component Analysis (PCA)



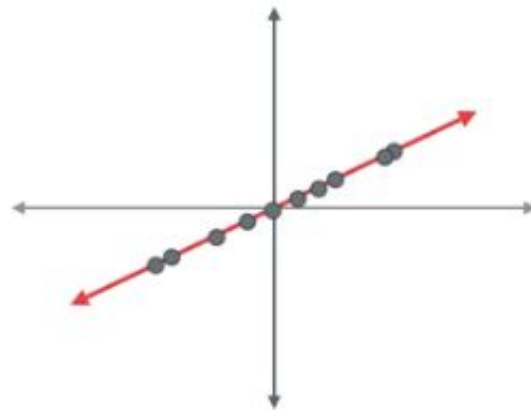
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvectors
(direction)

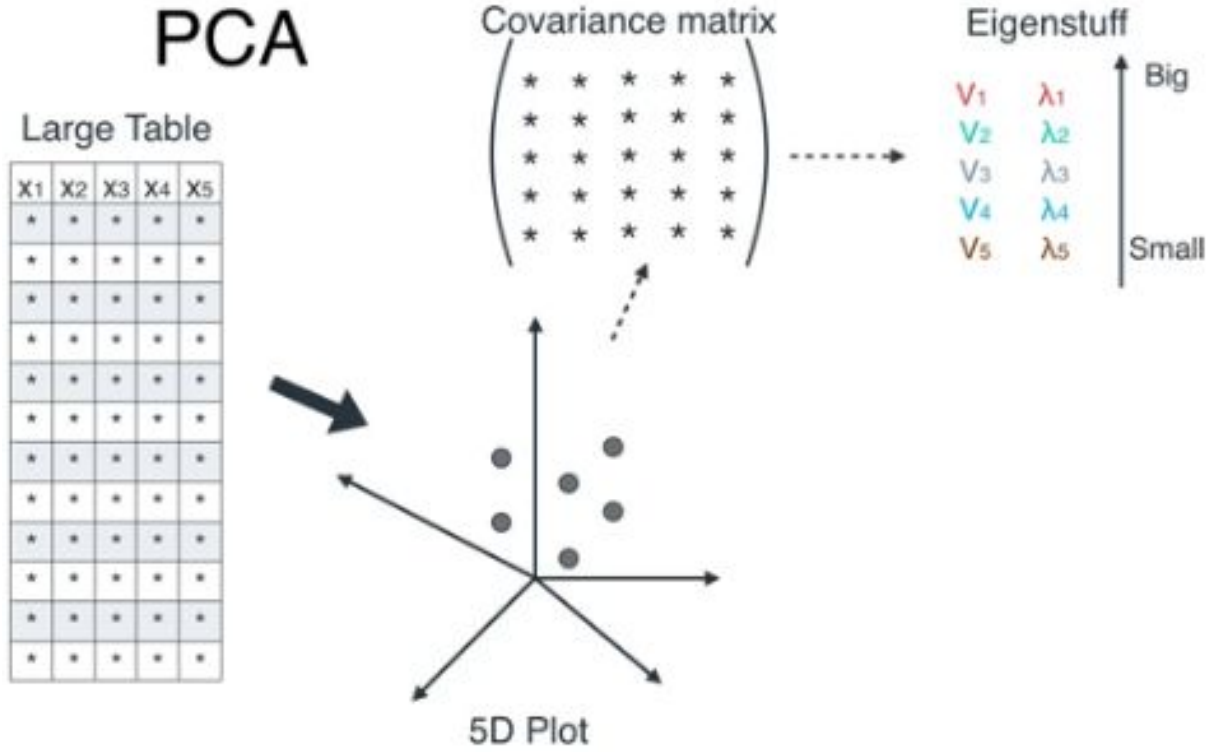
$$11$$

Eigenvalues
(magnitude)



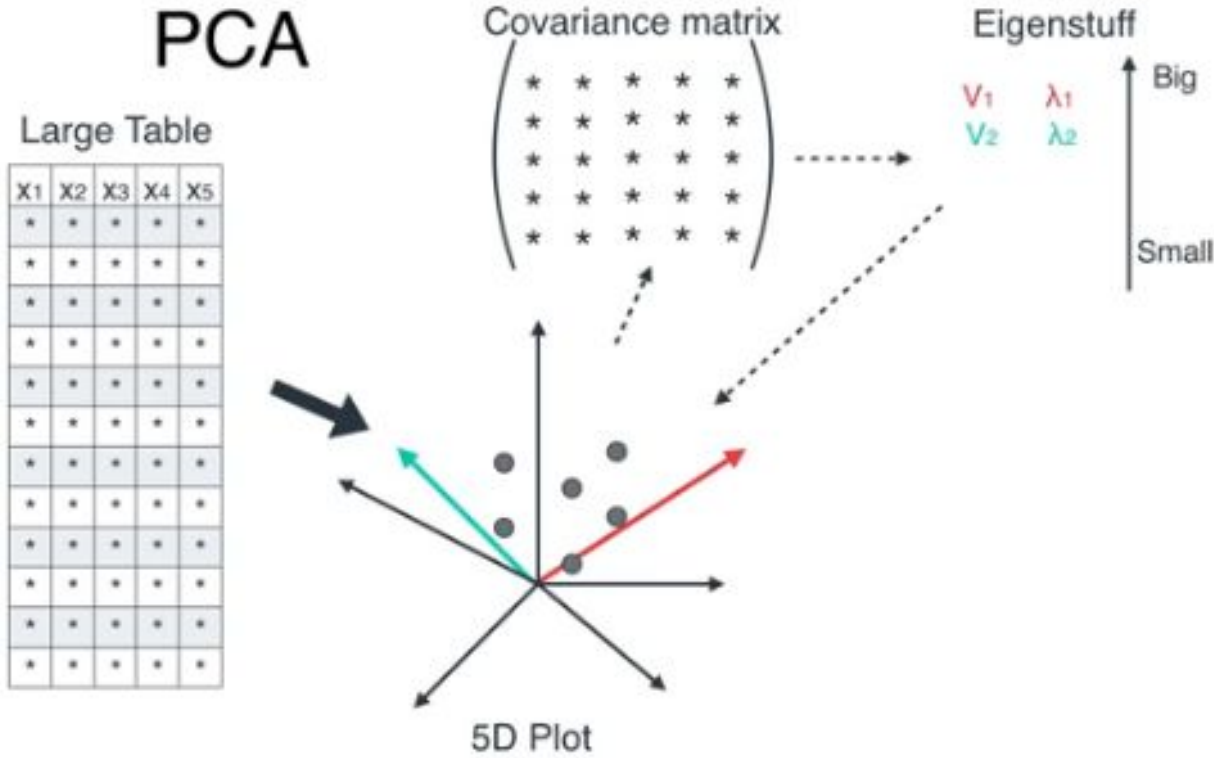


Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα



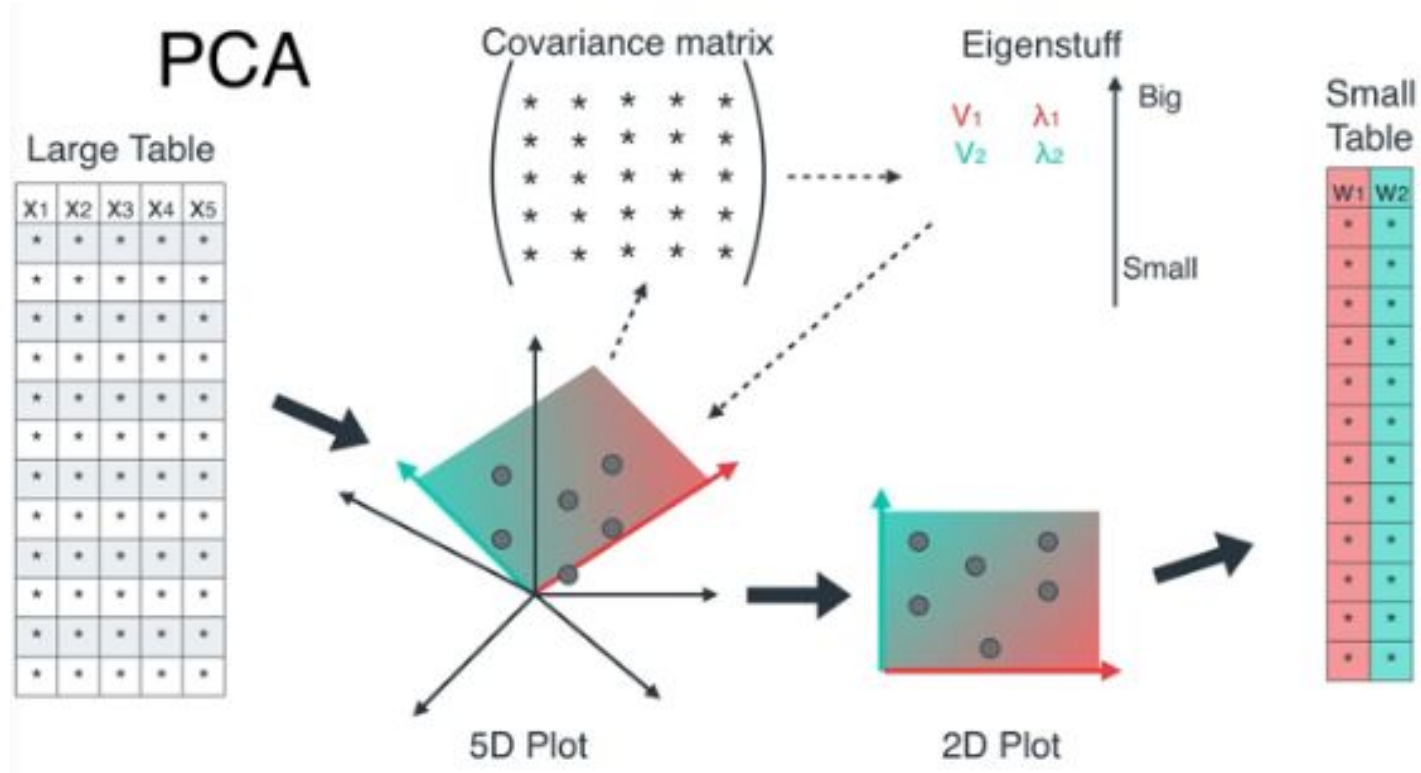


Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα





Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών: παράδειγμα





Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (Principal Components Analysis)

Έστω $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in \mathcal{R}^n$

Συμπύεση: αποθήκευση των σημείων με τρόπο που απαιτεί λιγότερη μνήμη, αλλά μπορεί να χάσει κάποια ακρίβεια.

→ αναπαράσταση σε μικρότερες διαστάσεις, χωρίς να χάνουμε πολύ σε ακρίβεια

$\forall x^{(i)} \in \mathcal{R}^n$ θα υπολογίσουμε το $c^{(i)} \in \mathcal{R}^l$

Αν $l < n$, η αποθήκευση των c θα απαιτήσει λιγότερη μνήμη από την αποθήκευση των x .

Αναζητούμε τη συνάρτηση κωδικοποίησης $f(x) = c$
και τη συνάρτηση αποκωδικοποίησης $x \approx g(f(c))$



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

Το PCA ορίζεται από την επιλογή της συνάρτησης αποκωδικοποίησης.

$$\text{Έστω, } g(\mathbf{c}) = D\mathbf{c}, \quad D \in \mathbb{R}^{n \times l}$$

Ο υπολογισμός του βέλτιστου \mathbf{c} για αυτόν τον αποκωδικοποιητή μπορεί να είναι ένα δύσκολο πρόβλημα.

→ Για να παραμείνει εύκολο το πρόβλημα της κωδικοποίησης,
ο PCA περιορίζει τις στήλες του D ώστε να είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

(ο D δεν είναι ακόμα από τεχνικής απόψεως "ορθογώνιος πίνακας" εκτός και αν $l = n$)

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

→ Πρέπει να δημιουργήσουμε το βέλτιστο c^* για κάθε x

Να ελαχιστοποιηθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου εισόδου x και της ανακατασκευής του, $g(c^*)$ → χρήση νόρμας L^2



$$c^* = \underset{c}{\operatorname{argmin}} \|x - g(c)\|_2$$

Επιλέγουμε το τετράγωνο της L^2 νόρμας επειδή είναι μονοτονική και αύξουσα συνάρτηση για θετικές τιμές. Οπότε:

$$c^* = \underset{c}{\operatorname{argmin}} \|x - g(c)\|_2^2$$

Οπότε αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το $(x - g(c))^T (x - g(c))$



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

$$c^* = \underset{c}{\operatorname{argmin}} - 2x^T g(c) + g(c)^T g(c)$$

$$c^* = \underset{c}{\operatorname{argmin}} - 2x^T Dc + c^T D^T Dc$$

$$= \underset{c}{\operatorname{argmin}} - 2x^T Dc + c^T I_1 c$$

$$= \underset{c}{\operatorname{argmin}} - 2x^T Dc + c^T c$$

$$\nabla c(-2x^T Dc + c^T c) = 0$$

$$- 2D^T x + 2c = 0$$

$$c = D^T x$$

Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε το x χρησιμοποιώντας απλώς έναν πίνακα !

Κωδικοποιητής : $f(x) = D^T x$.

Ανασυγκρότηση PCA : $r(x) = g(f(x)) = DD^T x$



Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

Πρέπει να επιλέξουμε τον πίνακα κωδικοποίησης D .

→ επανεξετάζουμε την ιδέα της ελαχιστοποίησης της απόστασης L^2 μεταξύ του x και του c

Δεδομένου ότι θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο πίνακα D για να αποκωδικοποιήσουμε όλα τα σημεία, δεν μπορούμε πλέον να θεωρούμε τα σημεία μεμονωμένα.

Αντ' αυτού, πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την νόρμα Frobenius του πίνακα σφαλμάτων, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διαστάσεις και όλα τα σημεία.

$$D^* = \underset{D}{\operatorname{argmin}} \sqrt{\sum_{i,j} (x_j^{(i)} - r(x^{(i)})_j)^2}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $D^T D = I_l$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

Εύρεση του D^*

$l = 1$: $D \rightarrow$ vector d οπότε το πρόβλημα μειώνεται σε $r(x) = DD^T x$

$$d^* = \underset{d}{\operatorname{argmin}} \sum_i \left\| (x_i^{(i)} - dd^T x^{(i)}) \right\|_2^2$$

$$d^* = \underset{d}{\operatorname{argmin}} \sum_i \left\| (x_i^{(i)} - d^T x^{(i)} d) \right\|_2^2$$

$$d^* = \underset{d}{\operatorname{argmin}} \sum_i \left\| (x_i^{(i)} - x^{(i)T} dd) \right\|_2^2$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\|d\|_2 = 1$$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών

$$d^* = \underset{d}{\operatorname{argmin}} \|(X - Xdd^T)\|_F^2 \quad \text{υπό την προϋπόθεση ότι} \quad d^T d = 1$$

$$\underset{d}{\operatorname{argmax}} \operatorname{Tr}(d^T X^T X d)$$

Πρόβλημα βελτιστοποίησης \rightarrow χρήση eigendecomposition.

Συγκεκριμένα, η βέλτιστη d δίνεται από τον ιδιοδιάνυσμα του $X^T X$ που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

Αυτή η παράγωγος είναι ειδική για την περίπτωση του $l = 1$ και ανακτά μόνο το πρώτο κύριο συστατικό.

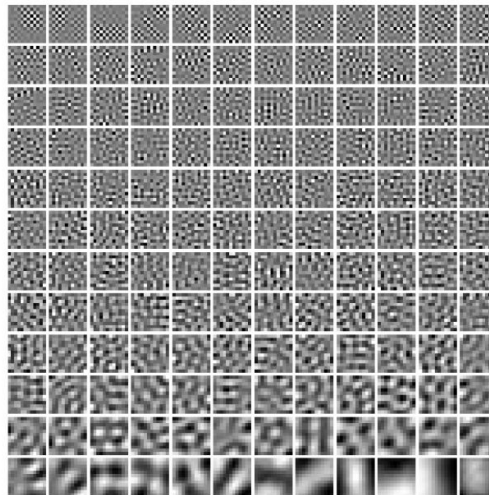
Γενικότερα, όταν θέλουμε να ανακτήσουμε μια βάση των κύριων συστατικών, η μήτρα D δίνεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μεγαλύτερες ιδιοτιμές.

Εφαρμογές : Συμπίεση εικόνας

PCA example — original



PCA example — PCA basis



PCA example — 90% compressed

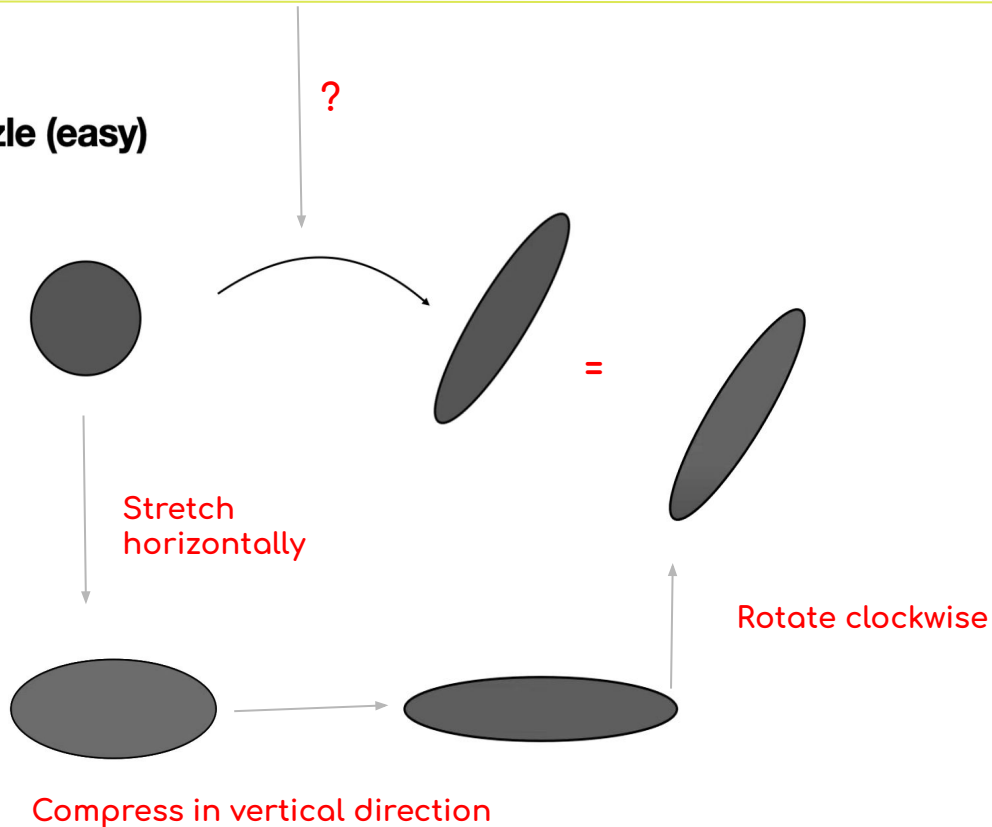


PCA example — 50% compressed



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Puzzle (easy)

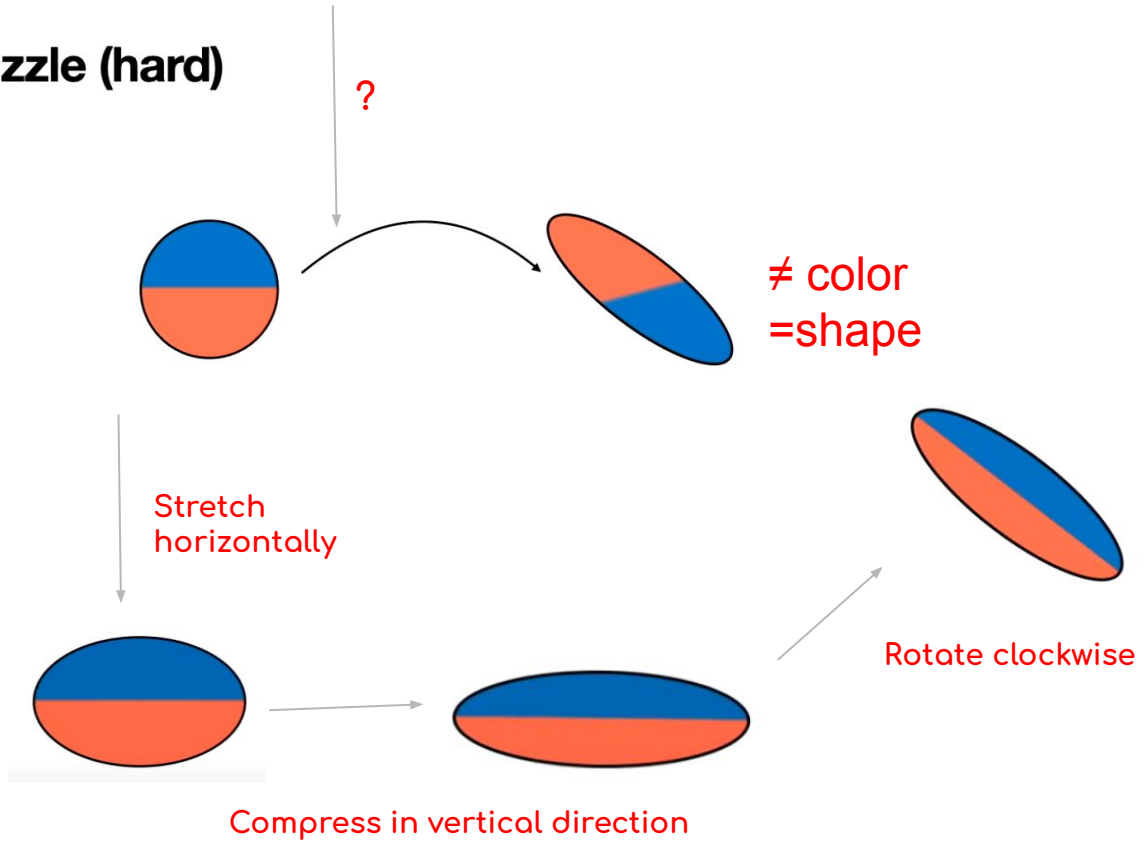


Μετασχηματισμοί:
μόνο ως προς οριζόντια και
κάθετα κατεύθυνση,
όχι υπό άλλη γωνία



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Puzzle (hard)



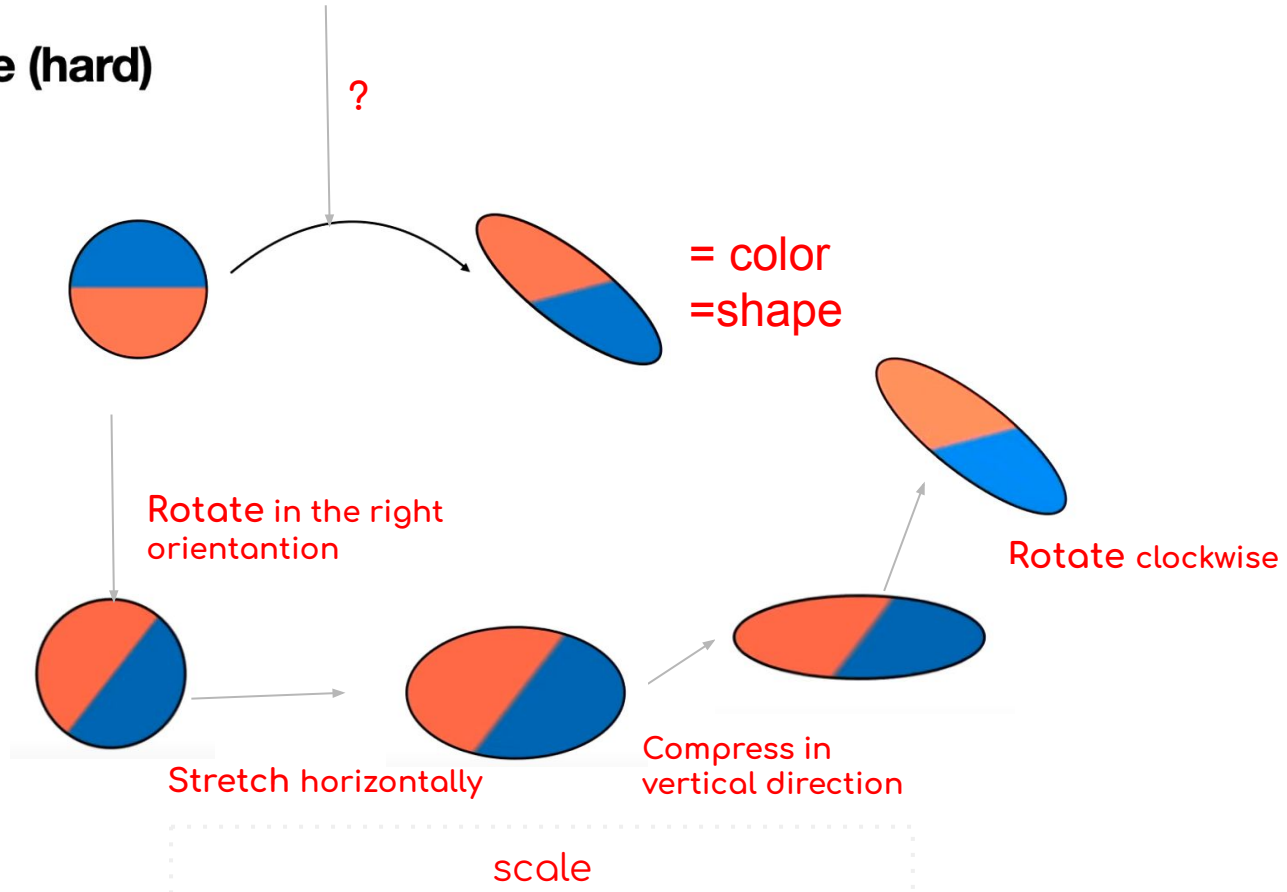


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Puzzle (hard)

Λύση

Με περιστροφή, κλιμάκωση και περιστροφή μπορούμε να μιμηθούμε κάθε γραμμικό μετασχηματισμό

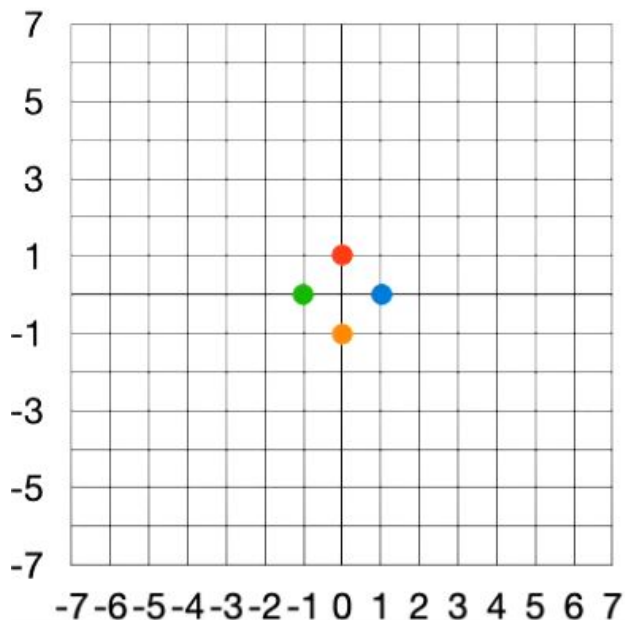


= color
= shape

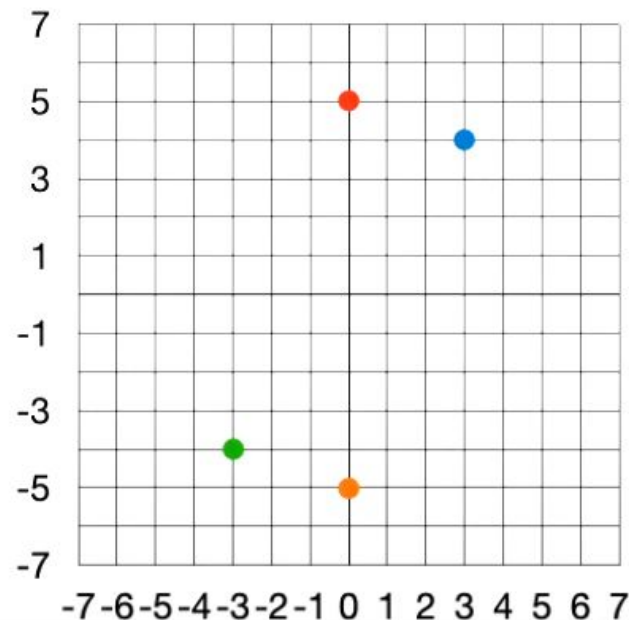


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$



(p,q)	(3p+0q, 4p+5q)
(1,0)	(3, 4)
(0,1)	(0, 5)
(-1,0)	(-3, -4)
(0,-1)	(0, -5)

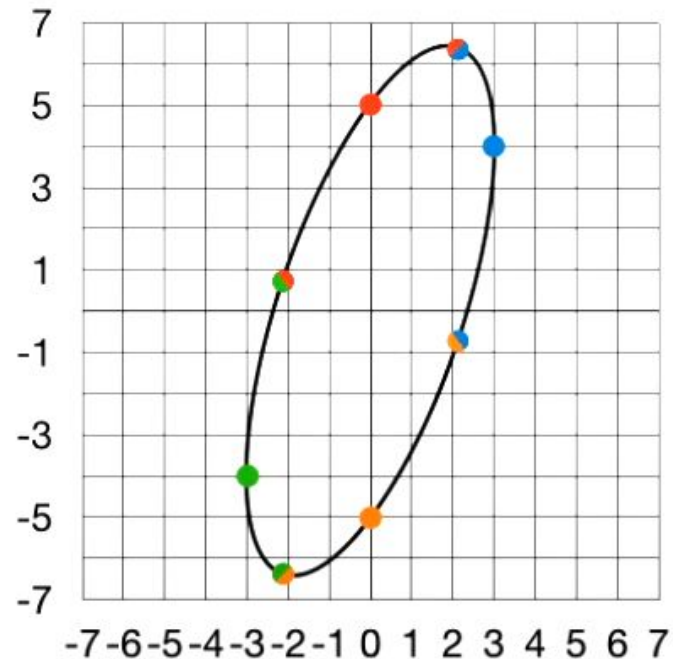
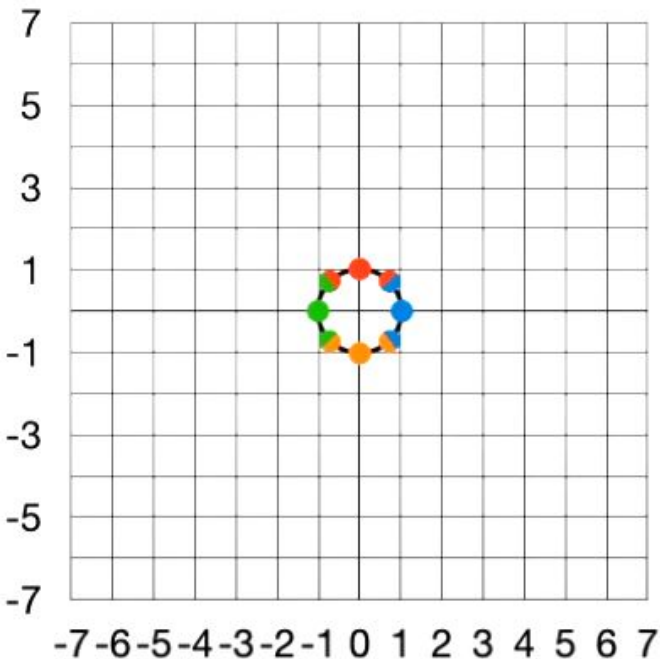




Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

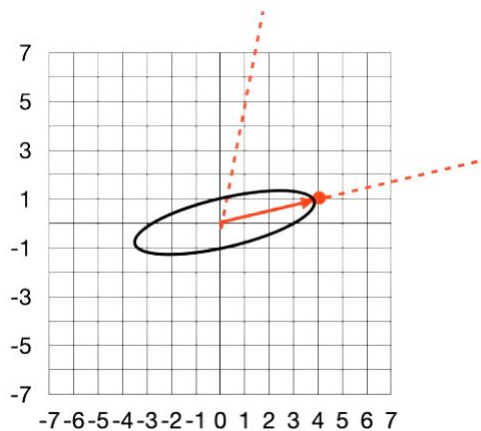
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(p, q)	$(3p+0q, 4p+5q)$
$(1, 0)$	$(3, 4)$
$(0, 1)$	$(0, 5)$
$(-1, 0)$	$(-3, -4)$
$(0, -1)$	$(0, -5)$

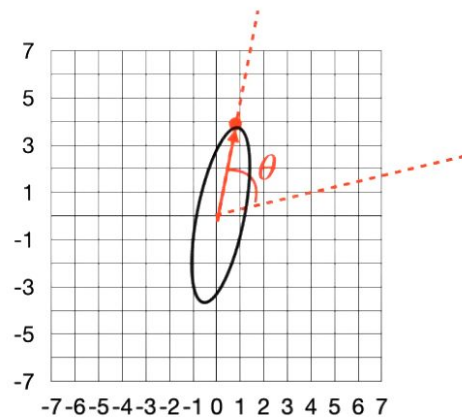


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Πίνακας περιστροφής



$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

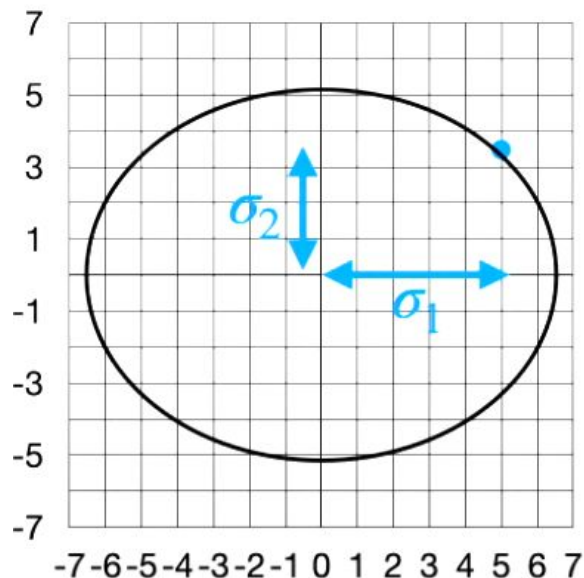


$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

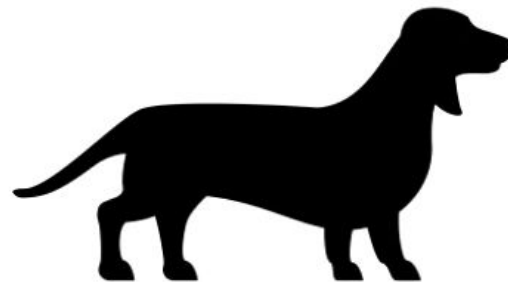


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Πίνακας κλιμάκωσης

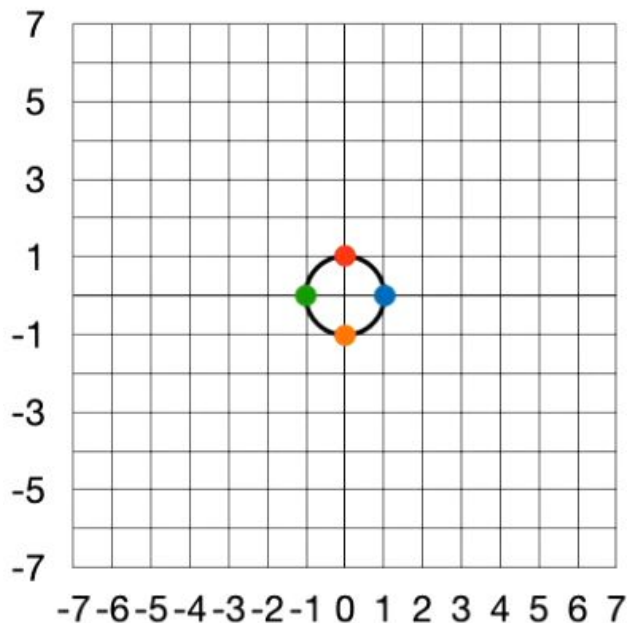


$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$





Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

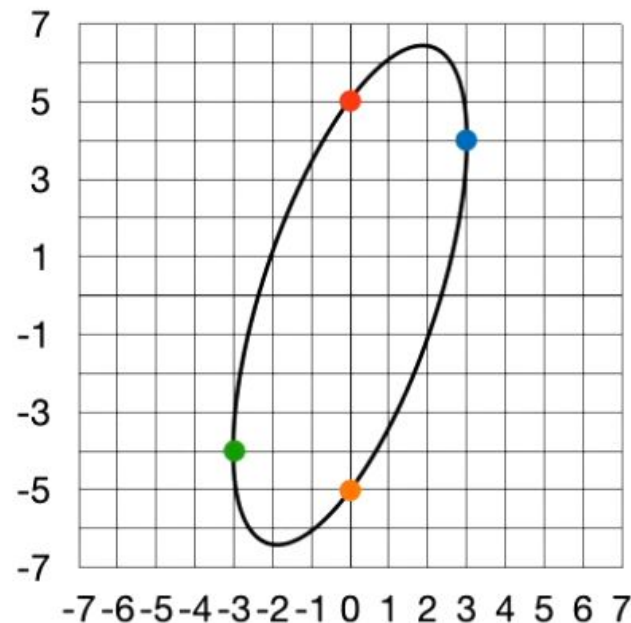


$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

↻ $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

↕ $\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$

↻ $\begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

WolframAlpha computational intelligence.

singular value decomposition [[3,0],[4,5]]

Extended Keyboard Upload

Input:

singular value decomposition $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Result:

$M = U \cdot \Sigma \cdot V^T$

where

$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$A = U \Sigma V^T$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

```
from numpy.linalg import svd
A = np.array([[3,0],[4,5]])
svd(A)

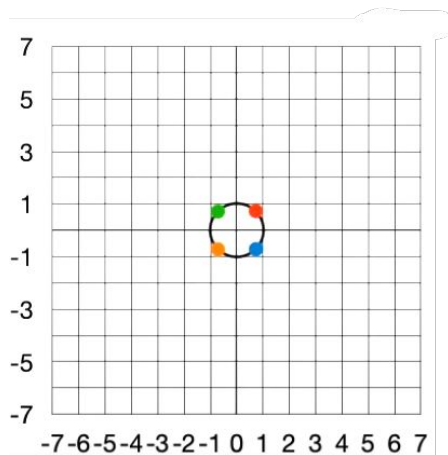
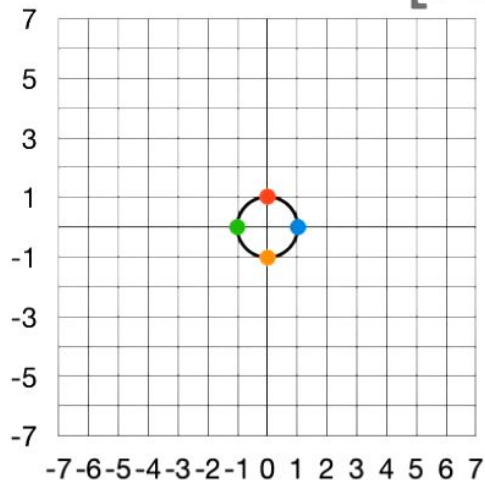
(array([[ -0.31622777, -0.9486833 ],
        [ -0.9486833 ,  0.31622777 ]]),
 array([6.70820393, 2.23606798]),
 array([[ -0.70710678, -0.70710678 ],
        [ -0.70710678,  0.70710678 ]]))
```


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

$$A = U\Sigma V^\dagger$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

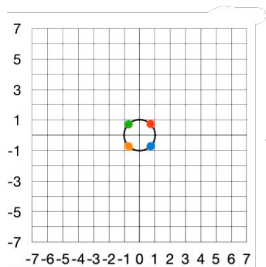
$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



Rotation of $\theta = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$

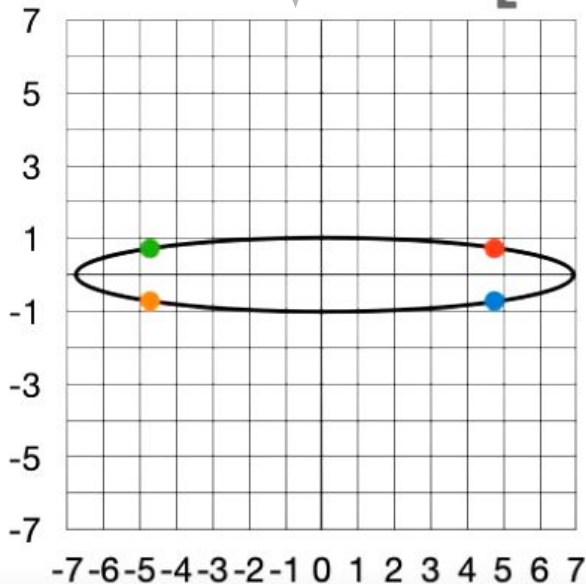


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



$$A = U\Sigma V^\dagger$$

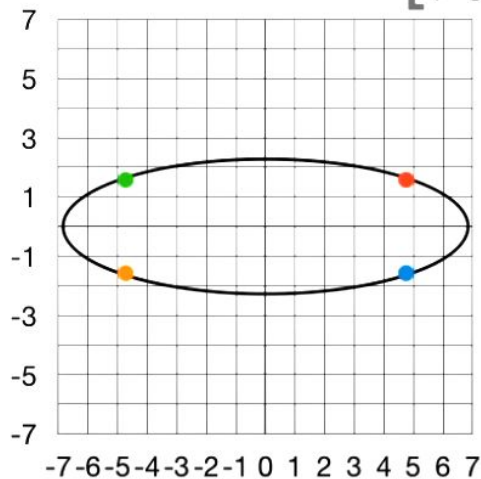
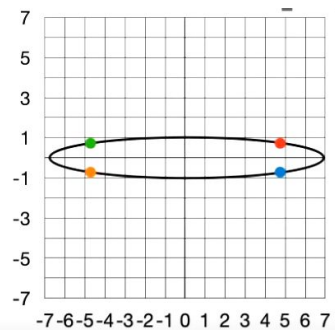
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Horizontal scaling by $3\sqrt{5}$

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



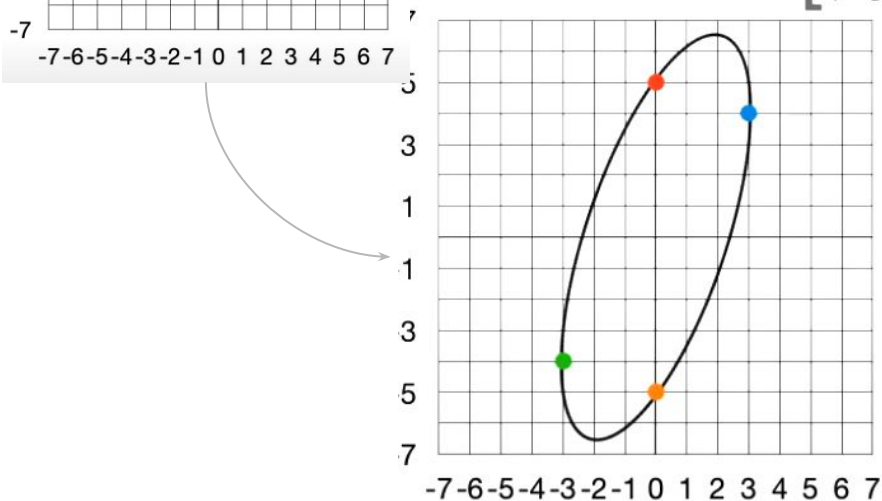
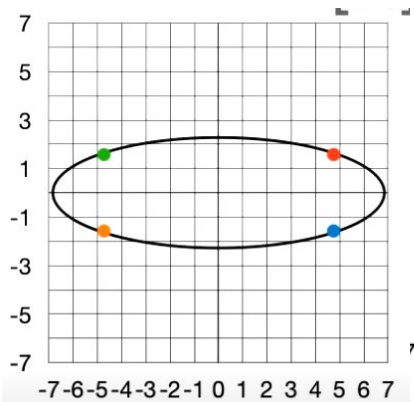
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vertical scaling by $\sqrt{5}$



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



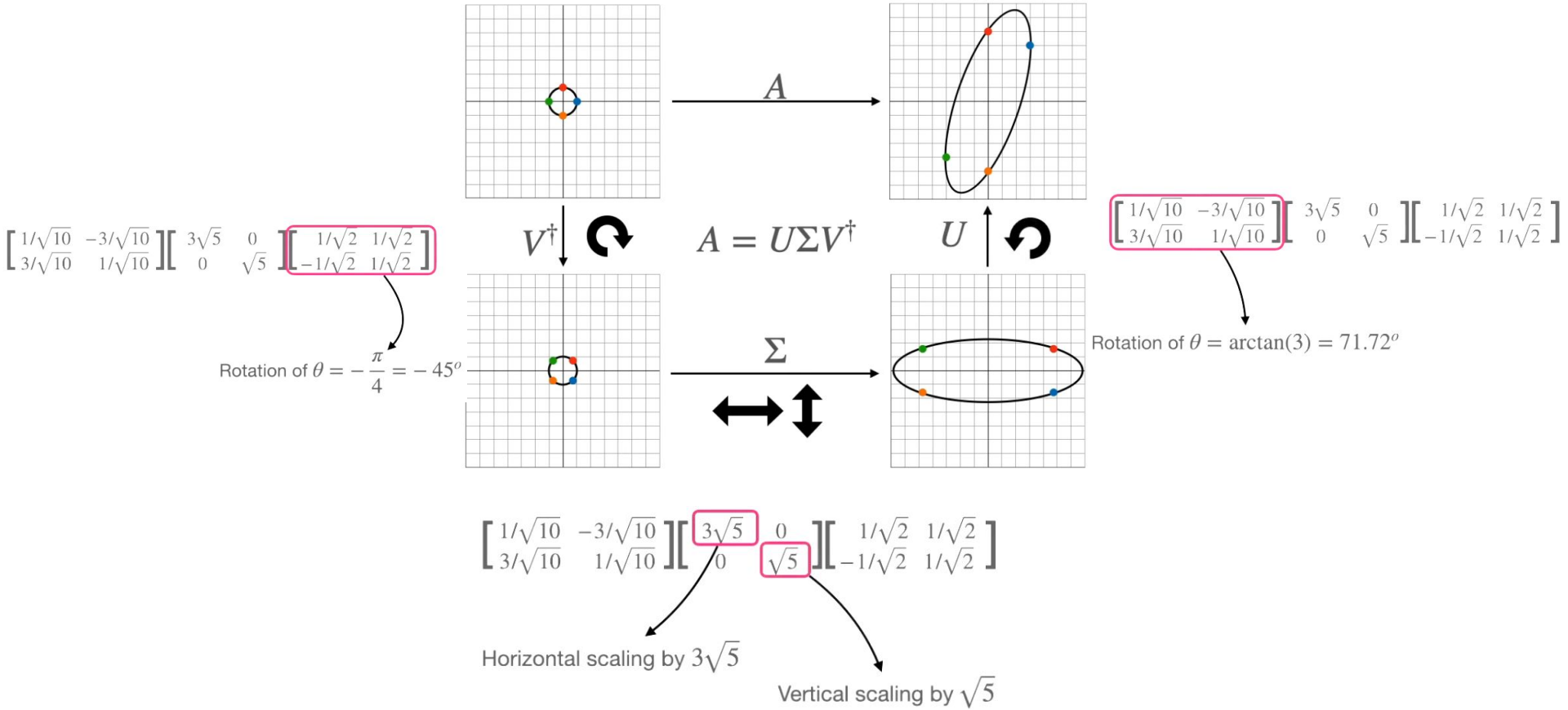
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

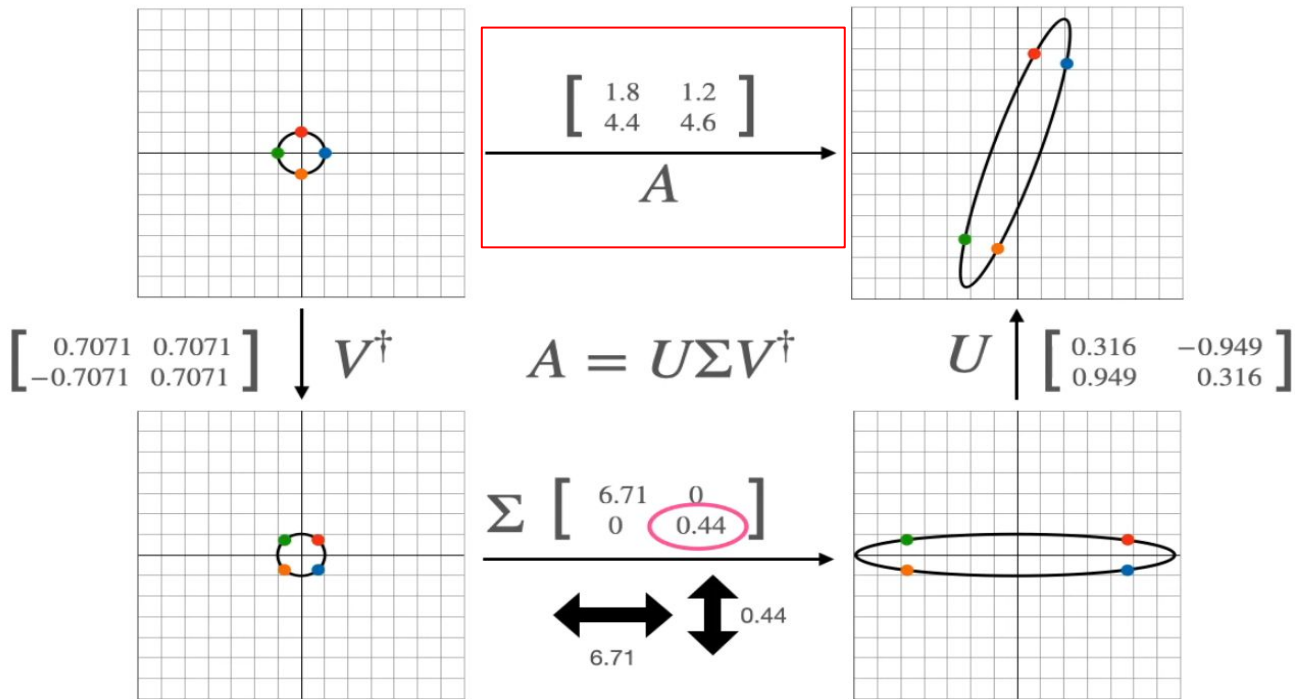
Rotation of $\theta = \arctan(3) = 71.72^\circ$



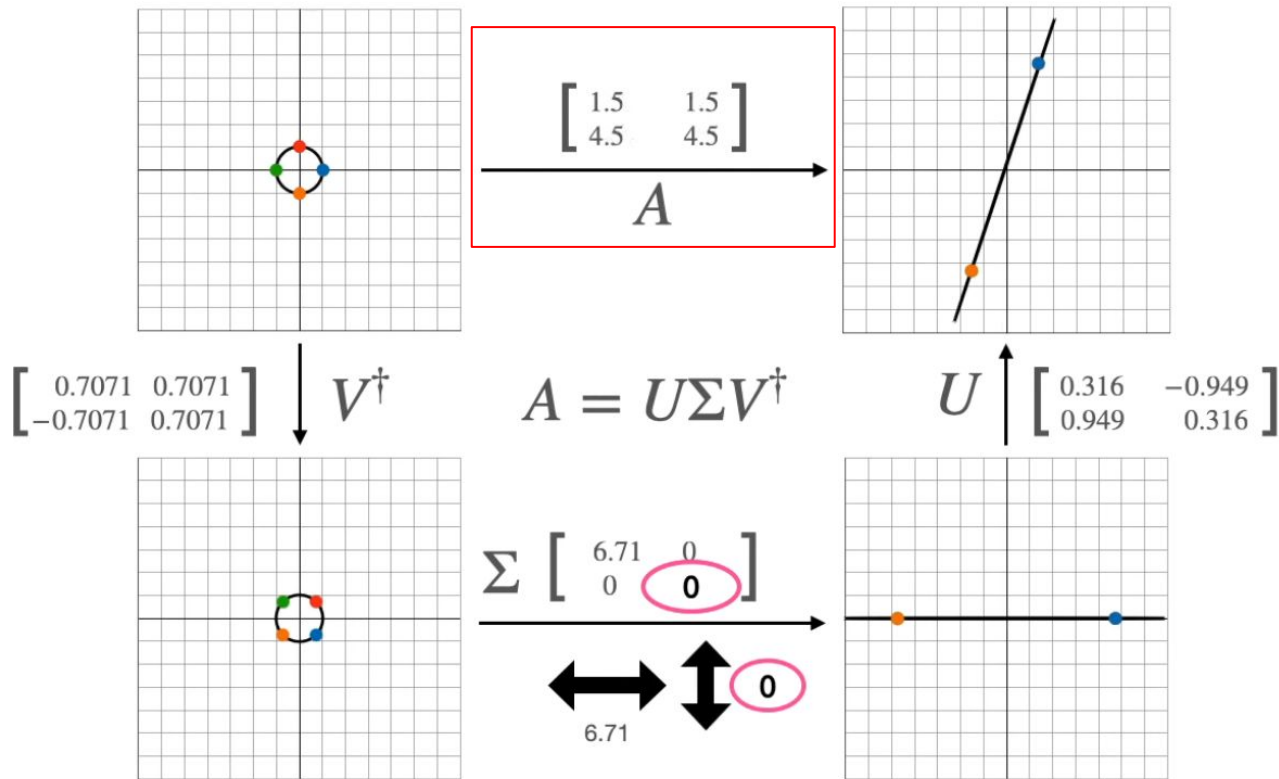
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



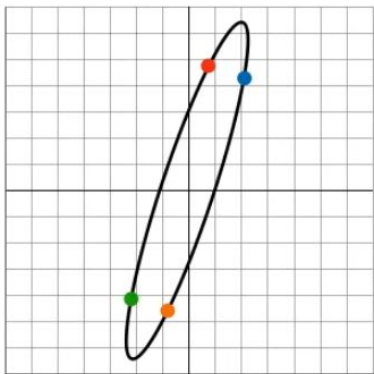
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

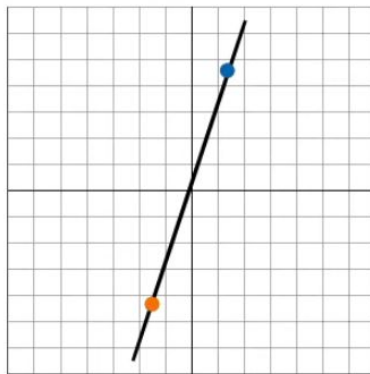


Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



$$\begin{bmatrix} 1.8 & 1.2 \\ 4.4 & 4.6 \end{bmatrix}$$

Rank 2



$$\begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 4.5 & 4.5 \end{bmatrix}$$

Rank 1

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Πίνακας με rank=1

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
-1	-1	-2	-3	-4
2	2	4	6	8
10	10	20	30	40



1	2	3	4
-1	-2	-3	-4
2	4	6	8
10	20	30	40

=

1			
-1			
2	1	2	3
10			

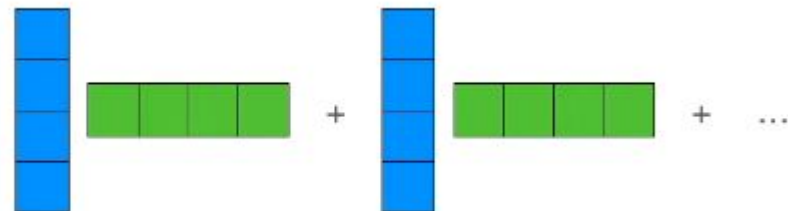
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



Πίνακας με $\text{rank} > 1$: προσέγγιση όπως λειτουργεί για $\text{rank} = 1$

3	1	4	1
5	9	2	6
5	3	5	8
9	7	9	3

=

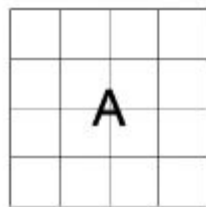


+

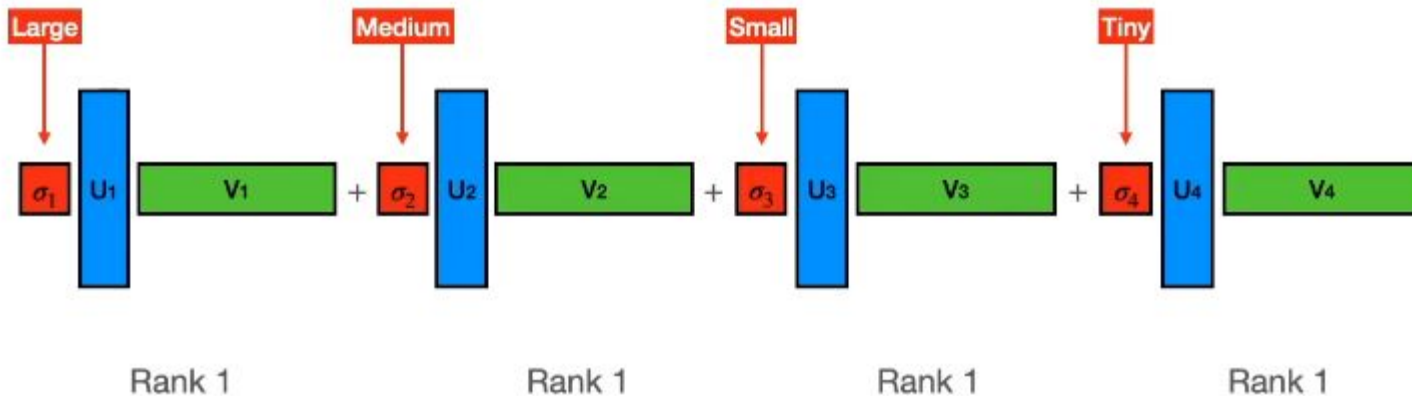
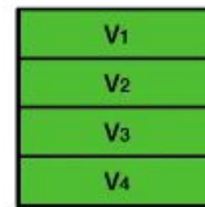
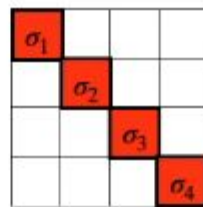
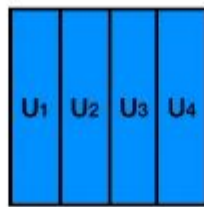
+

...

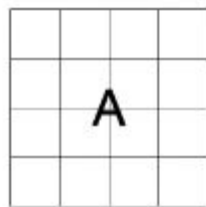
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



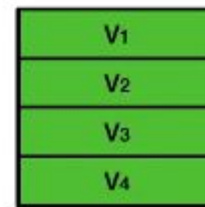
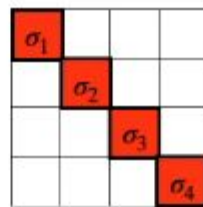
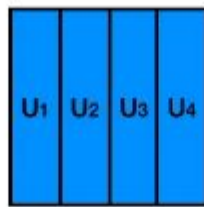
=



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



=



Large

σ_1



V_1

Rank 1

Medium

σ_2



V_2

Rank 1

Small

σ_3



V_3

Rank 1

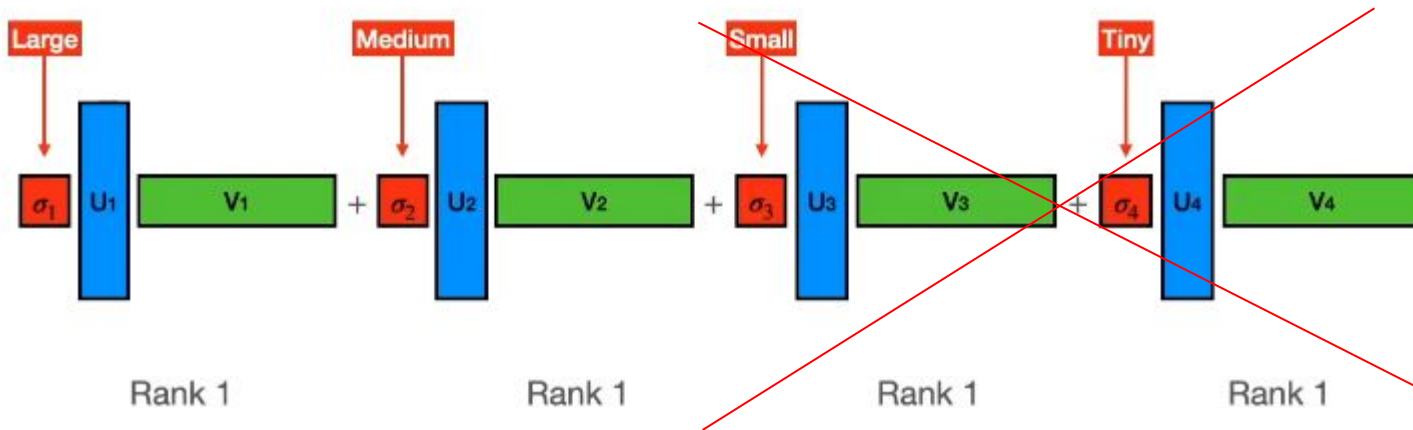
Tiny

σ_4

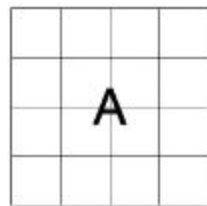


V_4

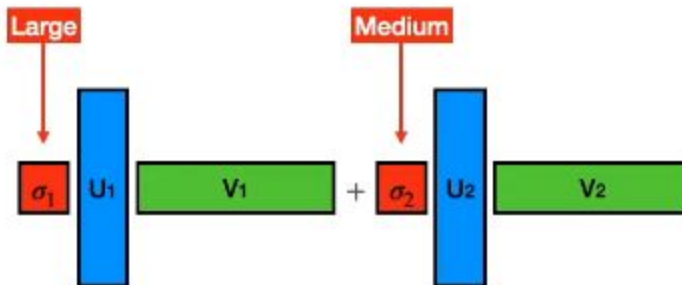
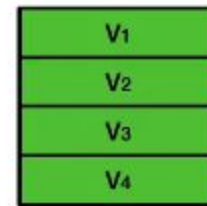
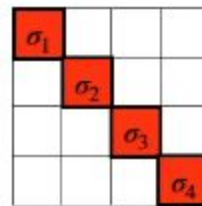
Rank 1



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



=

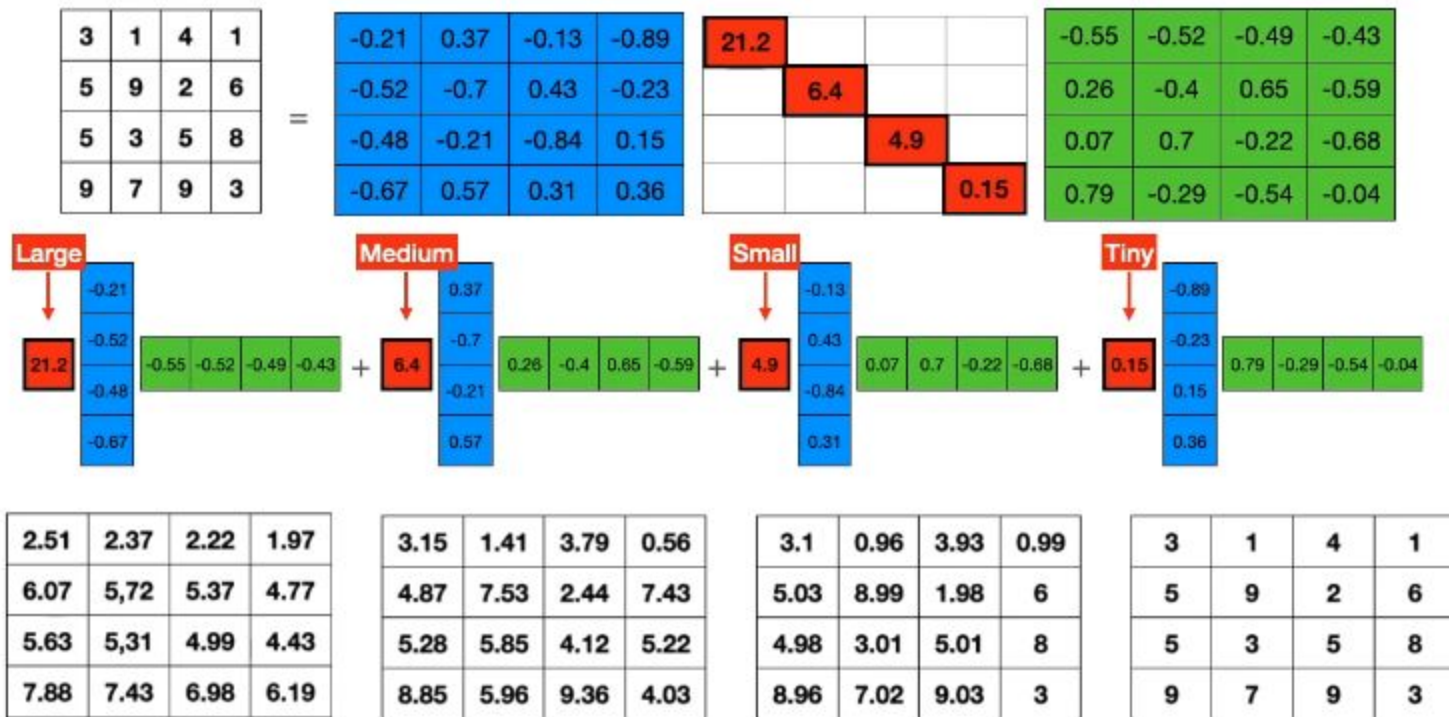


Rank 1

Rank 1



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



3	1	4	1
5	9	2	6
5	3	5	8
9	7	9	3

=

-0.21	0.37	-0.13	-0.89
-0.52	-0.7	0.43	-0.23
-0.48	-0.21	-0.84	0.15
-0.67	0.57	0.31	0.36

21.2			
	6.4		
		4.9	
			0.15

-0.55	-0.52	-0.49	-0.43
0.26	-0.4	0.65	-0.59
0.07	0.7	-0.22	-0.68
0.79	-0.29	-0.54	-0.04

Large

21.2
-0.21
-0.52
-0.48
-0.67

Medium

6.4
0.37
-0.7
-0.21
0.57

-0.55	-0.52	-0.49	-0.43
-------	-------	-------	-------

+

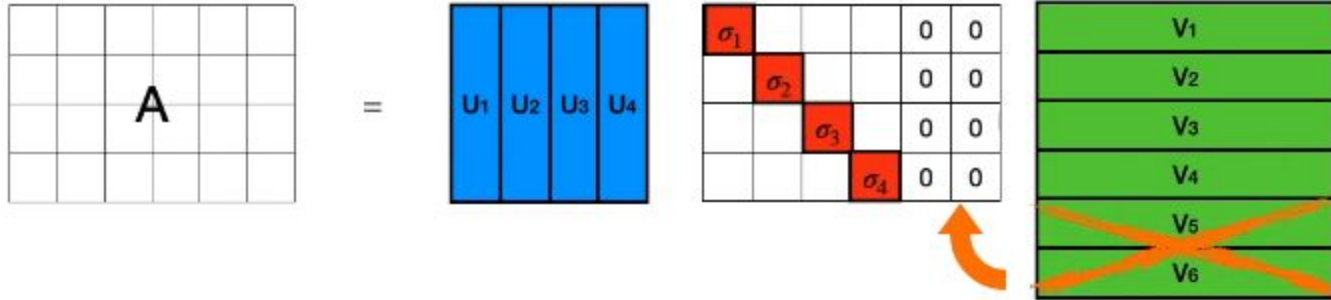
0.26	-0.4	0.65	-0.59
------	------	------	-------

2.51	2.37	2.22	1.97
6.07	5.72	5.37	4.77
5.63	5.31	4.99	4.43
7.88	7.43	6.98	6.19

3.15	1.41	3.79	0.56
4.87	7.53	2.44	7.43
5.28	5.85	4.12	5.22
8.85	5.96	9.36	4.03

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

Μη τετραγωνικός πίνακας;





Ανάλυση διανυσμάτων πάνω σε ορθογώνιους άξονες

- Αν ένας πίνακας δεν είναι τετραγωνικός, η ανάλυση ιδιοτιμών δεν ορίζεται.
- Αντ' αυτού, χρησιμοποιούμε την ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές

Κάθε πίνακας A ($m \times n$) μπορεί να γραφεί ως $A = U\Sigma V^T$

Σημαντική εφαρμογή: Μπορούμε να γενικεύσουμε, εν μέρει, την αντιστροφή ενός μη τετραγωνικού πίνακα

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



$$A = U\Sigma V^T$$

Όπου U: Ορθογώνιος πίνακας $m \times m$

→ Περιστροφή (Rotation)

Σ: Διαγώνιος πίνακας διάστασης $m \times n$ → Έκταση (Stretch)
(όχι απαραίτητα τετραγωνικός)

V: Ορθογώνιος πίνακας $n \times n$

→ Περιστροφή (Rotation)

$$A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}$$

Left singular vector singular values Right singular vector

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



Τι είναι τα U, Σ, V^T

Ίδιος πίνακας

$$A = \underline{V} \underline{\Lambda} V^{-1}$$

Διαφορετικοί Πίνακες

$$A = \underline{U} \underline{\Sigma} V^T$$

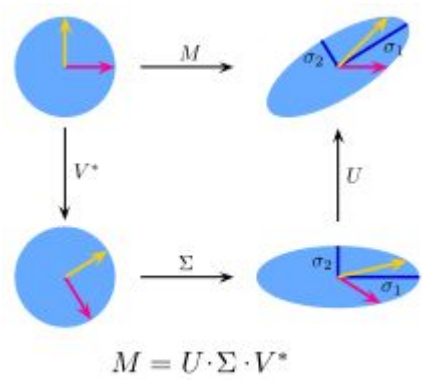
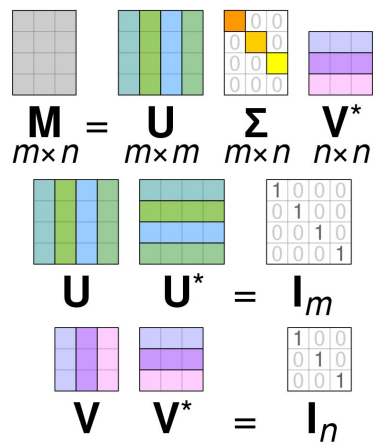
Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)

λ, για A^TA
σ², για A

$$A = U\Sigma V^T$$

$$\boxed{A^T A} = (V\Sigma^T U^T)U\Sigma V^T = V\Sigma^T (U^T U)\Sigma V^T = V(\Sigma^T \Sigma)V^T$$

$$\overline{AA^T} = U\Sigma V^T (V\Sigma^T U^T) = U\Sigma (V^T V)\Sigma^T U^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T$$





Βήμα προς βήμα με rython

Deep Learning Book Series - 2.8 Singular Value Decomposition

A : πίνακας που μπορούμε να τον “δούμε” ως γραμμικό μετασχηματισμό που μπορεί να αναλυθεί σε 3 υπό- μετασχηματισμούς (αντιστοιχούν σε 3 πίνακες) :

1. Περιστροφή,
2. Έκταση,
3. Περιστροφή.

Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



www.github.com/luisguiserrano/singular-value-decomposition

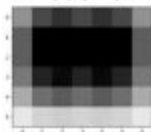
0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0. ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[4.74 0.  0.  0.  0.  0.  0. ]
 [0.  1.41 0.  0.  0.  0.  0. ]
 [0.  0.  1.41 0.  0.  0.  0. ]
 [0.  0.  0.  0.73 0.  0.  0. ]
 [0.  0.  0.  0.  0.  0.  0. ]
 [0.  0.  0.  0.  0.  0.  0. ]
```

```
[[-0.23 -0.4 -0.46 -0.4 -0.46 -0.4 -0.23]
 [ 0.5  0.25 -0.25 -0.5 -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.  -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.  0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.  -0.69  0.11  0.12]]
```

4.74



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

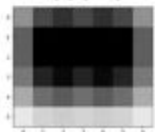
0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 0.  -0.73 -0.05 0.56 0.13]
 [-0.54 0.35 0.27 -0.08 -0.16 0.69]
 [-0.54 0.35 0.27 -0.08 0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27 0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71 0.18 -0.62 -0.  -0. ]
 [-0.08 -0.35 0.46 0.57 0.56 0.13]]
```

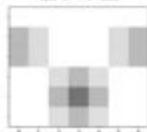
```
[[4.74 0.  0.  0.  0.  0. ]
 [0.  1.41 0.  0.  0.  0. ]
 [0.  0.  1.41 0.  0.  0. ]
 [0.  0.  0.  0.73 0.  0. ]
 [0.  0.  0.  0.  0.  0. ]
 [0.  0.  0.  0.  0.  0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5  0.25 -0.25 -0.5  -0.25 0.25 0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19 0.65 -0.19 -0.32 0.39]
 [-0.22 0.42 -0.44 0.42 -0.44 0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43 0.03 0.  -0.03 0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16 0.  0.16 0.55 0.42]
 [-0.12 -0.11 0.69 -0.  -0.69 0.11 0.12]]
```

4.74



1.41



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

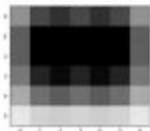
0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0. ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

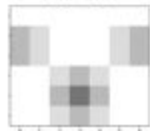
```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.  1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.  1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.  0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4 -0.46 -0.4 -0.46 -0.4 -0.23]
 [ 0.5  0.25 -0.25 -0.5 -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.  -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.  0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.  -0.69  0.11  0.12]]
```

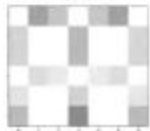
4.74



1.41



1.41



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



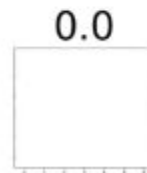
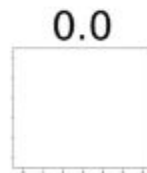
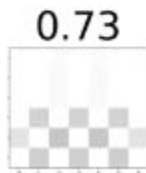
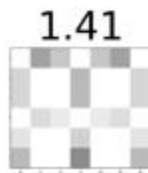
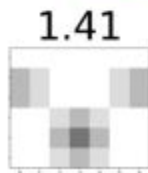
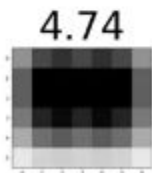
www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0. -0.73 -0.05 0.56 0.13]
 [-0.54 0.35 0.27 -0.08 -0.16 0.69]
 [-0.54 0.35 0.27 -0.08 0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27 0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71 0.18 -0.62 -0. -0.]
 [-0.08 -0.35 0.46 0.57 0.56 0.13]]
```

```
[[4.74 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 1.41 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 1.41 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0.73 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0.]]
```

```
[[-0.23 -0.4 -0.46 -0.4 -0.46 -0.4 -0.23]
 [ 0.5 0.25 -0.25 -0.5 -0.25 0.25 0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19 0.65 -0.19 -0.32 0.39]
 [-0.22 0.42 -0.44 0.42 -0.44 0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43 0.03 0. -0.03 0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16 0. 0.16 0.55 0.42]
 [-0.12 -0.11 0.69 -0. -0.69 0.11 0.12]]
```



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



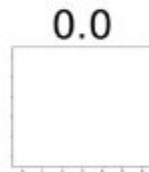
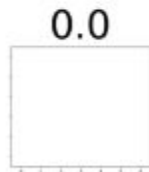
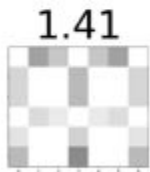
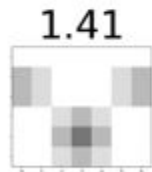
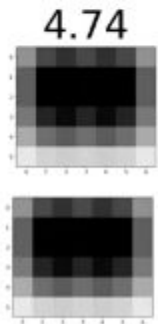
www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36  -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0. ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74  0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41  0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41  0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73  0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5  0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.   0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



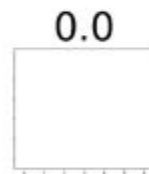
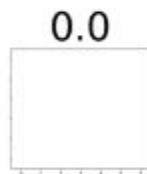
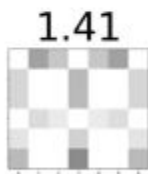
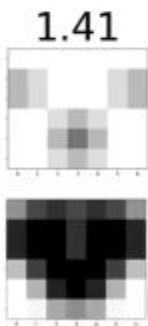
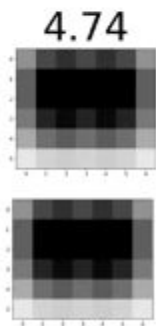
www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36  -0.    -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.    -0. ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.    0.    0.    0.    0. ]
 [0.  1.41 0.    0.    0.    0. ]
 [0.    0.  1.41 0.    0.    0. ]
 [0.    0.    0.  0.73 0.    0. ]
 [0.    0.    0.    0.    0.    0. ]
 [0.    0.    0.    0.    0.    0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5  0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.   0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



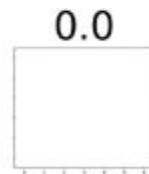
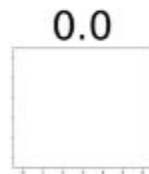
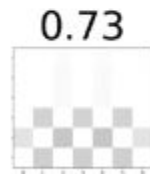
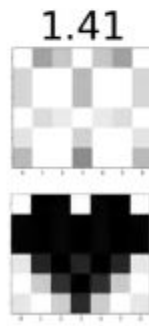
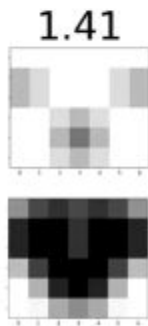
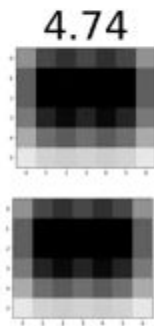
www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.    -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.    -0.   ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.    0.    0.    0.    0.   ]
 [0.  1.41 0.    0.    0.    0.   ]
 [0.    0.  1.41 0.    0.    0.   ]
 [0.    0.    0.  0.73 0.    0.   ]
 [0.    0.    0.    0.    0.    0.   ]
 [0.    0.    0.    0.    0.    0.   ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5  0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.   0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



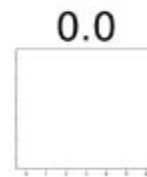
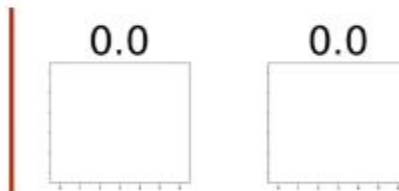
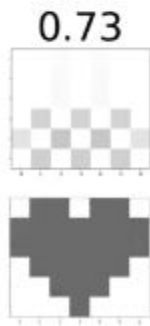
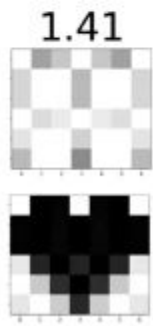
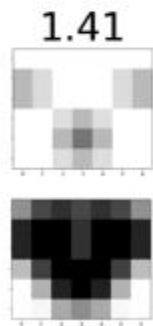
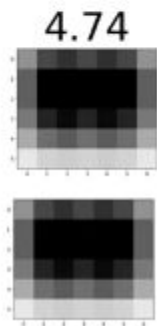
www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

```
[[-0.36 -0.   -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.   -0. ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   1.41 0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   1.41 0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.   0.   0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4 -0.46 -0.4 -0.46 -0.4 -0.23]
 [ 0.5  0.25 -0.25 -0.5 -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.   0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```



Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές (Singular Value Decomposition)



www.github.com/luisguiserrano/singular_value_decomposition

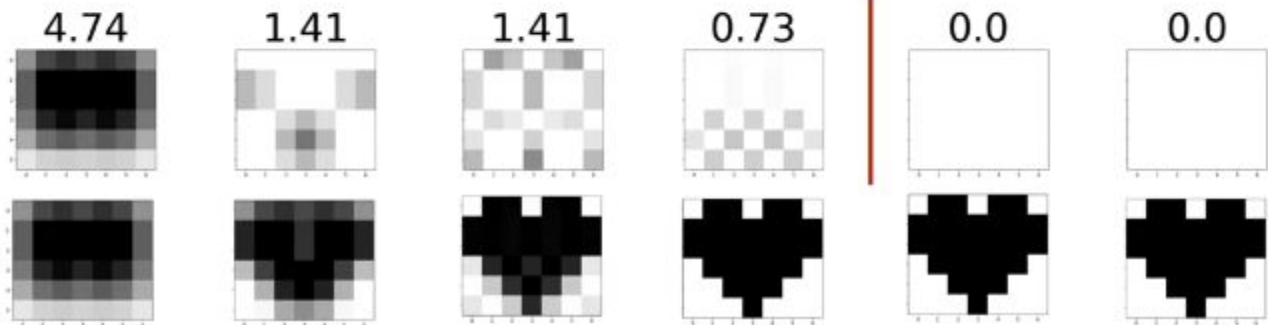
0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

Rank 4

```
[[-0.36 -0.    -0.73 -0.05  0.56  0.13]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08 -0.16  0.69]
 [-0.54  0.35  0.27 -0.08  0.16 -0.69]
 [-0.45 -0.35 -0.27  0.52 -0.56 -0.13]
 [-0.28 -0.71  0.18 -0.62 -0.    -0. ]
 [-0.08 -0.35  0.46  0.57  0.56  0.13]]
```

```
[[4.74 0.    0.    0.    0.    0.    0. ]
 [0.   1.41 0.    0.    0.    0.    0. ]
 [0.   0.   1.41 0.    0.    0.    0. ]
 [0.   0.   0.   0.73 0.    0.    0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.    0.    0. ]
 [0.   0.   0.   0.   0.    0.    0. ]]
```

```
[[-0.23 -0.4  -0.46 -0.4  -0.46 -0.4  -0.23]
 [ 0.5  0.25 -0.25 -0.5  -0.25  0.25  0.5 ]
 [ 0.39 -0.32 -0.19  0.65 -0.19 -0.32  0.39]
 [-0.22  0.42 -0.44  0.42 -0.44  0.42 -0.22]
 [ 0.56 -0.43  0.03  0.   -0.03  0.43 -0.56]
 [-0.42 -0.55 -0.16  0.   0.16  0.55  0.42]
 [-0.12 -0.11  0.69 -0.   -0.69  0.11  0.12]]
```





Moore-Penrose Pseudoinverse

Η αντιστροφή πίνακα δεν μπορεί να ορισθεί για μη τετραγωνικούς πίνακες.

Λύση: ψευδοαντίστροφος Moore-Penrose

U,D,V: SVD του A

$$A_+ = VD^+U$$

D⁺: Ο ψευδο-αντίστροφος ενός διαγώνιου πίνακα D

→ λαμβάνει το αντίστροφο των μη μηδενικών στοιχείων του, και έπειτα παίρνει τον ανάστροφο αυτού.

A_{m×n} - n>m : Μία ή περισσότερες πιθανές λύσεις με χρήση του A₊

(x=A₊y με την μικρότερη ||x||² ανάμεσα σε όλες τις πιθανές λύσεις)

m>n : Μπορεί να μην υπάρχει λύση

Ο A₊ δίνει τα x για τα οποία το Ax→ y σύμφωνα με τη νόρμα ||Ax - y||²

Βιβλιογραφία

Strang Gilbert

- Linear Algebra and Learning from Data (math.mit.edu/learningfromdata)
- Introduction to Linear Algebra - Fifth Edition
- [MIT 18.065 Matrix Methods in Data Analysis, Signal Processing, and Machine Learning](#)

Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong

- [Mathematics for Machine Learning - Book](#)
- [Mathematics for Machine Learning -github](#)

Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville

- Deep Learning, [Chapter 2: Linear Algebra](#)

[2.3. Linear Algebra — Dive into Deep Learning 0.16.1 documentation](#)