Κεφάλαιο 1:

Κυρτά Σύνολα, Νόρμες, Βασικοί Ορισμοί, Θεωρήματα Ύπαρξης Ακρότατων

- Ένα υποσύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται κυρτό αν $(1-a)x + ay \in S, \quad \forall x, y \in S, \quad a \in [0,1]$

- Η συνάρτηση $f : S \subset R^n \to \mathbb{R}$, με S κυρτό, λέγεται κυρτή αν $\forall x, y \in S, \quad a \in [0,1]$,
$f((1-a)x + ay) \leq (1-a)f(x) + af(y)$.

- Η συνάρτηση, $f : S \subset R^n \to \mathbb{R}$ με S κυρτό, λέγεται αυστηρά κυρτή αν $\forall x, y \in S, x \neq y, a \in (0,1)$,
$f((1-a)x + ay) < (1-a)f(x) + af(y)$.

- Υπενθύμιση: Ο ορισμός της κυρτής συνάρτησης δεν απαιτεί την ύπαρξη παραγωγού της συνάρτησης.

- Η ρόλος της “κυρτότητας” σε προβλήματα βελτιστοποίησης είναι εξαιρετικά σημαντικός.

- Ορισμός Νόρμας $\|.\|$ στον $\mathbb{R}^n$: Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^n$ και πεδίο τιμών $\mathbb{R}_+$ λέγεται νόρμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:
  1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
  2. $\|x\| = 0,$ αν και μόνο αν $x = 0.$
  3. $\|ax\| = |a|\|x\|, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$
  4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

- Ορισμός Φυσικής Νόρμας Πίνακας: Έστω διανυσματική νόρμα $\|.\|$ του $\mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε η συνάρτηση $|||\,.\,||| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ που ορίζεται από τον τύπο $|||A||| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ είναι νόρμα, και λέγεται φυσική νόρμα πίνακα που επάγεται από την διανυσματική νόρμα $\|.\|$.

- Παραδείγματα Νορμών:

1. $$\|x\|_\infty = \max_{i=1,..,n} |x_i|$$

2. $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

3. $$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

-

4. $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

- Επισημαίνεται πως η νόρμα $\|.\|_2$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο.

- Υπενθυμίζουμε πως το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως $x^T y := (x, y)_2 := (x, y) := \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

- Επομένως $\|x\|^2 = x^T x$

- Ανισότητα Cauchy-Schwarz: $|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

- Έστω ||.|| νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένο αν υπάρχει σταθερά $M > 0$, ώστε $\|x\| \leq M$, για κάθε $x \in S$.

- Όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c > 0, C > 0$ ώστε
$c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

- Προσοχή: Η παραπάνω ιδιότητα ισοδυναμίας ΔΕΝ ισχύει σε χώρους άπειρης διάστασης.

- Ένα πρακτικό αποτέλεσμα που οφείλεται στην ισοδυναμία νορμών στον $\mathbb{R}^n$, είναι πως αν μία ακολουθία συγκλίνει ως προς μία νόρμα ||.|| τότε συγκλίνει ως προς κάθε άλλη νόρμα.

- Επισημαίνεται όμως πως οι σταθερές c,C εξαρτώνται από την διάσταση. Π.χ., $x \in \mathbb{R}^n$,

1. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{1/2}\|x\|_\infty$
2. $n^{-1/2}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$
3. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

- Επομένως σε προβλήματα μεγάλων διαστάσεων και ιδιαίτερα στην αριθμητική ανάλυση η επιλογή κατάλληλης νόρμας είναι καθοριστικής σημασίας.

- Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται ανοικτό αν $\forall x \in S$ υπάρχει δ>0, ώστε $B(x,\delta) \subset S$.

- Υπενθυμίζουμε ότι συμβολίζουμε την ανοικτή σφαίρα με κέντρο το x και ακτίνα δ>0, το σύνολο: $B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$

- Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμα του είναι ανοικτό.

- Υπενθύμιση: $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας στοιχείων του S.

- Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται συμπαγές αν κάθε ακολουθία στοιχείων του S περιέχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του S.

- Υπενθύμιση: Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

- Προσοχή: Στους χώρους άπειρης διάστασης δεν ισχύει η παραπάνω ισοδυναμία

- Ορισμός (Ολικού) Ελαχίστου: Έστω $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Το $\bar{x}$ λέγεται σημείο (ολικού) ελαχίστου της f στο S αν $f(\bar{x}) \leq f(x)$ για κάθε $x \in S$.

- Ορισμός Τοπικού Ελαχίστου: Το $\bar{x}$ λέγεται σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ωστε για κάθε $x \in B(\bar{x}, \delta) \cap S$ να ισχύει $f(\bar{x}) \leq f(x)$.

- Ορισμός (Ολικού) Μεγίστου: Έστω $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Το $\bar{x}$ λέγεται σημείο (ολικού) μεγίστου της f στο S αν $f(\bar{x}) \geq f(x)$ για κάθε $x \in S$.

- Ορισμός Τοπικού Μεγίστου: Το $\bar{x}$ λέγεται σημείο τοπικού μεγίστου της f στο S αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ωστε για κάθε $x \in B(\bar{x}, \delta) \cap S$ να ισχύει $f(\bar{x}) \geq f(x)$.

- Σημείωση: Το $\bar{x}$ είναι σημείο (ολικού) μεγίστου της f αν και μόνο αν είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της $-f$. Επομένως θα μελετήσουμε το πρόβλημα εύρεσης ελαχίστου (ολικού και τοπικού).

- **<u>Θεώρημα 1</u>**: Έστω $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $S \subset \mathbb{R}^n$, μη κενό, συμπαγές σύνολο. Τότε η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο ελαχίστου στο S.

- Ορισμός Πιεστικής Συνάρτησης: Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ μη κενό, <u>*μη-φραγμένο*</u> σύνολο. Η f λέγεται πιεστική (στο $S \subset \mathbb{R}^n$) αν
$$\lim_{\|x\| \to \infty, x \in S} f(x) = +\infty$$

- **<u>Θεώρημα 2</u>**: Έστω $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής και πιεστική συνάρτηση (στο $S \subset \mathbb{R}^n$) όπου $S \subset \mathbb{R}^n$, μη κενό, μη φραγμένο και κλειστό σύνολο. Τότε η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο ελαχίστου στο S.

- Σημείωση: Ανάλογα με το αν δουλεύουμε σε φραγμένο ή μη φραγμένο σύνολο, επιλέγουμε το Θεώρημα 1 ή 2.

- *Απόδειξη θεωρήματος 2*: (Υπόδειξη) Έστω $x_0 \in S$. Επειδή η f είναι πιεστική, υπάρχει r>0, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in S, \|x\| > r$ να ισχύει $f(x) > f(x_0)$. Επομένως αρκεί να δουλέψουμε στο σύνολο $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \cap S$. Το σύνολο Q είναι μη-κενό, κλειστό, και φραγμένο, επομένως είναι συμπαγές. Άρα επειδή η f είναι συνεχής από το Θεώρημα 1, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ελαχίστου στο Q, έστω το x_1. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ελάχιστου είτε το x_0 είτε το x_1, και $f(x) \geq \min\{f(x_0), f(x_1)\}$ για κάθε $x \in S$.

- Η επιλογή της νόρμας δεν παίζει ρόλο στον ορισμό της πιεστικής συνάρτησης αλλά ούτε και στην απόδειξη καθώς δουλεύουμε σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, όπου οι νόρμες είναι ισοδύναμες.

- **<u>Θεώρημα 3</u>**:Έστω $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, με S κυρτό. Τότε το $\bar{x} \in S$ είναι σημείο ελαχίστου της f στο S αν και μόνο αν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S.

- *<u>Απόδειξη</u>*: Αρκεί να δείξουμε ότι αν το $\bar{x} \in S$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S τότε είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της f στο S. Επειδή το S είναι κυρτό, έχουμε ότι για $x \in S$, και $a \in (0,1]$, το στοιχείο, $(1-a)\bar{x} + ax = \bar{x} + a(x - \bar{x}) \in S$. Τότε λόγω της κυρτότητας της f, έχουμε,

$$
\begin{aligned}
f(\bar{x} + a(x - \bar{x})) &= f((1-a)\bar{x} + ax) \\
&\le (1-a)f(\bar{x}) + af(x) \\
&\le f(\bar{x}) + a\left(f(x) - f(\bar{x})\right)
\end{aligned}
$$

- (*<u>συνέχεια απόδειξης)</u>* ή ισοδύναμα: $f(x) - f(\bar{x}) \geq \dfrac{f(\bar{x} + a(x - \bar{x})) - f(\bar{x})}{a}$ για $x \in S$, $a \in (0,1]$. Επειδή το $\bar{x} \in S$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $\forall y \in S, \|y - \bar{x}\| < \delta,$ να ισχύει $f(\bar{x}) \leq f(y)$. Παρατηρούμε ότι για $a \in (0,1]$ αρκετά μικρό το στοιχείο $y := \bar{x} + a(x - \bar{x})$ ικανοποιεί την σχέση $\|\bar{x} + a(x - \bar{x}) - \bar{x}\| = a\|x - \bar{x}\| < \delta$, επομένως ισχύει $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + a(x - \bar{x}))$, που σημαίνει ότι $f(x) - f(\bar{x}) \geq \dfrac{f(\bar{x} + a(x - \bar{x})) - f(\bar{x})}{a} \geq 0$ δηλαδή, $f(x) \geq f(\bar{x})$, για $x \in S$.
  Επομένως το $\bar{x}$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου.

- **<u>Θεώρημα 4</u>**: Έστω Έστω $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αυστηρά κυρτή συνάρτηση, με S κυρτό. Τότε η f έχει το πολύ ένα σημείο ελαχίστου.

- *<u>Απόδειξη (Υπόδειξη)</u>*: Έστω ότι υπάρχουν δύο σημεία ελαχίστου $x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$. Θεωρούμε το $\dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)\ldots$

- Βιβλιογραφία:

- Αλ. Μπακόπουλος και Ιων. Χρυσοβέργης, “Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση”, Εκδόσεις Συμμετρία.

- Γ. Ακριβής και Β. Δουγαλής, “Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

- J. Nocedal and S. Wright, “Numerical Optimization”, Springer-Verlag 2006.

- E. Polak, “Optimization”, Springer-Verlag 1997.