# Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

**Εαρινό Εξάμηνο 2021-2022**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

# 1η Εργασία

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

**Προθεσμία παράδοσης: Σάββατο 30 Απριλίου.**

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να αποδειχθούν κάποια αποτελέσματα σχετικά με τις κλάσεις τοπολογικών ισομορφισμών Πολωνικών χώρων. Συγκεκριμένα πρέπει να αποδείχθούν τα Θεωρήματα 2 και 5 καθώς και το Πόρισμα 4.

Πιο κάτω δίνονται τα βήματα που θα ακολουθηθούν και υποδείξεις.

**Ορισμός 1.** Ο **κύβος του Hilbert** είναι το σύνολο $\mathbb{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει ο $\mathbb{H}$ είναι μετρικοποιήσιμος, διαχωρίσιμος και συμπαγής - επομένως και πλήρης ως προς οποιαδήποτε μετρική η οποία παράγει την τοπολογία του. Επομένως είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος.

Μια βάση για την τοπολογία του αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής

$$((a_0,b_0)\cap[0,1])\times((a_0,b_0)\cap[0,1])\times\cdots\times((a_n,b_n)\cap[0,1])\times[0,1]\times[0,1]\times\ldots$$

όπου $a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Η σύγκλιση στον $\mathbb{H}$ είναι η κατά σημείο σύγκλιση:¨ για κάθε ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{H}$ και κάθε $f \in \mathbb{H}$ έχουμε $f_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} f$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_i(n) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(n)$ στο $[0,1]$.

**Θεώρημα 2.** *Κάθε Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα υποσύνολο του κύβου του Hilbert. Επομένως οι Πολωνικοί χώροι είναι μέχρι τοπολογικού ισομορφισμού τα $G_\delta$ υποσύνολα του κύβου του Hilbert.*

**Ορισμός 3.** Δίνονται δύο τοπολογικοί χώροι $X$ και $Y$ με τον $Y$ συμπαγή. Ο $Y$ ονομάζεται **συμπαγοποίηση** του $X$ αν υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : X \rightarrowtail Y$ με $f^{-1} : f[X] \to Y$ επίσης συνεχής και $\overline{f[X]} = Y$. Δηλαδή ο $X$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με έναν πυκνό υπόχωρο του $Y$.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να συμπαγοποιήσει κανείς έναν τοπολογικό χώρο, μας ενδιαφέρει όμως η συμπαγοποίηση να σέβεται κάποιες καλές δομικές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα την ιδιότητα του να είναι ο δοσμένος τοπολογικός χώρος Πολωνικός. Μια τέτοια συμπαγοποίηση δίνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2.

**Πόρισμα 4.** *Κάθε Πολωνικός χώρος έχει μια συμπαγοποίηση που είναι επίσης Πολωνικός χώρος.*

Ένας Πολωνικός χώρος δεν είναι απαραίτητα τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του κύβου του Hilbert γιατί αλλιώς κάθε Πολωνικός χώρος θα ήταν συμπαγής. Θα δούμε όμως ότι αυτό είναι σωστό αν αντικαταστήσουμε τον $\mathbb{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$ με τον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ως συνήθως θεωρούμε το τελευταίο σύνολο με την τοπολογία γινόμενο.

**Θεώρημα 5.** *Κάθε Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

## Τα βήματα που θα ακολουθήσετε - Υποδείξεις

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2 θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια κατάλληλη μετρική $d \le 1$ στον $\mathcal{X}$, γιατί μπορούμε να το κάνουμε αυτό; Παίρνουμε επίσης ένα $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ που είναι πυκνό στον $\mathcal{X}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{H} : f(x) = (d(x, x_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Δείξτε ότι η $f$ είναι $1-1$ και συνεχής. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Αρχή της Μεταφοράς και τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης ακολουθιών στον $\mathbb{H}$ που αναφέραμε πιο πάνω. Έπειτα δείξτε ότι η συνάρτηση $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ είναι συνεχής. Τέλος εξηγείστε το συμπέρασμα σχετικά με τα $G_\delta$ υποσύνολα του $\mathbb{H}$.

Για το Πόρισμα 4 θεωρήστε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και αναζητήστε τη ζητούμενη συμπαγοποίηση του $\mathcal{X}$ μέσα στον $\mathbb{H}$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5 αρκεί από το Θεώρημα 2 να αποδείξουμε ότι τα $G_\delta$ υποσύνολα του $\mathbb{H}$ είναι τοπολογικά ισομορφικά με κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Θεωρούμε λοιπόν $G \subseteq \mathbb{H}$ που είναι $G_\delta$ και γράφουμε $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ όπου κάθε $U_n \subseteq \mathbb{H}$ είναι ανοικτό. Παίρνουμε μια κατάλληλη μετρική $d$ στον $\mathbb{H}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_{2n} : G \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f_{2n}((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = x_n$$
$$f_{2n+1} : G \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f_{2n+1}(x) = (d(x, F_n))^{-1} \quad \text{όπου } F_n = \mathbb{H} \setminus U_n.$$

Επιπλέον παίρνουμε τη συνάρτηση

$$f : G \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x \mapsto (f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}.$$

Δείξτε ότι η $f$ είναι $1-1$ και συνεχής. Ως συνήθως μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Αρχή της Μεταφοράς και τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης στην τοπολογία γινόμενο ως την κατά σημείο σύγκλιση. Ακόμα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι η συνάρτηση της απόστασης σημείου από σύνολο είναι συνεχής.

Έπειτα δείξτε ότι το σύνολο $f[G]$ είναι κλειστό και ότι η $f^{-1} : f[G] \to G$ είναι συνεχής. Γι' αυτό παρατηρούμε ότι αν έχουμε $f(x^i) \xrightarrow{i\to\infty} y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $y = (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ έχουμε ειδικότερα ότι $f_{2n}(x^i) \xrightarrow{i\to\infty} y_{2n}$ και άρα $x^i_n \xrightarrow{i\to\infty} y_{2n}$, όπου $x^i = (x^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Οπότε παίρνουμε $x_n = y_{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.