ΠΡΟΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ
5/5/2022

Θέμα 1. ***(2,5 μον)*** *Επιλέξτε το σωστό συμπέρασμα στις παρακάτω προτάσεις:*

(1) ***(0,5 μον)*** *Έστω* (a_n) *ακολουθία θετικών αριθμών με* $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. *Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$
(α) συγκλίνει (β) αποκλίνει (γ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν συγκλίνει ή όχι.

(2) ***(0,5 μον)*** *Έστω* (a_n) *ακολουθία θετικών αριθμών με* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(α) συγκλίνει (β) αποκλίνει (γ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν συγκλίνει ή όχι.*

(3) ***(0,5 μον)*** *Έστω* s *το άθροισμα της σειράς* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!2^n}$. *Τότε (α)* $s = \sqrt{e}$, *(β)* $s = +\infty$, *(γ)* $s = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

(4) ***(0,5 μον)*** *Έστω* (a_n) *φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Αν* R *η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *τότε (α)* $R \geq 1$, *(β)* $R < 1$ *(γ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν ισχύει το (α) ή το (β).*

(5) ***(0,5 μον)*** *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)\, dx$ *(α) αποκλίνει στο* $+\infty$,
(β) συγκλίνει, (γ) δεν υπάρχει.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1) Το σωστό συμπέρασμα είναι το (α) δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ συγκλίνει, αφού από το κριτήριο Ρίζας του Cauchy: $\lim \sqrt[n]{a_n^n} = \lim a_n = 1/2 < 1$.

(2) Το σωστό συμπέρασμα είναι το (γ) δηλαδή δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή όχι. Πράγματι, οι υποθέσεις για την (a_n) είναι μόνο ότι αποτελεί μια φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Πχ. αν $a_n = 1/n$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει ενώ αν $a_n = 1/n^2$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

(3) Το σωστό συμπέρασμα είναι το (α) δηλαδή $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!2^n} = \sqrt{e}$. Αυτό προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ για $x = 1/2$.

(4) Το σωστό συμπέρασμα είναι το (α) δηλαδή $R \geq 1$. Πράγματι, αν ήταν $R < 1$ τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ δεν θα συνέκλινε για $x = -1$. Όμως για $x = -1$ δίνει την εναλλ·ασσουσα σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, που επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, από το Κριτήριο Leibniz συγκλίνει.

(5) Το σωστό συμπέρασμα είναι το (β) δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)\, dx$ συγκλίνει. Πράγματι, η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)$ είναι συνεχής και φραγμένη και άρα, από γνωστό θεώρημα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)\, dx$ συγκλίνει.

Θέμα 2. ***(3 μον)*** *(α)* ***(1,5 μον)*** *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

(β) ***(1,5 μον)*** *Ομοίως για την σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

Απόδειξη. (α) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Λόγου βλέπουμε ότι η σειρά αποκλίνει. Πράγματι, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$ και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1$$

(β) Χρησιμοποιώντας το Οριακό κριτήριο σύγκρισης με την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ βλέπουμε ότι η σειρά συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 1$$

□

Θέμα 3. *(**3,5 μον**) Δίνεται η δυναμοσειρά* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n$.

*(α) (**0,5 μον**) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης* R.

*(β) (**1 μον**) Βρείτε το ακριβές διάστημα σύγκλισης.*

*(γ) (**0,5 μον**) Υπολογίστε τον τύπο της* $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ *για κάθε* $x\in(-R,R)$.

*(δ) (**0,5 μον**) Υπολογίστε τον τύπο της* $f(x)$, $x\in(-R,R)$.

*(ε) (**1 μον**) Υπολογίστε το άθροισμα* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$.

Απόδειξη. (α) Έχουμε $a_n=\frac{n+1}{2^n}$ και άρα $\rho=\lim\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$ ($\lim\sqrt[n]{n+1}=1$ αφού $n\le n+1\le 2n\Rightarrow \sqrt[n]{n}\le\sqrt[n]{n+1}\le\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}$), οπότε $R=2$.

(β) Για $|x|>2$ η δυναμοσειρά αποκλίνει και για $|x|<2$ συγκλίνει. Μένει να εξετάσουμε τι γίνεται στα σημεία $x=-2$ και $x=2$. Για $x=-2$ παίρνουμε την σειρά $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ που αποκλίνει αφού το $\lim(-1)^n(n+1)$ δεν υπάρχει (η υπακολουθία των περιτών όρων τείνει στο $-\infty$ ενώ των αρτίων στο $+\infty$). Ομοίως για $x=2$ παίρνουμε την σειρά $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}2^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)=1+2+3+\cdots=+\infty$. Άρα το ακριβές διάστημα σύγκλισης είναι το $(-2,2)$.

(γ) Έχουμε $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}\int_0^x t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=x\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2x}{2-x}$.

(δ) Από το Θεμ. Θεώρ. του Ολοκλ. Λογ. έχουμε $f(x)=F'(x)=\frac{2(2-x)-2x(-1)}{(2-x)^2}=\frac{4}{(2-x)^2}$.

(ε) Από τον τύπο $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n$ για $x=-1$, έχουμε

$$\begin{aligned}f(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(-1)^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)(-1)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}(-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\\&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}\right)+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}\right)+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, από το (δ) έχουμε

$$f(-1)=\frac{4}{9}$$

και άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=-\frac{2}{9}.$$

$\square$

Θέμα 4. *(3 μον)*

*(α) **(1 μον)** Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$ *συγκλίνει.*

*(β) **(1 μον)** Εξετάστε αν υπάρχει το όριο* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

*(γ) **(1 μον)** Υπολογίστε το όριο* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^8}{x^4+y^{12}}$.

Απόδειξη. (α) Έστω $c \in (0,1)$. Έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \int_0^c \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx + \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx.$ Επειδή τα ολοκληρώματα $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ και $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$ συγκλίνουν (αφού $0 < c < 1$) και επειδή

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1$$

και

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}}{\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

τα ολοκληρώματα $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$ και $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$ συγκλίνουν. Άρα το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$ συγκλίνει.

(β) Το όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, αν $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0)$ και $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0$. Αλλά αν $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ και $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

(γ) Από την ανισότητα $a^2 + b^2 \geq 2ab$ έχουμε

$$0 \leq \frac{x^2y^8}{x^4+y^{12}} = \frac{x^2y^6}{x^4+y^{12}} \cdot y^2 \leq \frac{1}{2} \cdot y^2$$

και άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^8}{x^4+y^{12}} = 0.$ □

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΕΙΝΑΙ 12. ΓΙΑ ΝΑ ΠΑΡΕΤΕ ΑΡΙΣΤΑ ΑΡΚΟΥΝ 10 ΜΟΝ.