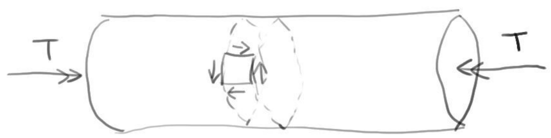
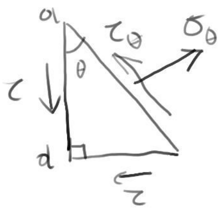
Τάσεις και παραμορφώσεις στην καθαρή διάτμηση



Μεγέθυνση στοιχείου

Τάσεις σε στραμμένο στοιχείο κατά γωνία θ. Θεωρώ λοιπόν την ισορροπία δυνάμεων στο παρακάτω πρίσμα (τριγωνικό).



σ_θ: ορθή τάση στην κεκλιμένη έδρα του πρίσματος

τ_θ: διατμητική τάση στην πλάγια έδρα του πρίσματος

Εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων στο πρίσμα

Έστω A_0 το εμβαδόν της έδρας ab.

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\quad \nearrow^{\sigma_\theta} \Sigma F = 0 \Rightarrow \sigma_\theta A_0 \sec\theta = \tau A_0 \sin\theta + \tau A_0 \tan\theta \cos\theta$

$\Rightarrow \sigma_\theta = 2\tau \sin\theta \cos\theta \quad (1)$

Όμοια από εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων κατά τη διεύθυνση της τ_θ

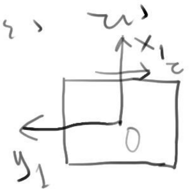
$\nwarrow^{\tau_\theta} \Sigma F = 0 \Rightarrow \tau_\theta A_0 \sec\theta = \tau A_0 \cos\theta - \tau A_0 \tan\theta \sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_\theta = \tau(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (2)$

Οι (1), (2) γράφονται και ως

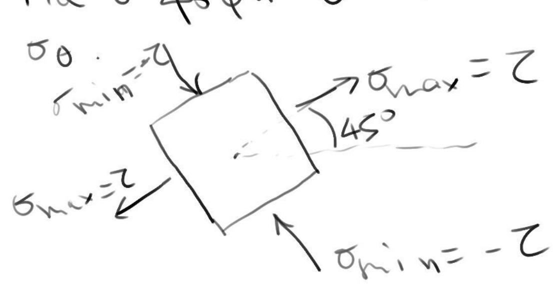
$\sigma_\theta = \tau \sin 2\theta, \quad \tau_\theta = \tau \cos 2\theta \quad (3)$

Οι (3) δίνουν την ορθή και διατμητική τάση σε όλες τις έδρες του ορθογώνιου στραμμένου στοιχείου.



Στο σύστημα Ox_1y_1, στραμμένο κατά $\theta = 90°$ σε σχέση με το Oxy, η τ_θ στην πάνω οριζόντια έδρα του στοιχείου είναι $\tau_\theta = -\tau$. Στο σύστημα Oxy (το αρχικό) για $\theta = 0$, στην πάνω οριζόντια έδρα του στοιχείου έχω από την (3) $\tau_\theta = \tau$.

Για στροφή $\theta = 45°$ έχω τις ακρότατες ορθές τάσεις



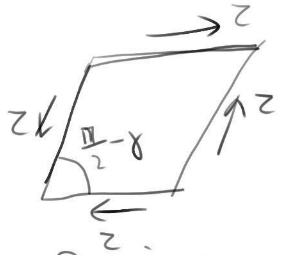
$\tau_\theta = 0$ στο στοιχείο το στραμμένο κατά 45°.

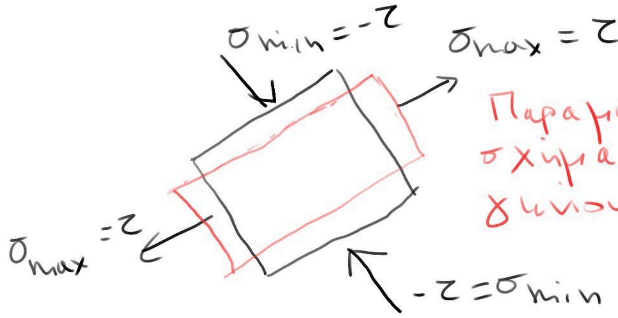
~~Καθαρός διαξονικός~~ Καθαρή διαξονική ορθή καταπόνηση (χωρίς διάτμηση) με ίσες απόλυτες τιμές, εφελκυστικής και θλίψης στις έδρες του στοιχείου.

Η σmax στη στρέψη είναι ίδιου μεγέθους με την διατμητική τάση στην εγκάρσια διατομή.

Παραμορφώσεις λόγω της καθαρής διάτμησης (για $\theta=0$) στη στρέψη

$\theta=0$ | $\theta=45^\circ$





Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στοιχείο γίνεται πλάγιο παραλληλόγραμμο. Τα μήκη των ακμών δεν αλλάζουν.

γ: διατμητική παραμόρφωση

Το στοιχείο παραμένει ορθογώνιο. Αλλάζουν τα μήκη των ακμών λόγω των σ_{max} και σ_{min}

Και οι δύο παραπάνω απεικονίσεις των παραμορφώσεων του στοιχείου (για $\theta=0$ και $\theta=45^\circ$), αναφέρονται στην ίδια παραμορφωσιακή κατάσταση, που αναλύεται («μετριέται») σε δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς.

Η συνολική ορθή παραμόρφωση (στη $\theta=45^\circ$) κατά τη διεύθυνση της σ_{max} είναι

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} + \frac{|\sigma_{min}|}{E}\nu = \frac{\tau}{E} + \nu\frac{\tau}{E}$$

E: μέτρο ελαστικότητας

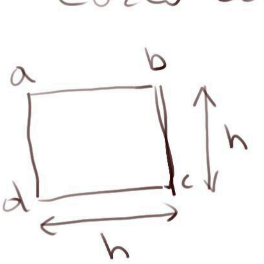
ν: λόγος Poisson

Εύρεση σχέσης μεταξύ των E και G

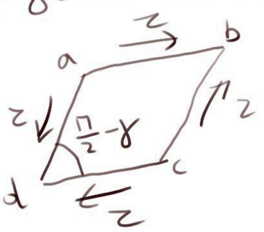
G: μέτρο διάτμησης

Νόμος Hooke για διάτμηση: $\tau = G\gamma$

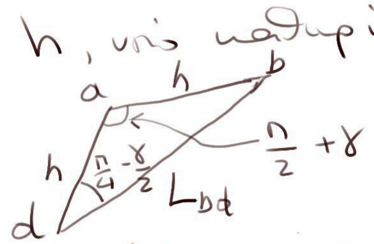
Έστω τετράγωνο πλευράς h, υπό καθαρή διάτμηση για $\theta=0$



Απαραμόρφωτη κατάσταση



Παραμορφωμένη κατάσταση λόγω καθαρής διάτμησης για $\theta=0$.



Δύο σχέσεις για το μήκος L_{bd} της διαγωνίου bd στην παραμορφωμένη κατάσταση

μήκος της διαγωνίου στην απαραμόρφωτη κατάσταση.

$$L_{bd} = h\sqrt{2}\,(1+\varepsilon_{max})$$

Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο abd: $L_{bd}^2 = h^2 + h^2 - 2h^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)$

Εξισώνω τα δεξιά μέλη των δύο εκφράσεων για το L_{bd} και παίρνω

$$(1+\varepsilon_{max})^2 = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) \Rightarrow 1+2\varepsilon_{max}+\varepsilon_{max}^2 = 1+\sin\gamma$$

Με προσέγγιση πρώτης τάξης στους όρους ~~του~~ με το ε_{max}, έχω αριστερά (επειδή $\varepsilon_{max}^2 \ll \varepsilon_{max}$ διότι ε_{max} ~~μ~~ μικρή παραμόρφωση)

$1+2\varepsilon_{max}$, και δεξιά έχω

$1+\gamma$, διότι για $\gamma \to 0$: $\gamma \simeq \sin\gamma$

$$1+2\varepsilon_{max} = 1+\gamma \Rightarrow \varepsilon_{max} = \frac{\gamma}{2} \quad (1)$$

Αλλά $\gamma = \frac{\tau}{G}$ (2) από νόμο Hooke. Είδαμε επίσης προηγουμένως ότι $\varepsilon_{max} = \frac{\tau}{E} + \nu\frac{\tau}{E}$ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

Εξισώνω τα δεξιά μέλη των