

# Δυναμικός Προγραμματισμός

---

**Δημήτρης Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Διακριτό Πρόβλημα Σακιδίου

- Δίνονται  $n$  αντικείμενα και **σακίδιο** μεγέθους  $B$ . Αντικείμενο  $i$  έχει **μέγεθος** και **αξία**:  $(s_i, p_i)$
- Ζητείται συλλογή **μέγιστης αξίας** που **χωράει** στο σακίδιο.

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^n f_i p_i \\ \text{υπό περιορισμούς} \sum_{i=1}^n f_i s_i \leq B \\ f_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in [n] \end{array} \quad f_i = \begin{cases} 1 & i \text{ εντός} \\ 0 & i \text{ εκτός} \end{cases}$$

- Αντικείμενα:  $\{ (1, 0.5), (2, 5), (2, 5), (3, 9), (4, 8) \}$   
Μέγεθος σακιδίου: **4**.
- Βέλτιστη λύση =  $\{ (2, 5), (2, 5) \}$
- Αντικείμενα:  $\{ (3, 5), (2, 7), (4, 4), (6, 8), (5, 4) \}$   
Μέγεθος σακιδίου: **10**.
- Βέλτιστη λύση =  $\{ (3, 5), (2, 7), (4, 4) \}$

# Αρχή Βελτιστότητας

---

- Αντικείμενα  $N = \{1, \dots, n\}$ , σακίδιο μεγέθους  $B$ .  
Βέλτιστη λύση  $A^* \subseteq \{1, \dots, n\}$ .
- Αγνοούμε αντικείμενο  $n$ :
  - $A^* \setminus \{n\}$  βέλτιστη λύση για  $N \setminus \{n\}$  με σακίδιο  $B - (f_n s_n)$ .
- Αγνοούμε αντικείμενα  $\{n, n - 1\}$ :
  - $A^* \setminus \{n, n - 1\}$  βέλτιστη λύση για  $N \setminus \{n, n - 1\}$  με σακίδιο  $B - (f_n s_n + f_{n-1} s_{n-1})$ .
- Αν γνωρίζουμε βέλτιστη αξία για αντικείμενα  $N \setminus \{n\}$  και σακίδια μεγέθους  $B$  και  $B - s_n$ 
  - ... αποφασίζουμε αν αντικείμενο  $n$  στη βέλτιστη λύση!

# Αναδρομική Εξίσωση

- $P(n-1, B)$  βέλτιστη αξία για  $N \setminus \{n\}$  σε σακίδιο  $B$   
 $P(n-1, B - s_n)$  βέλτιστη αξία για  $N \setminus \{n\}$  σε σακίδιο  $B - s_n$

$$P(n, B) = \max\{P(n-1, B), P(n-1, B - s_n) + p_n\}$$

- Βέλτιστη αξία με αντικείμενα  $\{1, \dots, i\}$  και σακίδιο μεγέθους  $b$ :  $P(i, b)$

$$P(i, b) = \begin{cases} 0 & \text{αν } b \leq 0 \text{ ή } i = 0 \\ P(i-1, b) & \text{αν } i \geq 1 \text{ και } b < s_i \\ \max\{P(i-1, b), P(i-1, b - s_i) + p_i\} & \text{για } i = 1, \dots, n \\ & \text{και } b = s_i, \dots, B \end{cases}$$

- (Αμιγώς) αναδρομική επίλυση της **δεν** είναι αποδοτική!!!

# Παράδειγμα: Διωνυμικοί Συντελεστές

□ Διωνυμικοί συντελεστές  $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$C(n, k) = \begin{cases} C(n-1, k-1) + C(n-1, k) & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

```
long Binom(int n, int k) {  
    if ((k == 0) || (k == n)) return(1);  
    return(Binom(n - 1, k - 1) + Binom(n - 1, k)); }  
}
```

■ Χρόνος εκτέλεσης δίνεται από την ίδια αναδρομή!

$$T(n, k) = \Theta(C(n, k)) = \Omega\left(\left(\frac{n}{k}\right)^k\right), \quad C(30, 15) = 155117520$$

■ Πρόβλημα οι επαναλαμβανόμενοι υπολογισμοί.

□ Όταν έχω επικαλυπτόμενα στιγμιότυπα, χρησιμοποιώ  
**δυναμικό προγραμματισμό.**

# Τρίγωνο του Pascal

$$C(n, k) = \begin{cases} C(n-1, k-1) + C(n-1, k) & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Όταν έχω επαναλαμβανόμενα στιγμιότυπα, αποθηκεύω τιμές σε πίνακα και τις χρησιμοποιώ χωρίς να τις υπολογίζω πάλι.
  - Θεαματική βελτίωση χρόνου εκτέλεσης!
  - Σημαντικές απαιτήσεις σε μνήμη.

0										1									
1										1	1								
2										1	2	1							
3										1	3	3	1						
4										1	4	6	4	1					
5										1	5	10	10	5	1				
6										1	6	15	20	15	6	1			
7										1	7	21	35	35	21	7	1		
8										1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9										1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

# Τρίγωνο του Pascal

---

$$C(n, k) = \begin{cases} C(n-1, k-1) + C(n-1, k) & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

**Binomial( $n, k$ )**

$C[0, 0] = C[1, 0] = C[1, 1] = 1;$

**for**  $i \leftarrow 2$  **to**  $n$  **do**

$C[i, 0] \leftarrow 1;$

**for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $\min\{i-1, k\}$  **do**

$C[i, j] \leftarrow C[i-1, j-1] + C[i-1, j];$

**if**  $i-1 < k$  **then**  $C[i, i] = 1;$

**return**( $C[n, k]$ );

- Χρόνος εκτέλεσης  $\Theta(nk)$  αντί για  $\Omega((n/k)^k)$ .
- Μνήμη  $\Theta(nk)$ . Μπορεί να μειωθεί σε  $\Theta(k)$ .

# Διακριτό Πρόβλημα Σακιδίου: Δυναμικός Προγραμματισμός

$$P(i, b) = \begin{cases} 0 & \text{αν } b \leq 0 \text{ ή } i = 0 \\ P(i - 1, b) & \text{αν } i \geq 1 \text{ και } b < s_i \\ \max\{P(i - 1, b), P(i - 1, b - s_i) + p_i\} & \text{για } i = 1, \dots, n \\ & \text{και } b = s_i, \dots, B \end{cases}$$

- Αντικείμενα:  $\{ (3, 5), (2, 7), (4, 4), (6, 8), (5, 4) \}$   
Μέγεθος σακιδίου: **10**.

$i \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5
2	0	0	7	7	7	12	12	12	12	12	12
3	0	0	7	7	7	12	12	12	12	16	16
4	0	0	7	7	7	12	12	12	15	16	16
5	0	0	7	7	7	12	12	12	15	16	16



# Υλοποίηση

Αναδρομική υλοποίηση;

```
Knapsack( $B, (s_1, p_1), \dots, (s_n, p_n)$ )  
  for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do  $P[i, 0] \leftarrow 0$ ;  
  for  $b \leftarrow 1$  to  $B$  do  $P[0, b] \leftarrow 0$ ;  
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
    for  $b \leftarrow 1$  to  $B$  do  
      if  $b - s_i \geq 0$  then  
         $t \leftarrow P[i - 1, b - s_i] + p_i$ ;  
      else  $t \leftarrow 0$ ;  
      if  $P[i - 1, b] \geq t$  then  
         $P[i, b] \leftarrow P[i - 1, b]$ ;  
      else  $P[i, b] \leftarrow t$ ;  
  return( $P[n, B]$ );
```

Χρόνος  **$O(nB)$**

Μνήμη  **$O(nB)$**

# Δυναμικός Προγραμματισμός

---

- Εφαρμόζουμε **δυναμικό προγραμματισμό** για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης όπου ισχύει:
  - **Αρχή βελτιστότητας** (βέλτιστες επιμέρους λύσεις).
    - Κάθε τμήμα βέλτιστης λύσης αποτελεί **βέλτιστη λύση** για αντίστοιχο υποπρόβλημα.
    - π.χ. κάθε τμήμα μιας συντομότερης διαδρομής είναι συντομότερη διαδρομή μεταξύ των άκρων του.
- Έστω βέλτιστες **λύσεις για «μικρότερα»** προβλήματα. Πως **συνδυάζονται** για βέλτιστη **λύση σε «μεγαλύτερα»;**
  - **Αναδρομική εξίσωση** που περιγράφει **τιμή** βέλτιστης λύσης.
  - Υπολογίζουμε λύση από μικρότερα σε μεγαλύτερα (**bottom-up**).

# (Διακριτό) Πρόβλημα Σακιδίου

---

- Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης:
  - Συλλογή που χωράει **εφικτή λύση**. Αντιστοιχεί σε **αξία**.
  - Ζητούμενο: (**βέλτιστη**) συλλογή που χωράει με μέγιστη αξία.
- Εξαντλητική αναζήτηση:
  - #συλλογών =  $2^n$ . Χρόνος  $\Omega(n2^n)$
- Πρόβλημα Σακιδίου είναι **NP-δύσκολο** και **δεν υπάρχει «γρήγορος»** (πολυωνυμικός) **αλγόριθμος**.
  - Εφαρμογή δυναμικού προγραμματισμού.
  - Χρόνος  $\Theta(nB)$ . **Δεν** είναι πολυωνυμικός(;)!

# Ψευδοπολυωνυμικοί Αλγόριθμοι

---

- Το πρόβλημα του σακιδίου είναι **NP-δύσκολο**.
- Αλγόριθμος  $O(nB)$  δεν είναι πολυωνυμικού χρόνου;
  - Για ναι, πρέπει πολώνυμο του **μεγέθους εισόδου!**
  - Μέγεθος εισόδου:  $O(n(\log_2 B + \log_2 P_{\max}))$
  - Χρόνος **πολυωνυμικός στο  $n$  αλλά εκθετικός στο  $\log_2 B$**
- Αριθμητικά προβλήματα:
  - **Μέγεθος αριθμών** πολύ μεγαλύτερο (π.χ. εκθετικό) από πλήθος «**βασικών συνιστωσών**» (ότι συμβολίζουμε με  $n$ ).
- Αλγόριθμος πολυωνυμικό χρόνο:  
 $O((n \log \max\_num)^k)$ , σταθερά  $k \geq 1$
- Αλγόριθμος **ψευδο-πολυωνυμικού** χρόνου:  
 $O((n \max\_num)^k)$ , σταθερά  $k \geq 1$

# Απλησιότητα vs Δυναμικός Προγρ.

---

- Διακριτό Πρόβλ. Σακιδίου: **όχι** ιδιότητα **άπληστης επιλογής**.
  - Π.χ. Αντικείμενα:  $\{(1, 1+\varepsilon), (B, B)\}$ . Σακίδιο μεγέθους  $B$ .
- **Απλησιότητα** και **Δυναμικός Προγραμματισμός**:
  - Αρχή βελτιστότητας.
- **Δυναμικός Προγραμματισμός**: αναδρομή
  - Βέλτιστη λύση σε **όλα** τα υπο-προβλήματα που εμπλέκονται στην αναδρομή.
    - Διακριτό Σακίδιο: Βέλτιστη λύση με πρώτα ***i*** αντικείμενα για **όλα** τα μεγέθη σακιδίου!
  - Συνδυάζει «κατάλληλες» επιμέρους λύσεις για βέλτιστη.
  - Λύση **όλων** υπο-προβλημάτων **εγγυάται βέλτιστη λύση** αλλά **κοστίζει** σημαντικά σε υπολογιστικό χρόνο.

# Απλησιότητα vs Δυναμικός Προγρ.

---

- **Απλησιότητα:** επανάληψη
  - Ταξινόμηση ως προς κάποιο (εύλογο) κριτήριο.
  - Σε κάθε βήμα **αμετάκλητη** άπληστη επιλογή.
  - Άπληστη επιλογή: φαίνεται καλύτερη με βάση τρέχουσα κατάσταση και κάποιο (απλό) κριτήριο.
  - Λύση μόνο «**αναγκαίων**» υπο-προβλημάτων: **αποδοτικό υπολογιστικά** αλλά **δεν δίνει πάντα τη βέλτιστη** λύση.
    - **Γρήγοροι**, απλοί και «φυσιολογικοί» αλγόριθμοι!
    - (Καλές) **προσεγγιστικές** λύσεις σε πολλά προβλήματα.
    - **Βέλτιστη** λύση μόνο όταν **άπληστη επιλογή** (ως προς συγκεκριμένο κριτήριο επιλογής).

# Subset Sum και Διαμέριση

## □ Subset Sum:

- Σύνολο φυσικών  $A = \{s_1, \dots, s_n\}$  και  $B$ ,  $0 < B < s(A)$ .
- Υπάρχει  $X \subseteq A$  με  $s(X) = \sum_{i \in X} s_i = B$ ;
- Knapsack αποτελεί γενίκευση Subset Sum.
- Πρόβλημα Διαμέρισης (Partition): όταν  $B = s(A) / 2$

□  $S(i, b)$  είναι TRUE αν υπάρχει  $X \subseteq \{1, \dots, i\}$  με  $s(X) = b$ .

$$S(i, b) = \begin{cases} 1 & \text{αν } b = 0 \\ 0 & \text{αν } b < 0 \\ 0 & \text{αν } i = 0 \text{ και } b > 0 \\ S(i-1, b) \vee S(i-1, b-s_i) & \text{για } i = 1, \dots, n \\ & \text{και } b = 1, \dots, B \end{cases}$$

- Η τιμή του  $S(n, B)$  δίνει την απάντηση.

# Το Πρόβλημα του Περιπτερά

---

- Κέρματα αξίας 1, 12, και 20 λεπτών.
- Ρέστα ποσό  $x$  με **ελάχιστο** #κερμάτων.
  - Δυναμικός προγραμματισμός.



# Αλυσιδωτός Πολ/μός Πινάκων

- Γινόμενο πινάκων  $A$  ( $p \times q$ ) επί  $B$  ( $q \times r$ ) σε χρόνο  $\Theta(p \cdot q \cdot r)$ .  
(μετράμε μόνο πολ/μούς μεταξύ αριθμών).
- Συντομότερος τρόπος υπολογισμού γινομένου

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_{n-1} \quad A_n$$
$$(d_0 \times d_1) \quad (d_1 \times d_2) \quad (d_2 \times d_3) \quad \dots \quad (d_{n-2} \times d_{n-1}) \quad (d_{n-1} \times d_n)$$

- Πολλαπλασιασμός πινάκων είναι πράξη προσεταιριστική  
(αποτέλεσμα ανεξάρτητο από υπολογισμό επιμέρους γινομένων.)
- Ο χρόνος υπολογισμού εξαρτάται από τη σειρά!

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3$$
$$(1 \times 100) \quad (100 \times 3) \quad (3 \times 1)$$

$$(A_1 A_2) \quad A_3$$
$$(1 \times 100 \times 3) + (1 \times 3 \times 1) = 303$$

$$A_1 \quad (A_2 A_3)$$
$$(1 \times 100 \times 1) + (100 \times 3 \times 1) = 400$$

# Πολλαπλασιασμός Πινάκων

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ (13 \times 5) & (5 \times 89) & (89 \times 3) & (3 \times 34) \end{array}$$

Σειρά Υπολογισμού	Αριθμός Πολλαπλασιασμών
$((A_1 A_2) A_3) A_4$	$13 \times 5 \times 89 + 13 \times 89 \times 3 + 13 \times 3 \times 34 = 10582$
$((A_1 A_2)(A_3 A_4))$	54201
$((A_1(A_2 A_3))A_4)$	2856
$(A_1((A_2 A_3)A_4))$	4055
$(A_1(A_2(A_3 A_4)))$	26418

# Πολλαπλασιασμός Πινάκων

---

- Δίνονται  $n$  πίνακες:

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_{n-1} \quad A_n$$
$$(d_0 \times d_1) \quad (d_1 \times d_2) \quad (d_2 \times d_3) \quad \dots \quad (d_{n-2} \times d_{n-1}) \quad (d_{n-1} \times d_n)$$

Με ποια **σειρά** θα υπολογιστεί το **γινόμενο**  $A_1 A_2 \dots A_n$  ώστε να **ελαχιστοποιηθεί** #αριθμ. πολ/μών.

- Πρόβλημα **συνδυαστικής βελτιστοποίησης**:
  - Κάθε σειρά υπολογισμού υπολογίζει γινόμενο πινάκων με κάποιο #αριθμ. πολ/μών.
  - Ζητείται η σειρά με **ελάχιστο** #αριθμ. πολ/μών.
- **Αποδοτικός αλγόριθμος** για υπολογισμό καλύτερης σειράς για αλυσιδωτό πολ/μό  $n$  πινάκων.

# Εξαντλητική Αναζήτηση

---

□ ... δοκιμάζει **όλες τις σειρές υπολογισμού** και βρίσκει καλύτερη.

■ Κάθε σειρά αντιστοιχεί σε δυαδικό δέντρο με  $n$  φύλλα.

■ Χρόνος ανάλογος **#δυαδικών δέντρων με  $n$  φύλλα**:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k), P(1) = 1$$

■ Λύση  $(n-1)$ -οστός αριθμός Catalan:  $P(n) = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} = \Omega\left(\frac{4^n}{n^{3/2}}\right)$

□ Θα εφαρμόσουμε **δυναμικό προγραμματισμό**.

# Αρχή Βελτιστότητας

- Συμβολίζουμε  $A_{i..j} = A_i \times \dots \times A_j$
- Βέλτιστη λύση υπολογίζει  $A_{1..i}$ ,  $(d_0 \times d_i)$ , και  $A_{i+1..n}$ ,  $(d_i \times d_n)$ , για κάποιο  $i$ ,  $1 \leq i < n$ , και τελειώνει με  $A_{1..i} \times A_{i+1..n}$ .
  - #πολ/μών =  $d_0 \times d_i \times d_n + \#\text{πολ/μών}(A_{1..i}) + \#\text{πολ/μών}(A_{i+1..n})$
  - Επιμέρους γινόμενα  $A_{1..i}$  και  $A_{i+1..n}$  υπολογίζονται **βέλτιστα**.
- Συμβολίζουμε  $m[i, j] = \text{βέλτιστος } \#\text{πολ/μών}(A_{i..j})$
- Έστω για κάθε  $i$ ,  $1 \leq i < n$ , γνωρίζουμε  $m[1, i]$  και  $m[i + 1, n]$
- Τότε  $m[1, n] = \min_{1 \leq i < n} \{m[1, i] + m[i + 1, n] + d_0 d_i d_n\}$
- Γενική **αναδρομική σχέση**:

$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

# Δυναμικός Προγραμματισμός

---

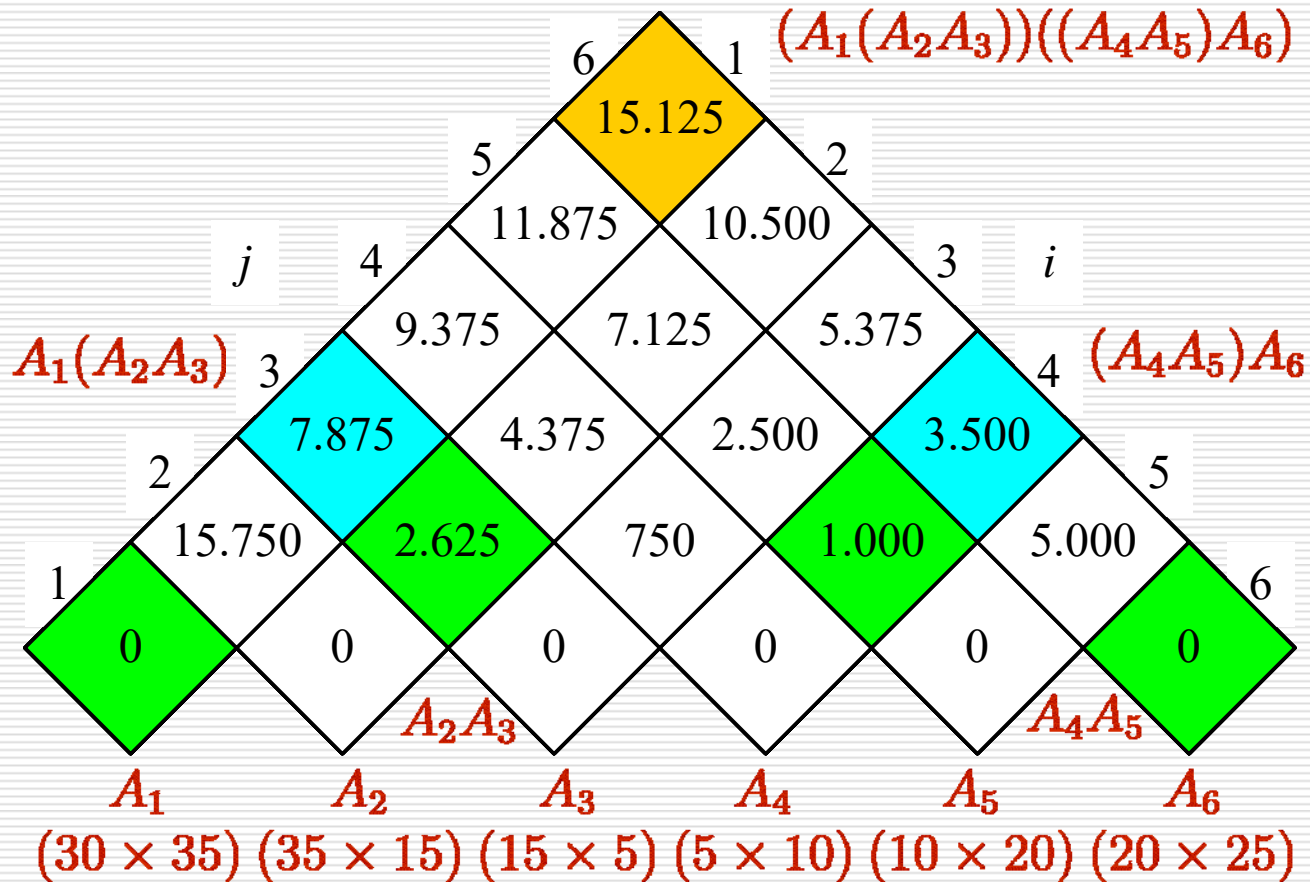
- **Bottom-up** υπολογισμός  $m[1, n]$  από αναδρομική σχέση:

$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

- Υπολογίζω  $n(n - 1) / 2$  τιμές  $m[i, j]$ .
  - $m[i, j]$  υπολογίζεται σε χρόνο  $O(n)$  από τιμές για γινόμενα μικρότερου εύρους.
  - Τιμές αποθηκεύονται σε πίνακα.

$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

# Παράδειγμα



$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j\} & \alpha\nu \ i < j \\ 0 & \alpha\nu \ i = j \end{cases}$$

## Υλοποίηση (bottom-up)

```

MatrixChainMultiplication(d[0, 1, ..., n]) /* Ai διάστασης d[i - 1] × d[i] */
    for i ← 1 to n do
        m[i, i] ← 0;
    for p ← 2 to n do
        for i ← 1 to n - p + 1 do
            j ← i + p - 1; m[i, j] ← ∞;
            for k ← i to j - 1 do
                q ← m[i, k] + m[k + 1, j] + d[i - 1]d[k]d[j];
                if q < m[i, j] then m[i, j] ← q;
    return(m[1, n]);

```

□ Χρόνος  $O(n^3)$  και μνήμη  $O(n^2)$ , μειώνεται σε  $O(n)$ .





# Αναδρομή με Απομνημόνευση

- Ο αναδρομικός αλγόριθμος αποθηκεύει τιμές σε πίνακα. Κάθε τιμή υπολογίζεται μία φορά.
  - Συνδυάζει απλότητα top-down προσέγγισης με ταχύτητα bottom-up.

```
RecMemMatrixChain( $d[0, \dots, n]$ )  
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
    for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do  
       $m[i, j] \leftarrow \infty$ ;  
  return(RecCM( $d[0, \dots, n]$ ));
```

```
  RecCM( $d[i - 1, \dots, j]$ );  
  if  $m[i, j] < \infty$  then return( $m[i, j]$ );  
  if  $i = j$  then  $m[i, j] = 0$ ;  
  else  
    for  $k \leftarrow i$  to  $j - 1$  do  
       $q \leftarrow$  RecCM( $d[i - 1, \dots, k]$ ) +  
        RecCM( $d[k, \dots, j]$ ) +  
         $d[i - 1]d[k]d[j]$ ;  
      if  $q < m[i, j]$  then  $m[i, j] \leftarrow q$ ;  
  return( $m[i, j]$ );
```

# ΔΠ vs ΔκΒ

---

- Δυναμικός Προγραμματισμός και Διαίρει-και-Βασίλευε επιλύουν προβλήματα **συνδυάζοντας λύσεις** κατάλληλα επιλεγμένων **υπο-προβλημάτων**.
- ΔκΒ είναι φύσει **αναδρομική μέθοδος (top-down)**.
- ΔκΒ επιλύει **υπο-προβλήματα ανεξάρτητα**.
  - Εφαρμόζεται όταν παράγονται **ανεξάρτητα υπο-προβ/τα**.
  - Ειδάλλως ίδια υπο-προβλήματα λύνονται πολλές φορές: Σπατάλη υπολογιστικού χρόνου.

# ΔΠ vs ΔκΒ

---

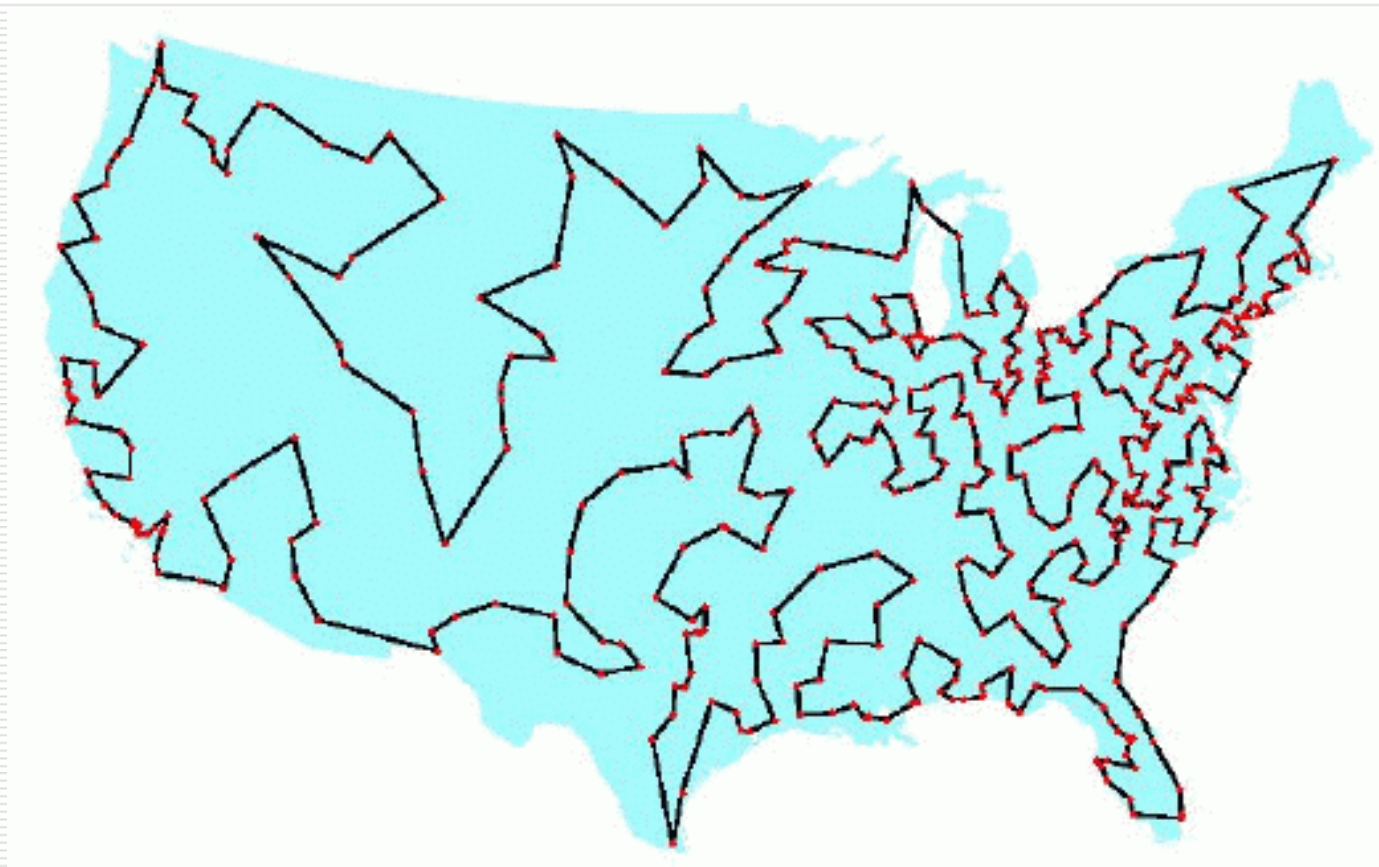
- ΔΠ «κτίζει» βέλτιστη λύση προβ/τος από βέλτιστες λύσεις υπο-προβ/των (bottom-up).
  - ΔΠ ξεκινά με στοιχειώδη στιγμιότυπα.
  - Συνδυάζει λύσεις για να βρει λύσεις σε μεγαλύτερα.
- ΔΠ εφαρμόζεται όταν υπο-προβ/τα επικαλύπτονται. Αποθηκεύει επιμέρους λύσεις για να μην υπολογίζει πάλι.
  - «Προγραμματισμός» διαδικασία συμπλήρωσης πίνακα με ενδιάμεσα αποτελέσματα (Bellman, 50's).
- ΔΠ εφαρμόζεται όταν ισχύει αρχή βελτιστότητας.
  - Διατύπωση αναδρομικής εξίσωσης για βέλτιστη λύση.
  - Αναδρομική εξίσωση λύνεται bottom-up για βέλτιστη τιμή.
  - Επιλογές κατά την επίλυση απαρτίζουν βέλτιστη λύση.

# Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

- Δίνονται  $n$  σημεία  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  και αποστάσεις τους  $d: N \times N \mapsto \mathbb{R}_+$ 
  - Απόσταση  $i \rightarrow j = d_{ij}$ , απόσταση  $j \rightarrow i = d_{ji}$
  - Γενική περίπτωση: όχι συμμετρικές αποστάσεις, όχι τριγωνική ανισότητα.
- Ζητείται μια **περιοδεία ελάχιστου συνολικού μήκους**.
  - **Περιοδεία**: κύκλος που διέρχεται από κάθε σημείο μία φορά.
  - **Περιοδεία**: μετάθεση σημείων  $\pi: N \mapsto N$ ,  $\pi(1) = 1$   
Μετάθεση (permutation): 1-1 και επί αντιστοιχία  $N$  με  $N$ .
    - Π.χ. 
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 & 6 \end{array}$$
  - **Μήκος** περιοδείας  $\pi$ :  $L(\pi) = d_{\pi(n)1} + \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi(i)\pi(i+1)}$

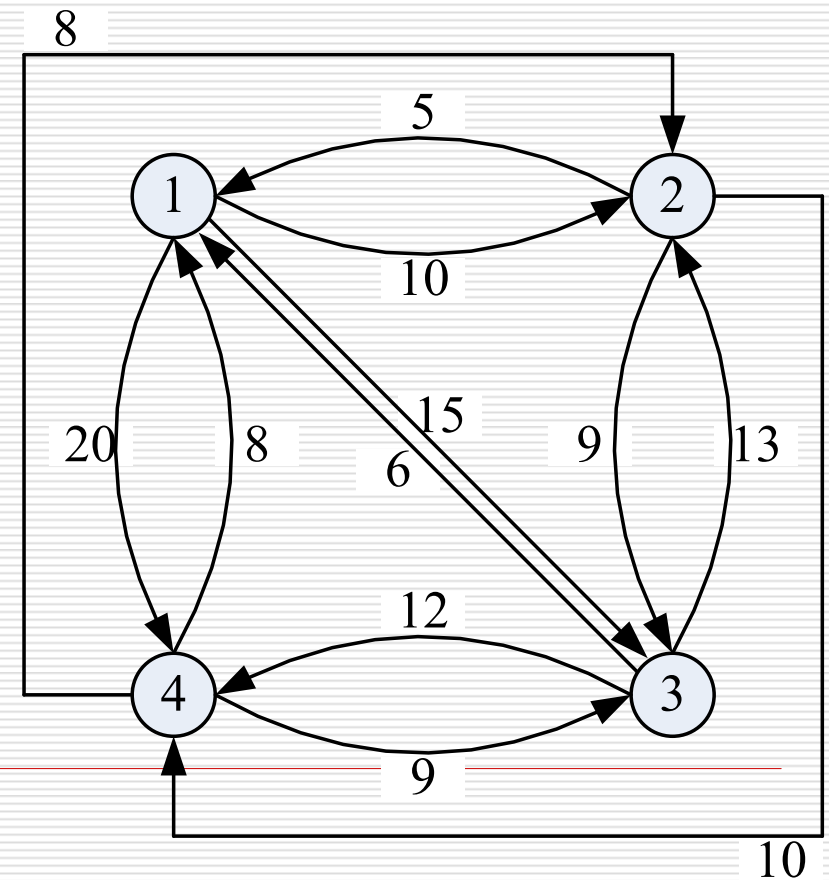
# Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

---



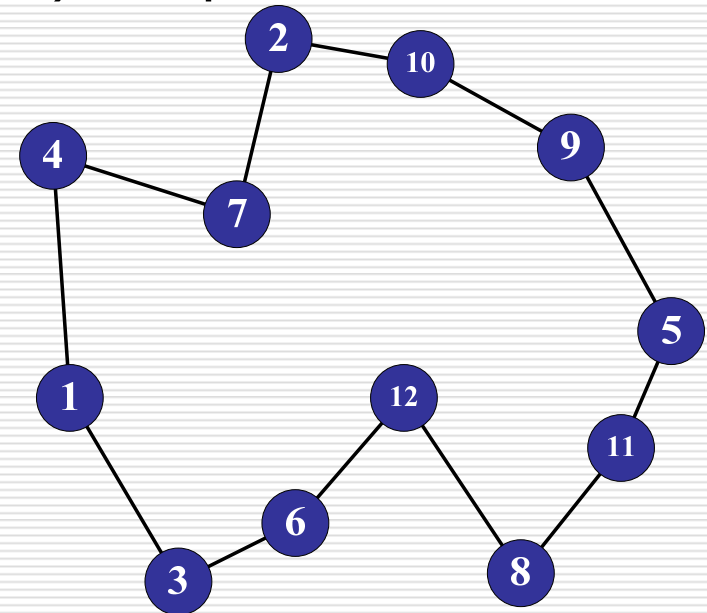
# Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

- Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης:
  - Κάθε περιοδεία **εφικτή λύση** και αντιστοιχεί σε **μήκος**.
  - Ζητούμενο: (**βέλτιστη**) περιοδεία **ελάχιστου μήκους**.
- Εξαντλητική αναζήτηση:
  - #περιοδειών =  $(n - 1)!$
  - Χρόνος  $\Omega(n!)$
- ΠΠΠ είναι **NP-δύσκολο** και **δεν υπάρχει «γρήγορος»** (πολυωνυμικός) **αλγόριθμος**.
  - Δυναμικός προγραμματισμός λύνει γενική περίπτωση σε χρόνο  $\Theta(n^2 2^n)$ .



# Αρχή Βελτιστότητας

- Βέλτιστη περιοδεία ξεκινάει  $1 \rightarrow i$  και συνεχίζει ...
  - ... από  $i \rightarrow$  όλα τα σημεία  $N \setminus \{1, i\} \rightarrow 1$ .
  - Αυτό το τμήμα βέλτιστο με αυτή την ιδιότητα.
    - Διαφορετικά, βελτιώνω τμήμα και περιοδεία συνολικά!
- Έστω  $L(i, S)$  ελάχιστο μήκος για να ξεκινήσω από  $i \rightarrow$  όλο το  $S \rightarrow 1$ , ( $i \notin S$ ).
  - Αν  $S \subset N \setminus \{1\}$ , τότε  $i \neq 1$  (το 1 προστίθεται τελευταίο).
  - Εύκολα  $L(i, \emptyset) = d_{i1}$ ,  $\forall i \neq 1$
  - $L(i, \{j\}) = d_{ij} + d_{j1}$





# Αρχή Βελτιστότητας

---

□ Έστω  $L(i, S)$  ελάχιστο μήκος για να ξεκινήσω από  $i \rightarrow$  όλο το  $S \rightarrow 1$ , ( $i \notin S$ ).

■ Αν  $S \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , τότε  $i \neq 1$  (το 1 προστίθεται τελευταίο).

■ Εύκολα για  $|S| = 0, 1, 2$ :

$$L(i, \{j, \ell\}) = \min\{d_{ij} + d_{j\ell} + d_{\ell 1}, d_{i\ell} + d_{\ell j} + d_{j1}\}$$

$$L(i, \{j, \ell\}) = \min\{d_{ij} + L(j, \{\ell\}), d_{i\ell} + L(\ell, \{j\})\}$$

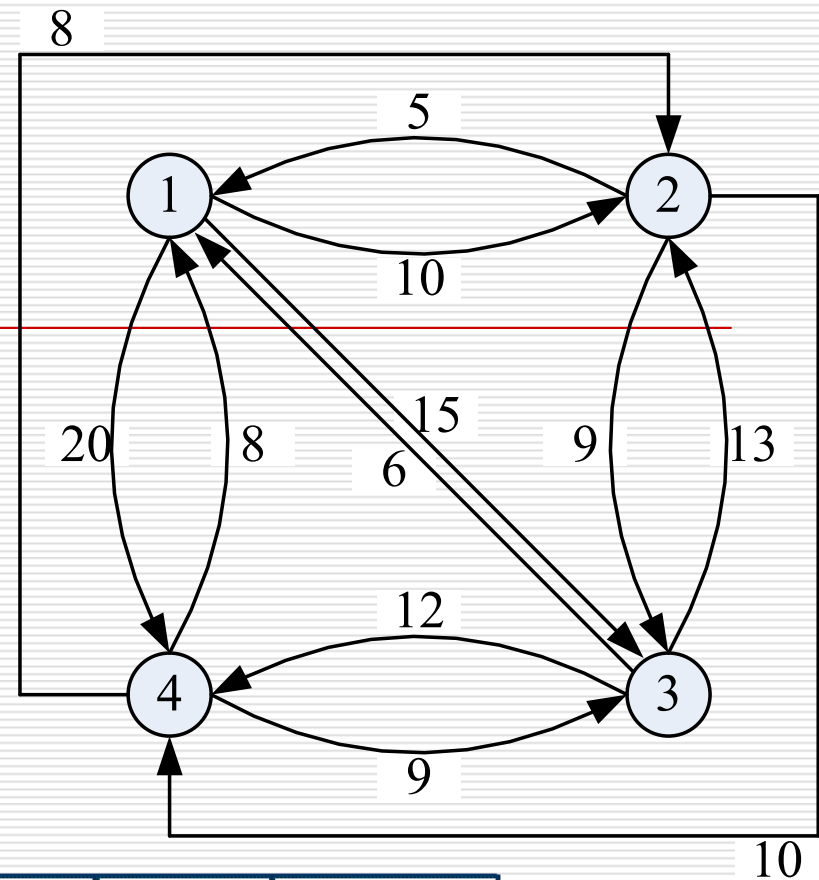
■ Υπολογίζω  $L(i, S)$ ,  $|S| = k$ , αν γνωρίζω όλα τα  $L(j, S \setminus \{j\})$ :

$$L(i, S) = \min_{j \in S} \{d_{ij} + L(j, S \setminus \{j\})\}$$

■ Υπολογίζω όλες τις βέλτιστες «υπο-περιοδείες» που τελειώνουν στο 1 και έχουν μήκος 1, 2, 3, 4, ..., για κάθε υποσύνολο αντίστοιχου μεγέθους.

# Παράδειγμα

$$L(i, S) = \min_{j \in S} \{d_{ij} + L(j, S \setminus \{j\})\}$$



$i \setminus S$	$\emptyset$	{2}	{3}	{4}	{3, 4}	{2, 4}	{2, 3}	{2, 3, 4}
1								<b>35 (2)</b>
2	5		15 (3)	18 (4)	<b>25 (4)</b>			
3	<b>6</b>	18 (2)		20 (4)		25 (4)		
4	8	13 (2)	<b>15 (3)</b>				23 (2)	

□ Βέλτιστη περιοδεία **1, 2, 4, 3** μήκους **35**.

# Υλοποίηση

$$L(i, S) = \min_{j \in S} \{d_{ij} + L(j, S \setminus \{j\})\}$$

TSP( $d[1 \dots n][1 \dots n]$ )

**for**  $i \leftarrow 2$  **to**  $n$  **do**  $L(i, \emptyset) \leftarrow d[i, 1]$ ;

**for**  $k \leftarrow 1$  **to**  $n - 2$  **do**

**for all**  $S \subset N \setminus \{1\}, |S| = k$  **do**

**for all**  $i \in (N \setminus \{1\}) \setminus S$  **do**

$q \leftarrow \infty$ ;

**for all**  $j \in S$  **do**

**if**  $d[i, j] + L(j, S \setminus \{j\}) < q$  **then**

$q \leftarrow d[i, j] + L(j, S \setminus \{j\}); t \leftarrow j$ ;

$L(i, S) \leftarrow q; J(i, S) \leftarrow t$ ;

$q \leftarrow \infty$ ;

**for**  $j \leftarrow 2$  **to**  $n$  **do**

**if**  $d[1, j] + L(j, N \setminus \{1, j\}) < q$  **then**

$q \leftarrow d[1, j] + L(j, N \setminus \{1, j\}); t \leftarrow j$ ;

$L(1, N \setminus \{1\}) \leftarrow q; J(1, N \setminus \{1\}) \leftarrow t$ ;

**return**( $L(1, N \setminus \{1\}), J$ );

Μνήμη  $\Theta(n 2^n)$

Χρόνος  $\Theta(n^2 2^n)$

20 σημεία:

$$20! = 2.4 \times 10^{18}$$

$$20^2 2^{20} = 4.2 \times 10^8$$