

# Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

---

**Δημήτρης Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

---

- Γιατί κάποια (επιλύσιμα) **προβλήματα** είναι δύσκολο να λυθούν από **υπολογιστικές μηχανές**.
  - Ποια επιλύσιμα προβλήματα είναι **εύκολα** και ποια **δύσκολα**;
- Αντικείμενο: ελάχιστοι **υπολογιστικοί πόροι** για επιλύσιμα προβλήματα.
  - Εύλογοι υπολογιστικοί πόροι: **ευεπίλυτα προβλήματα**.
    - Fractional knapsack, minimum spanning tree, shortest paths, max-flow, min-cut, linear programming, ...
  - Διαφορετικά, **δισεπίλυτα προβλήματα**.
    - TSP, discrete knapsack, vertex cover, independent set, set cover, scheduling, ...
  - Επίδραση **υπολογιστικού μοντέλου**.

# Προσέγγιση

---

- Κλάσεις προβλημάτων (**complexity classes**) με παρόμοια υπολογιστική «δυσκολία» (**computational complexity**).
- Με (κατάλληλη) **αναγωγή** ορίζουμε «διάταξη» προβλημάτων σε κάθε κλάση (με βάση δυσκολία).
  - Δυσκολότερα προβλήματα: **πλήρη** για την κλάση, συνοψίζουν **δυσκολία κλάσης**.
  - Πλήρες πρόβλημα «εύκολο»: όλη η κλάση «εύκολη».
  - Αρνητικό αποτέλεσμα: όλα τα πλήρη προβλήματα «δύσκολα».
  - Έτσι (προσπαθούμε να) καθορίσουμε **επαρκείς υπολογιστικούς πόρους** για επίλυση **δύσκολων προβλημάτων**.
- Διαλεκτική σχέση **αλγόριθμων** και **πολυπλοκότητας**.

# Χρονική Πολυπλοκότητα

---

- Χρονική πολυπλοκότητα DTM  $M$ :
    - Αύξουσα συνάρτηση  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $x$ ,  $|x| = n$ ,  $M(x)$  τερματίζει σε  $\leq t(n)$  βήματα.
  - Χρονική πολυπλοκότητα προβλήματος  $\Pi$ :
    - Χρονική πολυπλοκότητα «ταχύτερης» DTM που λύνει  $\Pi$ .
  - Κλάση  $\mathbf{DTIME}[t(n)] \equiv \{\Pi : \Pi \text{ λύνεται σε χρόνο } O(t(n))\}$
  - Ιεραρχία κλάσεων χρονικής πολυπλοκότητας:  
 $\mathbf{DTIME}[t(n)] \subset \mathbf{DTIME}[\omega(t(n) \log t(n))]$   
 $\mathbf{DTIME}[n] \subset \mathbf{DTIME}[n^2] \subset \mathbf{DTIME}[n^3] \subset \dots$
  - Πολυωνυμικός χρόνος:  $\mathbf{P} \equiv \bigcup_{k \geq 0} \mathbf{DTIME}[n^k]$
  - Εκθετικός χρόνος:  $\mathbf{EXP} \equiv \bigcup_{k \geq 0} \mathbf{DTIME}[2^{n^k}]$
- $\mathbf{P} \subset \mathbf{EXP}$

# Ευεπίλυτα Προβλήματα

---

- **Κλάση P** : προβλήματα απόφασης που λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- **Θέση Cook – Karp** : κλάση ευεπίλυτων προβλημάτων ταυτίζεται με κλάση P.

Υπέρ θέσης Cook – Karp:

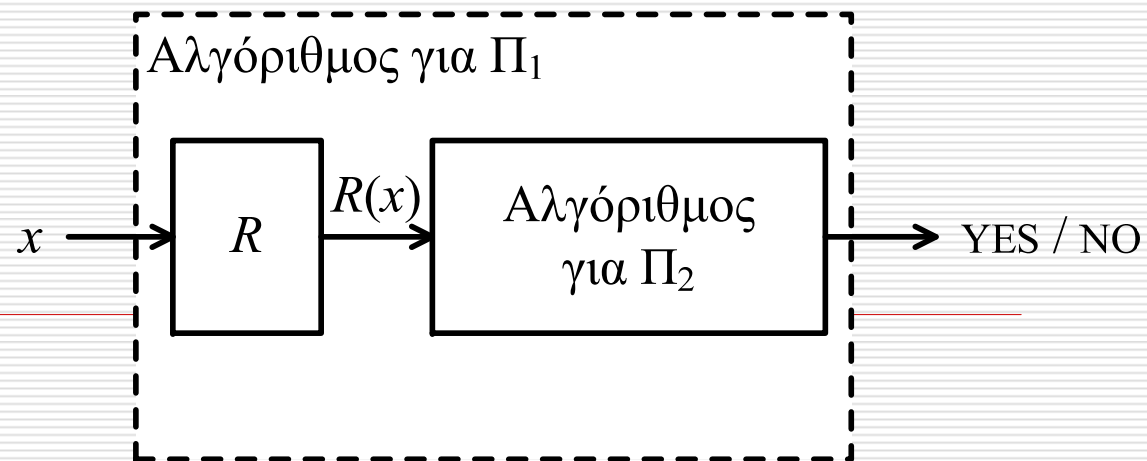
- Συνήθως πολυώνυμα μικρού βαθμού (π.χ.  $n$ ,  $n^2$ ,  $n^3$ ).
- Κλειστότητα κλάσης.
- Διπλασιασμός υπολογιστικής ισχύος: σημαντική αύξηση στο μέγεθος στιγμιότυπων που λύνουμε.

Εναντίον θέσης Cook – Karp:

- Ακραίες περιπτώσεις: πρακτικό το  $n^{100}$  αλλά όχι το  $(1.001)^n$  !
- Γραμμικός Προγραμματισμός: **Simplex** εκθετικού χρόνου αλλά πολύ γρήγορος στην πράξη. **Ελλειψοειδές** πολυωνυμικού χρόνου αλλά καθόλου πρακτικός!

# (Πολυωνυμική) Αναγωγή

- $\Pi_1$  **ανάγεται** πολυωνυμικά σε  $\Pi_2$  ( $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$ ):
  - Υπάρχει πολυωνυμικά υπολογίσιμη συνάρτηση  $R: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  ώστε  $\forall x \in \Sigma^*, x \in \Pi_1 \Leftrightarrow R(x) \in \Pi_2$ .
  - $R$  καλείται **πολυωνυμική αναγωγή**.
  - $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$  :  $\Pi_2$  είναι τουλ. τόσο δύσκολο όσο το  $\Pi_1$  (για τον υπολογισμό σε πολυωνυμικό χρόνο).
  - Αν  $\Pi_2 \in \mathbf{P}$ , τότε και  $\Pi_1 \in \mathbf{P}$ .
  - Αν  $\Pi_1 \notin \mathbf{P}$ , τότε και  $\Pi_2 \notin \mathbf{P}$ .



# Πληρότητα

---

- Έστω  $\mathbf{C}$  μια κλάση προβλημάτων.
  - $\Pi$  είναι **C-δύσκολο** (**C-hard**) ως προς αναγωγή  $R$  αν κάθε πρόβλημα  $\Pi'$  στην  $\mathbf{C}$  ανάγεται κατά  $R$  στο  $\Pi$ .  
 $\forall \Pi' \in \mathbf{C}, \Pi' \leq_R \Pi$
  - Αν  $\Pi \in \mathbf{C}$  και  $\Pi$  είναι **C-δύσκολο** ως προς αναγωγή  $R$ , τότε  $\Pi$  είναι **C-πλήρες** (**C-complete**) ως προς  $R$ .  
 $\forall \Pi' \in \mathbf{C}, \Pi' \leq_R \Pi$   
και  $\Pi \in \mathbf{C}$
- **Πλήρη** προβλήματα (ως προς κατάλληλη αναγωγή) συνοψίζουν υπολογιστική δυσκολία κλάσης  $\mathbf{C}$ .
  - Αναγωγή πρέπει να είναι «λίγο ευκολότερη» από «δυσκολότερα» προβλήματα στην κλάση  $\mathbf{C}$ .
- Κλάση  $\mathbf{C}$  **κλειστή** ως προς αναγωγή  $R$  αν  
 $\forall \Pi_1, \Pi_2, \Pi_1 \leq_R \Pi_2$  και  $\Pi_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow \Pi_1 \in \mathbf{C}$

# Ιδιότητες Αναγωγής

---

- Κλάση  $\mathbf{P}$  είναι κλειστή ως προς πολυωνυμική αναγωγή.
  - Αν  $\Pi_2 \in \mathbf{P}$ , τότε και  $\Pi_1 \in \mathbf{P}$ .
- Πολυωνυμική αναγωγή είναι μεταβατική.
  - Σύνθεση πολυωνυμικών αναγωγών αποτελεί πολυωνυμική αναγωγή.
- Αν  $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$  και  $\Pi_2 \leq_p \Pi_1$ , τότε  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  πολυωνυμικά ισοδύναμα,  $\Pi_1 \equiv_p \Pi_2$ .
- Κλάσεις κλειστές ως προς αναγωγή  $R$  με κοινό πλήρες πρόβλημα ως προς αναγωγή  $R$  **ταυτίζονται**.
  - Έστω κλάσεις  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  κλειστές ως προς αναγωγή  $R$ .
  - Αν  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  έχουν κοινό πλήρες πρόβλημα  $\Pi$  ως προς αναγωγή  $R$ , τότε  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$ .



# (Απλά) Παραδείγματα Αναγωγών

---

- Κύκλος Hamilton  $\leq_p$  TSP με αποστάσεις 1 και 2 – TSP(1, 2).
  - Δίνεται γράφημα  $G(V, E)$ . Έχει  $G$  κύκλο Hamilton;
  - Από  $G$ , κατασκευάζουμε στιγμιότυπο  $I_G$  του TSP(1, 2):
    - Μία «πόλη»  $u$  για κάθε κορυφή  $u \in V$ .
    - Συμμετρικές αποστάσεις:  $d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{u, v\} \in E \\ 2 & \text{αν } \{u, v\} \notin E \end{cases}$
  - $G$  έχει κύκλο Hamilton αν  $I_G$  έχει περιοδεία μήκους  $\leq |V|$ .
- TSP(1, 2)  $\leq_p$  Metric TSP.
  - 1<sup>ο</sup> ειδική περίπτωση 2<sup>ου</sup> : αποστάσεις 1 και 2 ικανοποιούν τριγωνική ανισότητα.

# (Απλά) Παραδείγματα Αναγωγών

---

- Min Vertex Cover  $\equiv_p$  Max Independent Set  $\equiv_p$  Max Clique.
  - Vertex cover  $C$  σε γράφημα  $G(V, E)$  ανν  
independent set  $V \setminus C$  σε γράφημα  $G$  ανν  
clique  $V \setminus C$  σε συμπληρωματικό γράφημα  $\bar{G}$ .
- Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$ ,  $|V| = n$ .  
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
  - Το  $G$  έχει vertex cover  $\leq k$ .
  - Το  $G$  έχει independent set  $\geq n - k$ .
  - Το συμπληρωματικό  $\bar{G}$  έχει clique  $\geq n - k$ .

# $k$ -Ικανοποιησιμότητα

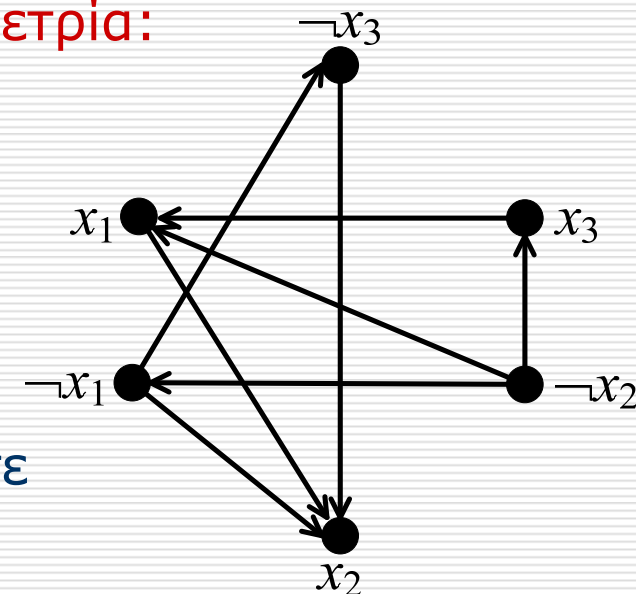
---

- Λογική πρόταση  $\varphi$  σε  $k$ -Συζευκτική Κανονική Μορφή,  $k$ -CNF:  
 $\varphi \equiv c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ , όπου  $c_i = l_{i_1} \vee \dots \vee l_{i_k}$ , με  $l_{i_j} \in \{x_1, \neg x_1, \dots, x_n, \neg x_n\}$ 
  - $c_j$ : όροι.  $l_{i_j}$ : literals. #literals σε κάθε όρο  $\leq k$ .  
Π.χ. για  $k = 2$ :  $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$
- $k$ -Ικανοποιησιμότητα:
  - Δίνεται  $\varphi$  σε  $k$ -CNF. Είναι  $\varphi$  ικανοποιήσιμη;

# 2-Ικανοποιησιμότητα

## □ 2-Ικανοποιησιμότητα $\in \mathbf{P}$ .

- Παρατηρούμε ότι  $l_i \vee l_j \equiv (\neg l_i \rightarrow l_j) \wedge (\neg l_j \rightarrow l_i)$
- Κατασκευάζουμε κατευθυν. γράφημα  $G_\varphi$  με «συνεπαγωγές»  $\varphi$ .  
 $G_\varphi$  έχει κορυφές  $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \dots, \neg x_n\}$
- Για κάθε όρο  $l_i \vee l_j$ , ακμές  $G_\varphi$   $(\neg l_i, l_j)$  και  $(\neg l_j, l_i)$
- Ακμές και μονοπάτια  $G_\varphi$  εμφανίζουν συμμετρία:  
ακμή  $(l_i, l_j) \Leftrightarrow$  ακμή  $(\neg l_j, \neg l_i)$   
 $l_i - l_j$  μονοπάτι  $\Leftrightarrow \neg l_j - \neg l_i$  μονοπάτι
- Όμως  $l_i \rightarrow l_j$  ψευδής  $\Leftrightarrow l_i = 1$  και  $l_j = 0$
- $\varphi$  μη ικανοποιήσιμη αν υπάρχουν  $x_i - \neg x_i$  και  $\neg x_i - x_i$  μονοπάτια.
- Λόγω αυτών, καμία αποτίμηση  $x_i$  και  $\neg x_i$  σε συμπληρωματικές τιμές δεν ικανοποιεί  $\varphi$ .



# «Δύσκολα» Προβλήματα

---

- Τι κάνουμε όταν ένα πρόβλημα φαίνεται «δύσκολο»;
  - «Δύσκολο»: μετά από μεγάλη προσπάθεια, δεν βρίσκουμε αποδοτικό αλγόριθμο (πολυωνυμικού χρόνου).
- Πάμε στο αφεντικό και λέμε:
  - Δεν **μπορώ** να βρω αποδοτικό αλγόριθμο. Απόλυση!
  - Δεν **υπάρχει** αποδοτικός αλγόριθμος. Too good to be true!
  - **Κανένας** δεν μπορεί να βρει αποδοτικό αλγόριθμο:
    - **Ανάγουμε** πολυωνυμικά κάποιο γνωστό **NP-πλήρες** πρόβλημα στο «δικό μας».
- Θεωρία **NP-πληρότητας**.
  - **NP-πλήρη**: κλάση εξαιρετικά **σημαντικών προβλημάτων** που ανάγονται πολυωνυμικά το ένα στο άλλο.
  - **Είτε όλα** λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο **είτε κανένα**.
  - Έχουν **μελετηθεί τόσο πολύ**, ώστε όλοι πιστεύουν ότι **κανένα!**