Γραμμικός Προγραμματισμός

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Γραμμικός Προγραμματισμός

- Ελαχιστοποίηση γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης υπό πεπερασμένο αριθμό γραμμικών περιορισμών (ισότητες ή ανισότητες).
  - **Περιορισμοί**: ($m \times n$)-πίνακας A, m-διάνυσμα b.
  - **Αντικειμενική**: n-διάνυσμα c.
  - **Άγνωστοι**: n-διάνυσμα x.
  - **Τυπική** μορφή (standard form):

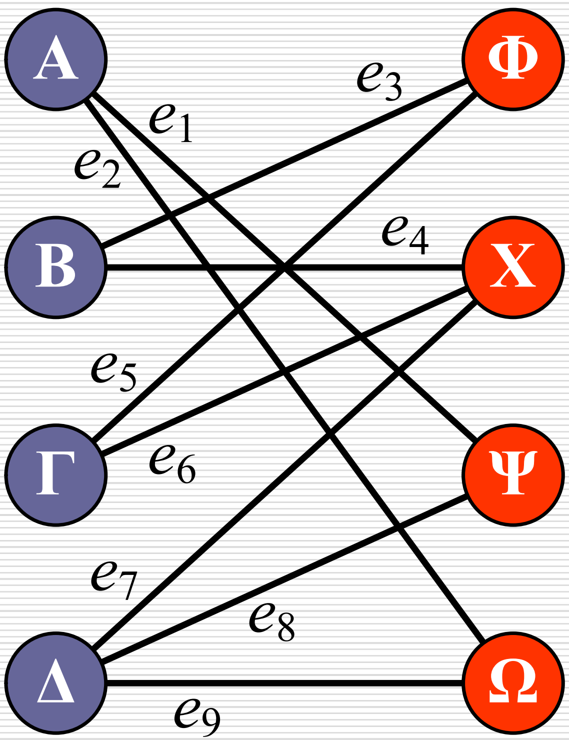
$$
\begin{array}{llcll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{subject to:} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i & i = 1 \ldots m \\
 & x_j & \geq & 0 & j = 1 \ldots n
\end{array}
$$

Πρόβλημα Δίαιτας

	Βιτ.A	Βιτ.B	Βιτ. C	Θερμ.
Πίτσα	203	92	100	600
Φρούτα	270	80	512	250
Αυγά	90	84	230	350
Σουβλάκι	500	90	210	500
Απαιτήσεις	2000	300	430	

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{min} & 600x_\pi & + & 250x_\phi & + & 350x_\alpha & + & 500x_\sigma & & \\
\text{s.t.} & 203x_\pi & + & 270x_\phi & + & 90x_\alpha & + & 500x_\sigma & \geq & 2000 \\
 & 92x_\pi & + & 80x_\phi & + & 84x_\alpha & + & 90x_\sigma & \geq & 300 \\
 & 100x_\pi & + & 512x_\phi & + & 230x_\alpha & + & 210x_\sigma & \geq & 430 \\
 & x_\pi \geq 0 & & x_\phi \geq 0 & & x_\alpha \geq 0 & & x_\sigma \geq 0 & &
\end{array}
$$

Bipartite Matching



$$
\begin{array}{rrcl}
\text{min} & -(x_1 + x_2 + \cdots + x_9) & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 & \leq & 1 \\
 & x_3 + x_4 & \leq & 1 \\
 & x_5 + x_6 & \leq & 1 \\
 & x_7 + x_8 + x_9 & \leq & 1 \\
 & x_3 + x_5 & \leq & 1 \\
 & x_4 + x_6 + x_7 & \leq & 1 \\
 & x_1 + x_8 & \leq & 1 \\
 & x_2 + x_9 & \leq & 1
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad \ldots \quad x_9 \geq 0$$

Ισοδύναμες Μορφές

- Τυπική μορφή : $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Κανονική μορφή : $\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Μεγιστοπ. ↔ Ελαχιστοπ.: $\max c^T x \Leftrightarrow \min -c^T x$
- Ισότητα ↔ Ζευγάρι ανισότητες

$$a_i^T x = b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_i^T x & \leq & b_i \\ a_i^T x & \geq & b_i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} -a_i^T x & \geq & -b_i \\ a_i^T x & \geq & b_i \end{array} \right.$$

- Ανισότητα ↔ Ισότητα και slack μεταβλητή :

$$a_i^T x \geq b_i \Leftrightarrow a_i^T x - s_i = b_i \,, \;\; s_i \geq 0$$

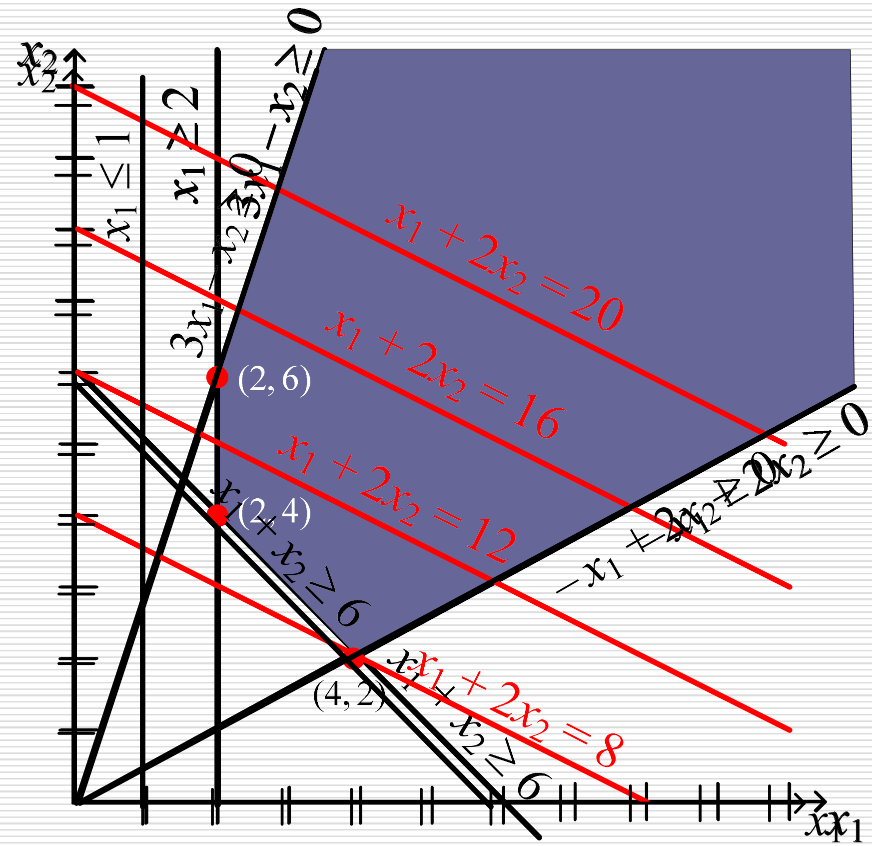
- Αρνητική μεταβλητή : $x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0$
- Όχι πρόσημο : $x_j \gtrless 0 \Leftrightarrow x_j^+ - x_j^- \,, \;\; x_j^+ \,, x_j^- \geq 0$

Ορολογία

- Αν x ικανοποιεί $A\,x \geq b$ και $x \geq 0$ είναι αποδεκτή (feasible) λύση.
  - Εφικτή περιοχή: $P = \{x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Γραμμικό Πρόγραμμα (ΓΠ, LP) είναι επιλύσιμο αν έχει αποδεκτή λύση και μη-επιλύσιμο διαφορετικά.
- Βέλτιστη λύση x^* : αποδεκτή λύση με ελάχιστη αντικειμενική τιμή, $c^T x^* = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- ΓΠ μη-φραγμένο (κάτω) αν $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists$ εφικτή λύση $x : c^T x \leq \lambda$.
  - *Επιλύσιμο και φραγμένο* (κάτω) : **πεπερασμένο.**
- Ένα ΓΠ μπορεί να είναι μη-επιλύσιμο, μη-φραγμένο, ή πεπερασμένο.

Παράδειγμα

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\text{min} & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & & & \geq & \cancel{2}\,1 \\
& 3x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\
& x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\
& -x_1 & + & 2x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



- Εφικτή περιοχή : **πολύεδρο *P***.
  Φραγμένο : **πολύτοπο *P***.
- Κορυφή : ακραίο σημείο
  (όχι κυρτός συνδυασμός άλλων)
  $\forall y \neq 0,\ x + y \notin P \vee x - y \notin P$
- Φραγμένο πολύεδρο (πεπερασμένο):
  Υπάρχει **κορυφή** που αντιστοιχεί σε **βέλτιστη** λύση !

Κορυφές

- Αν $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ είναι επιλύσιμο και φραγμένο, υπάρχει κορυφή – βέλτιστη λύση.
- Αν $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, το *P* έχει τουλάχιστον μία κορυφή.
- $m \times n$ πίνακας A (περιορισμοί) :
  - #(ανεξάρτ.) εξισώσεων *m* < #μεταβλητών *n* .
  - βαθμό *m* (*m* γραμμικά ανεξάρτητες στήλες).
- Εφικτή λύση $x \in P$ είναι κορυφή ανν στήλες $\{j \in [n] : x_j > 0\}$ γραμμικά ανεξάρτητες.

Βασικές Εφικτές Λύσεις

- **Βασική (εφικτή) λύση** (basic (feasible) solution):
  - **Βάση** : *m* γραμμικά ανεξάρτ. στήλες του A.
  - Βάση ορίζει **τιμές** για **βασικές** μεταβλητές.
  - **Μη-βασικές** μεταβλητές στο **0**.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 0x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 9 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

- Βασικές λύσεις: $[\frac{9}{2}, \frac{5}{4}, 0, 0]$, $[22, 0, 5, 0]$, $[2, 0, 0, 5]$, $[0, \frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, 0]$, $[0, -1, 0, 9]$, $[0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$

- Βασικές εφικτές λύσεις $\leftrightarrow$ κορυφές

Βασικές Εφικτές Λύσεις

- *x* κορυφή – ΒΕΛ του $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ **ανν** υπάρχει $B \subseteq [n], \ |B| = m,$(βάση):
  - $x_N = 0 \,, \ \ N = [n] \setminus B$ (μη-βασικές μεταβλητές).
  - A_B είναι αντιστρέψιμος .
  - $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$ (βασικές μεταβλητές).
- Κάθε ΒΕΛ αποτελεί κορυφή του *P* .
- Μπορεί κορυφή να αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία διαφορετικές ΒΕΛ.

Βασικές Εφικτές Λύσεις

- Αν $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, το *P* έχει τουλάχιστον μία Βασική Εφικτή Λύση (ΒΕΛ).
- Για κάθε ΒΕΛ *x*, υπάρχει c_x : x βέλτιστη λύση του $\min\{c_x^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Υπάρχουν $< \binom{n}{m}$ «υποψήφιες» βέλτιστες λύσεις (κορυφές - ΒΕΛ) του $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- **Αλγόριθμος** (εξαντλητικός):
  - Δημιούργησε όλες τις βασικές λύσεις.
  - Επέστρεψε τη βασική εφικτή λύση με μικρότερη αντικειμενική τιμή.

Αλγόριθμος Simplex

- [Dantzig, 1947], καλύτερη πρακτική επιλογή.
- Ξεκίνησε από κορυφή *x* (βάση *B*).
- Υπάρχει γειτονική κορυφή x′ με μικρότερο κόστος:
  - Ναι : μετακινήσου στη x′ και συνέχισε.
  - Όχι : βέλτιστη λύση.
- Πως ελέγχουμε αν ΓΠ επιλύσιμο και βρίσκουμε αρχική κορυφή ;
- Πως καταλαβαίνουμε αν ΓΠ μη-φραγμένο ;
- **Pivoting** : γειτονική κορυφή με μικρότερο κόστος.

$$\begin{array}{rrcl} \text{min} & c_B^T x_B + c_N^T x_N & & \\ \text{s.t.} & A_B x_B + A_N x_N & = & b \\ & x_B, x_N & \geq & 0 \end{array}$$

Εναλλαγή Στηλών

- Αφού $x_N = 0$, $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$ και

$$\begin{aligned} c^T x &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T(A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N \end{aligned}$$

- Ανηγμένο κόστος : $\tilde{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$
  - Μη-βασική μετ. με αρνητικό ανηγμένο κόστος : μείωση κόστους αν αυξηθεί (γίνει βασική).
  - Αύξηση καθορίζεται από $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$ (μεταβλητές είναι μη-αρνητικές).
  - Μη-αρνητικό ανηγμένο κόστος : βέλτιστη λύση.

Παράδειγμα

$$k \leftrightarrow \arg \min_{\substack{i \in B \\ b_i \geq 0 \\ a_{i,k} > 0}} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,k}} \right\}$$

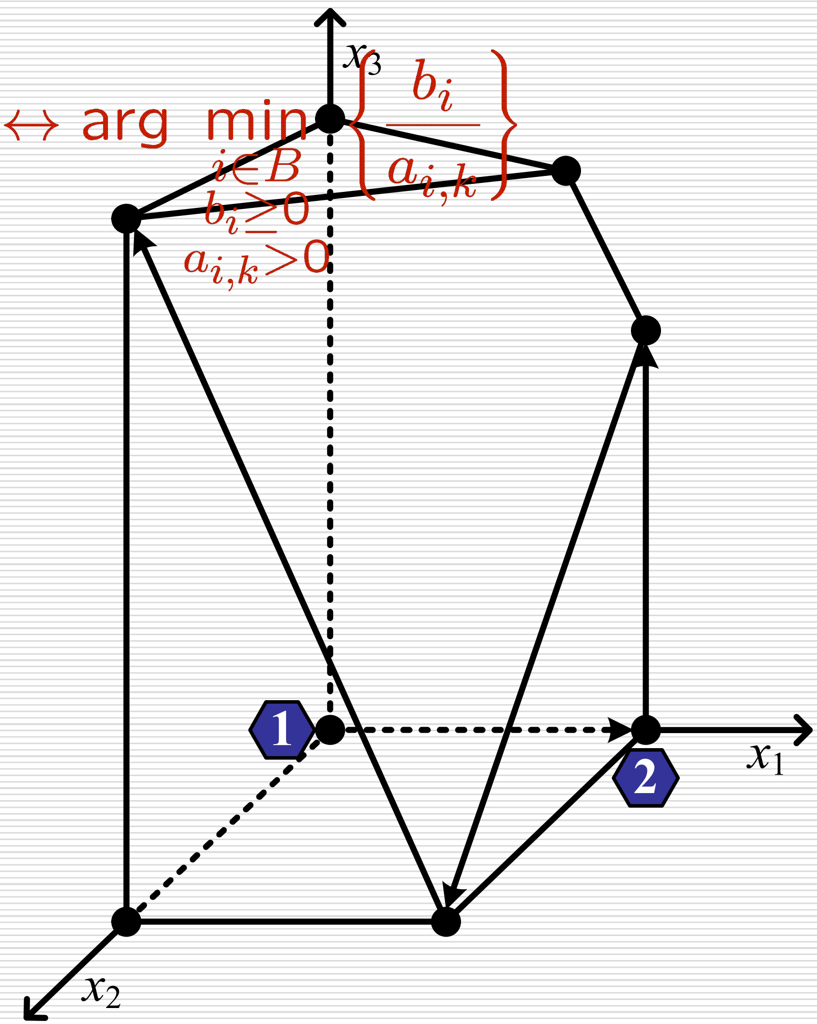
$$\begin{array}{llllllllll}
\min & & 2x_2 & & + x_4 & & & + 5x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & & & & = & 4 \\
 & x_1 & & & & + x_5 & & & = & 2 \\
 & & & x_3 & & & + x_6 & & = & 3 \\
 & & 3x_2 + & x_3 & & & & + x_7 & = & 6 \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \geq & 0
\end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	2	0	1	0	0	5
4	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-34	-1	-14	-6	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

Παράδειγμα

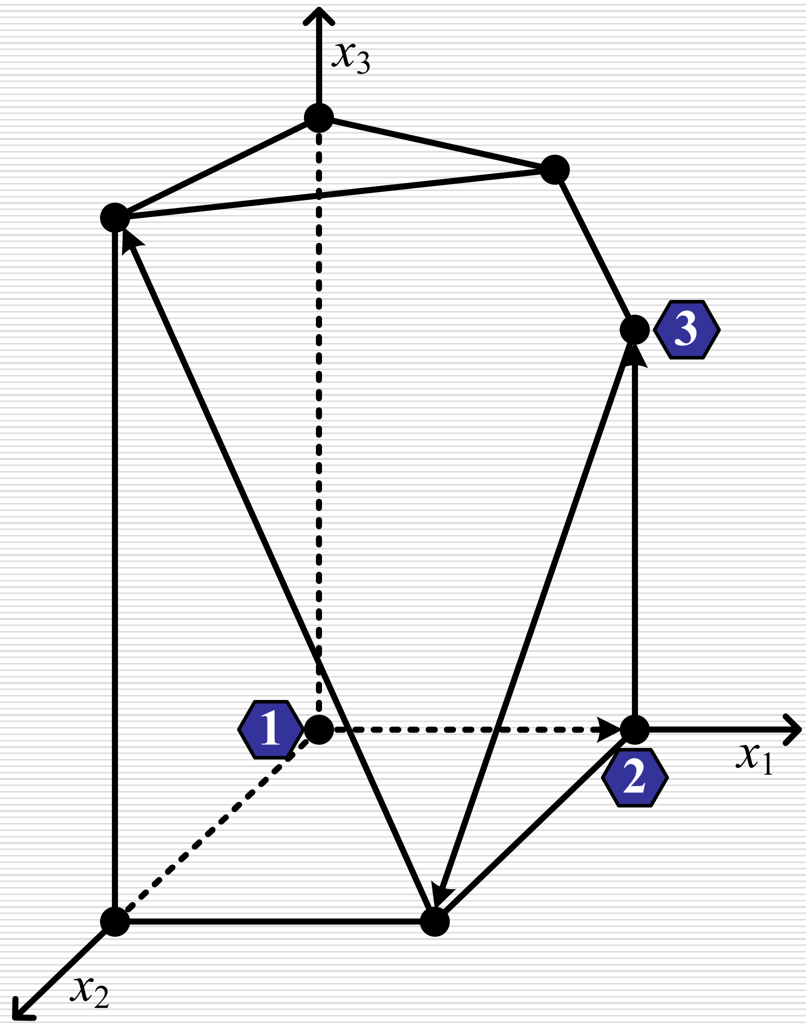
$$k \leftrightarrow \arg \min_{\substack{i \in B \\ b_i \geq 0 \\ a_{i,k} > 0}} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,k}} \right\}$$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-34	-1	-14	-6	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
2	**1**	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-32	0	-14	-6	0	1	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

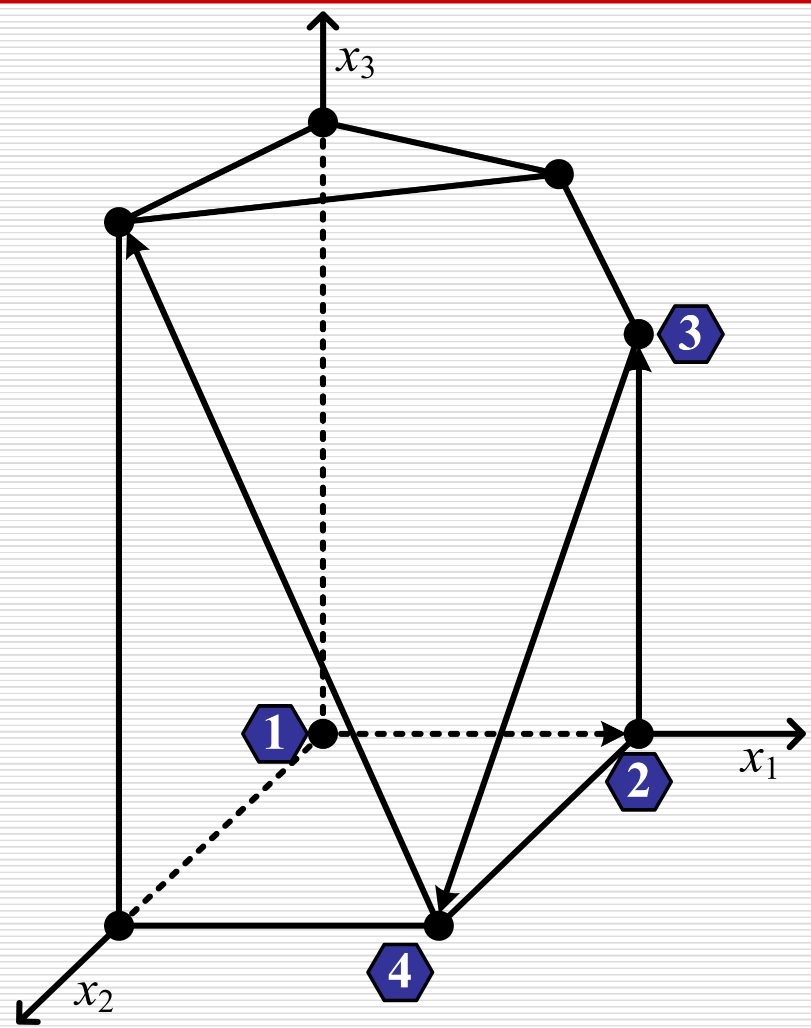
Παράδειγμα



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-32	0	-14	-6	0	1	0	0
2	0	1	**1**	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-20	0	-8	0	6	-5	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
1	0	-1	0	-1	1	1	0
4	0	2	0	-1	1	0	1

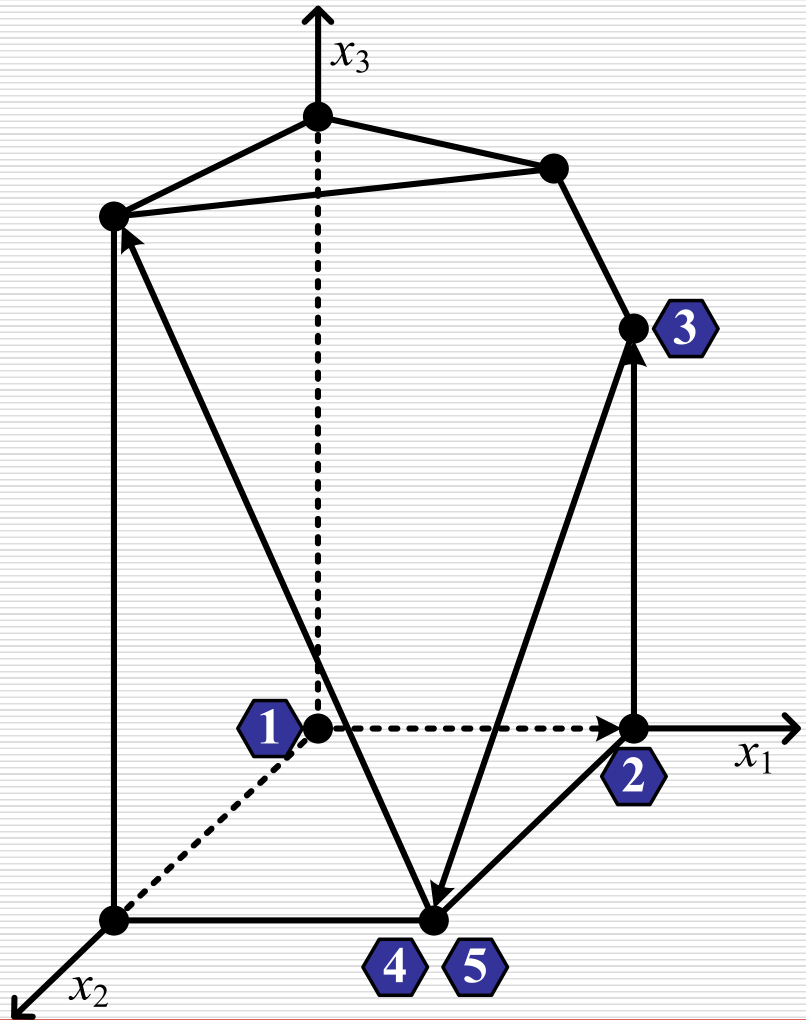
Παράδειγμα



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-20	0	-8	0	6	-5	0	0
2	0	**1**	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
1	0	-1	0	-1	1	1	0
4	0	2	0	-1	1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	8	14	-13	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2	-3	3	0	1

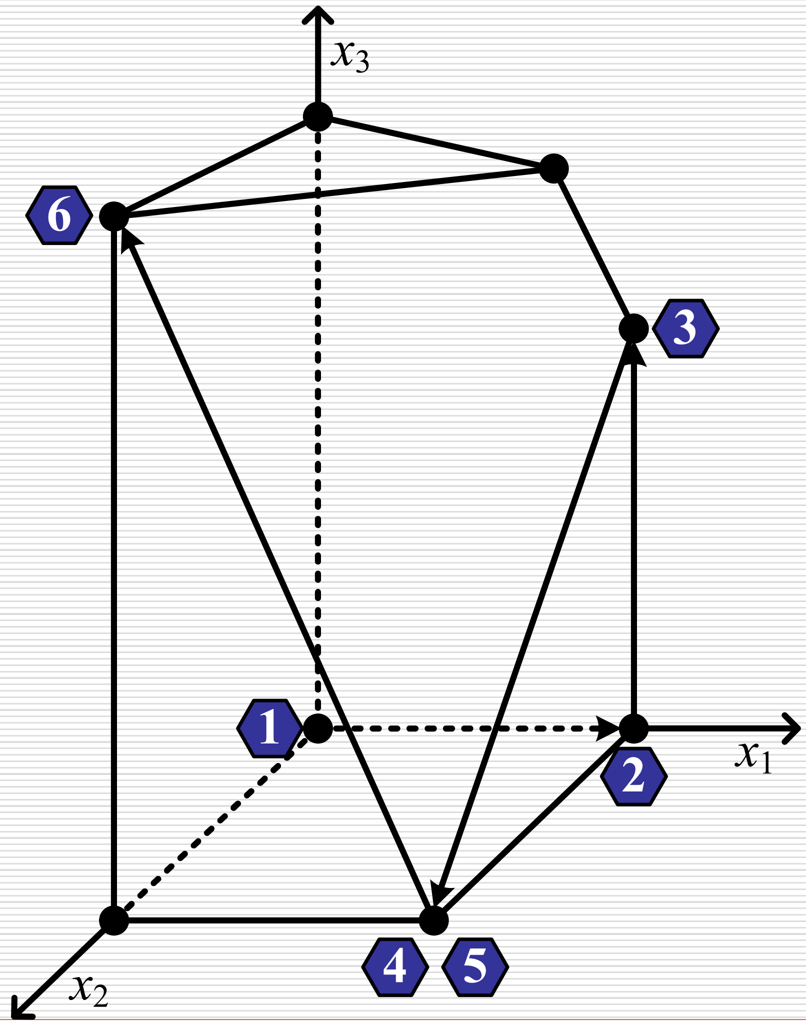
Παράδειγμα



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	8	14	-13	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2	-3	**3**	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	-2/3	1	0	0	13/3
2	0	1	1/3	0	0	0	1/3
2	1	0	2/3	1	0	0	-1/3
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2/3	-1	1	0	1/3

Παράδειγμα



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	-2/3	1	0	0	13/3
2	0	1	1/3	0	0	0	1/3
2	1	0	**2/3**	1	0	0	-1/3
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2/3	-1	1	0	1/3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-2	1	0	0	2	0	0	4
1	-1/2	1	0	-1/2	0	0	1/2
3	3/2	0	1	3/2	0	0	-1/2
0	-3/2	0	0	-3/2	0	1	1/2
2	1	0	0	0	1	0	0

Παράδειγμα

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{min} & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
 & x_1 + x_5 & = & 2 \\
 & x_3 + x_6 & = & 3 \\
 & 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$x^* = [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0]\,, \quad c^T x^* = 2$$

Παράδειγμα

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-4	0	0	-2	1	0	0	13/3
2	0	1	-1	0	0	0	1/3
2	1	0	-2	1	0	0	-1/3
3	0	0	-3	0	0	1	0
0	0	0	-1	-1	1	0	1/3

- **Μη-φραγμένο** : Το x_3 μεγαλώνει απεριόριστα (μικραίνοντας κόστος) και λύση εφικτή.

Χρόνος Εκτέλεσης Simplex

- Μετακίνηση σε κορυφές με μικρότερο κόστος : τερματισμός με βέλτιστη λύση (αν υπάρχει).
- Παραμονή σε ίδια κορυφή (ή ίδιο κόστος) : αέναη ανακύκλωση !
  - Κανόνες εναλλαγής στηλών (π.χ. [Bland 77]) εγγυώνται τερματισμό .
- Πολύ γρήγορος στην πράξη αλλά εκθετικός (#κορυφών) στη χειρότερη περίπτωση.
- Ανοικτό αν υπάρχει κανόνας εναλλαγής στηλών που οδηγεί σε πολυωνυμικό χρόνο .

Αλγόριθμοι Πολυωνυμικού Χρόνου

- Ελλειψοειδές [Khachian 79] :
  - Δυαδική αναζήτηση: Σταδιακός περιορισμός ενός ελλειψοειδούς που εγγυημένα περιέχει λύση.
  - Πρακτικά μη-εφαρμόσιμος (αργός, αριθμητική αστάθεια).
- Μέθοδοι Εσωτερικού Σημείου [Karmakar 84] :
  - Κίνηση στο εσωτερικό του πολυέδρου (κατάλληλους μετασχηματισμούς).
  - Πρακτικά εφαρμόσιμος, αλλά Simplex!
- Ταχύτερος αλγόριθμος [Ye 91] .