Σχέσεις Μερικής Διάταξης

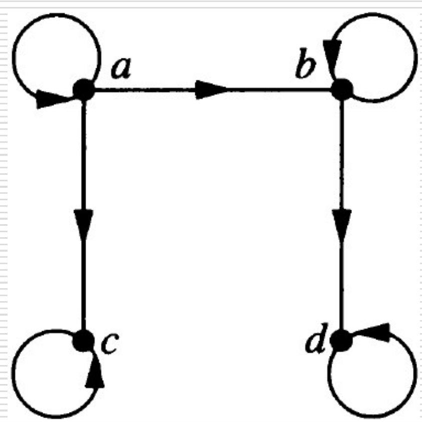
Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

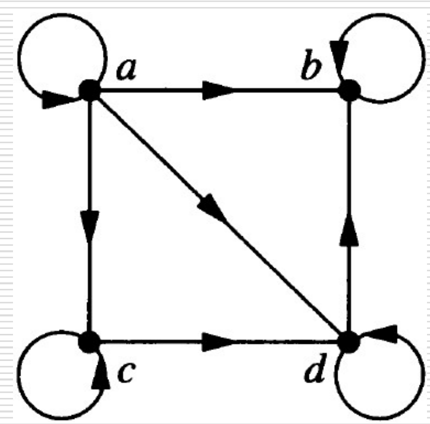
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχέση (Μερικής) Διάταξης

- Σχέση **Μερικής Διάταξης** (ή μερική διάταξη): ανακλαστική, αντισυμμετρική, και μεταβατική.
  - Αριθμοί: $\alpha \leq \beta$ (αλλά όχι $\alpha < \beta$), $\alpha \mid \beta$,
  - Σύνολα (σχέση στο P(S)): $A \subseteq B$.
- Ποιες από τις παρακάτω είναι σχέσεις (μερικής) διάταξης;





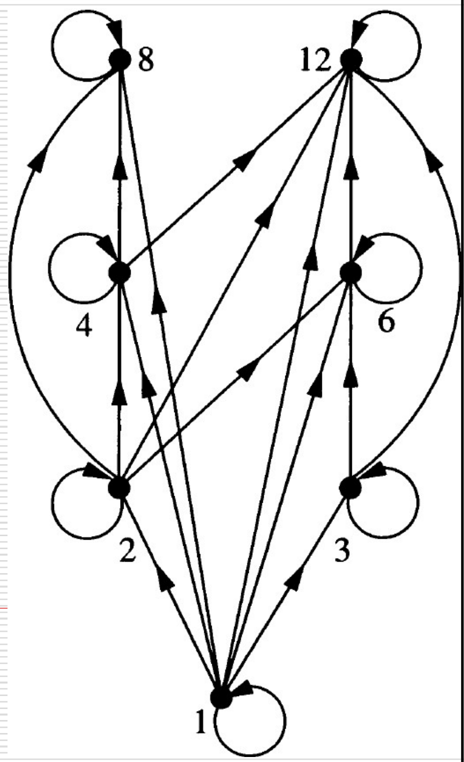
Διατεταγμένα Σύνολα

- Σχέση μερικής διάταξης: γράφουμε $α \le β$ (αντί $(α, β) \in R$).
- Σύνολο A με σχέση μερικής διάταξης $\le$:
  μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(A, \le)$ (ή poset).
  - $(N, \le)$, $(N^*, |)$, $(P(N), \subseteq)$, (Άνθρωποι, Πρόγονος).
- Αν $α \le β$ ή $β \le α$, α και β συγκρίσιμα. Διαφορετικά μη συγκρίσιμα.
  - $(N^*, |)$: 3 και 9 συγκρ., 5 και 7 όχι. $(P(N), \subseteq)$: {1} και {2} όχι.
- Poset $(A, \le)$ και όλα τα ζεύγη στοιχείων είναι συγκρίσιμα:
  ολικά διατεταγμένο σύνολο (ολική διάταξη ή **αλυσίδα**).
  - $(A, \le)$ και $B \subseteq A$ ώστε $(B, \le)$ ολικά διατεταγμένο: B **αλυσίδα** (του A).
  - **Πεπερασμένη** (μη κενή) αλυσίδα έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.
- $(A, \le)$ και $B \subseteq A$ ώστε στο $(B, \le)$ κανένα ζεύγος συγκρίσιμο:
  B **αντιαλυσίδα** (του A).

Ακυκλικά Γραφήματα

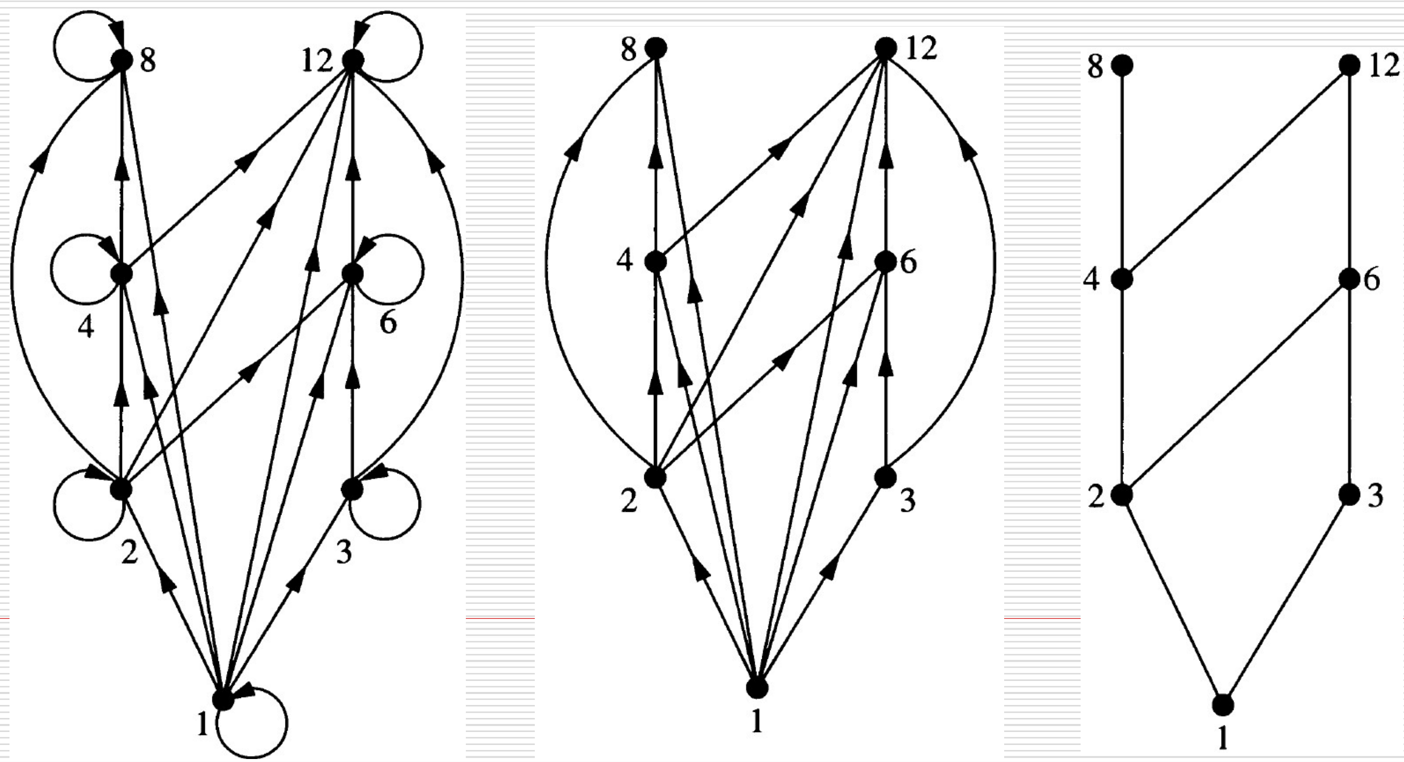
- Κατευθυνόμενο Ακυκλικό Γράφημα (ΚΑΓ, DAG) δεν έχει κύκλους, μπορεί να έχει ανακυκλώσεις.
  - Συχνά αναπαριστούν εξαρτήσεις δραστηριοτήτων, εργασιών.
- R σχέση που αντιστοιχεί σε ΚΑΓ. Η ανακλαστική μεταβατική κλειστότητα S της R είναι σχέση μερικής διάταξης.
  - Αν $α \neq β$, $(α, β), (β, α) \in S$, έχουμε κύκλο (στην R).
  - Άρα ΑΜΚ της R είναι **αντισυμμετρική**.
- Κάθε μερική διάταξη αντιστοιχεί σε ΚΑΓ.
  - Μεταβατική ιδιότητα: κύκλος ανν όχι αντισυμμετρική.
- Μορφή ΚΑΓ για σχέσεις ολικής διάταξης;
- Αλυσίδες αντιστοιχούν σε μονοπάτια ΚΑΓ. Αντιαλυσίδες σε ανεξάρτητα σύνολα ΚΑΓ.

$(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$

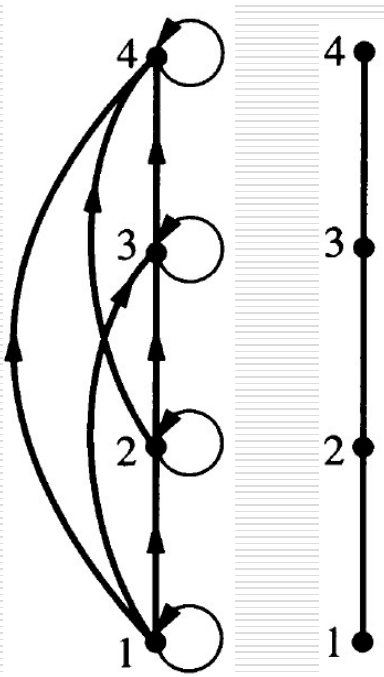


Διαγράμματα Hasse

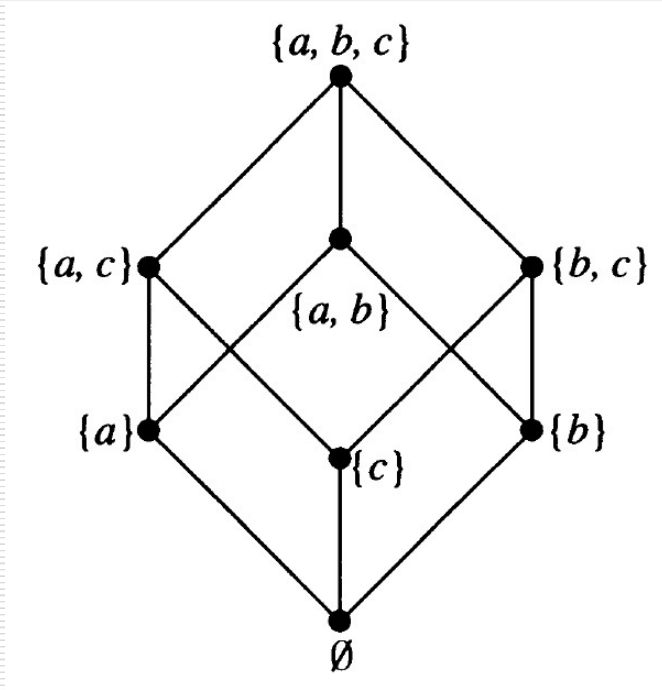
- Απέριττοι γράφοι για αναπαράσταση μερικών διατάξεων.
  - Ξεκινάμε από ΚΑΓ και αφαιρούμε ανακυκλώσεις (εννούνται).
  - Αφαιρούμε «μεταβατικές» ακμές (μόνο «βασικές» ακμές):
    - Για κάθε α – γ διαδρομή μήκους ≥ 2, αφαιρούμε ακμή (α, γ).
  - Για κάθε ακμή (α, β), β πάνω από α και αφαιρούμε φορά (βέλος).



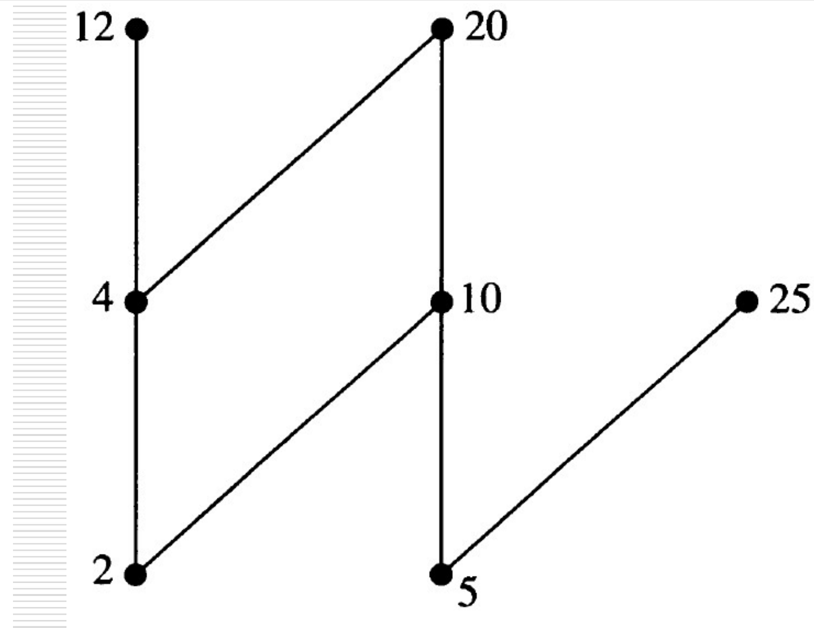
Διαγράμματα Hasse



$(\{1,2,3,4\}, \leq)$



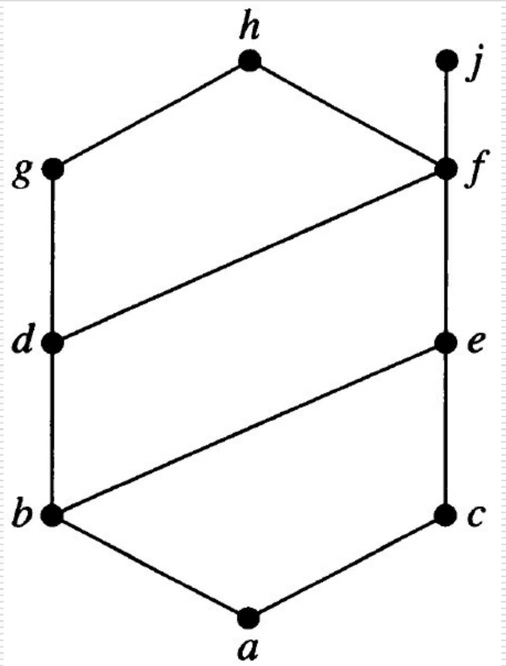
$(\mathcal{P}\{a,b,c\}, \subseteq)$



$(\{2,4,5,10,12,20,25\}, |)$

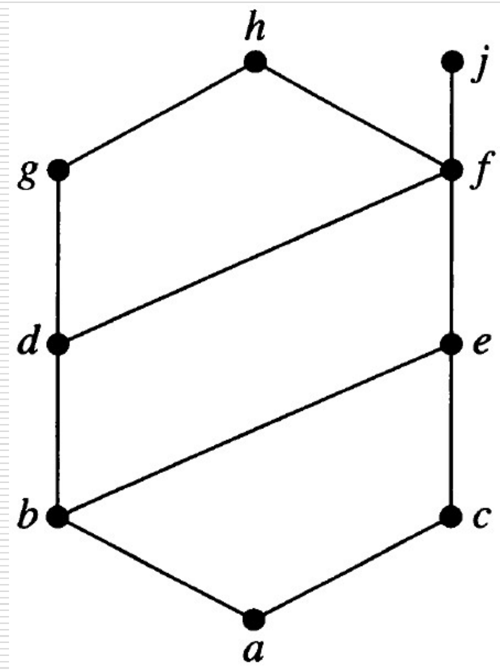
Μέγιστα και Ελάχιστα Στοιχεία

- α maximal στοιχείο (A, ≤) αν δεν υπάρχει β ≠ α με α ≤ β.
- α minimal στοιχείο (A, ≤) αν δεν υπάρχει β ≠ α με β ≤ α.
  - ({1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}, |): maximal 8 και 12, minimal 1.
  - ({2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, |): maximal 12, 20, 25, minimal 2, 5.
  - (P({a, b, c}), ⊆): maximal {a, b, c} και minimal ∅.
- α μέγιστο στοιχείο (A, ≤),
  αν μοναδικό maximal, ∀β(β ≤ α).
- α ελάχιστο στοιχείο (A, ≤),
  αν μοναδικό minimal, ∀β(α ≤ β).



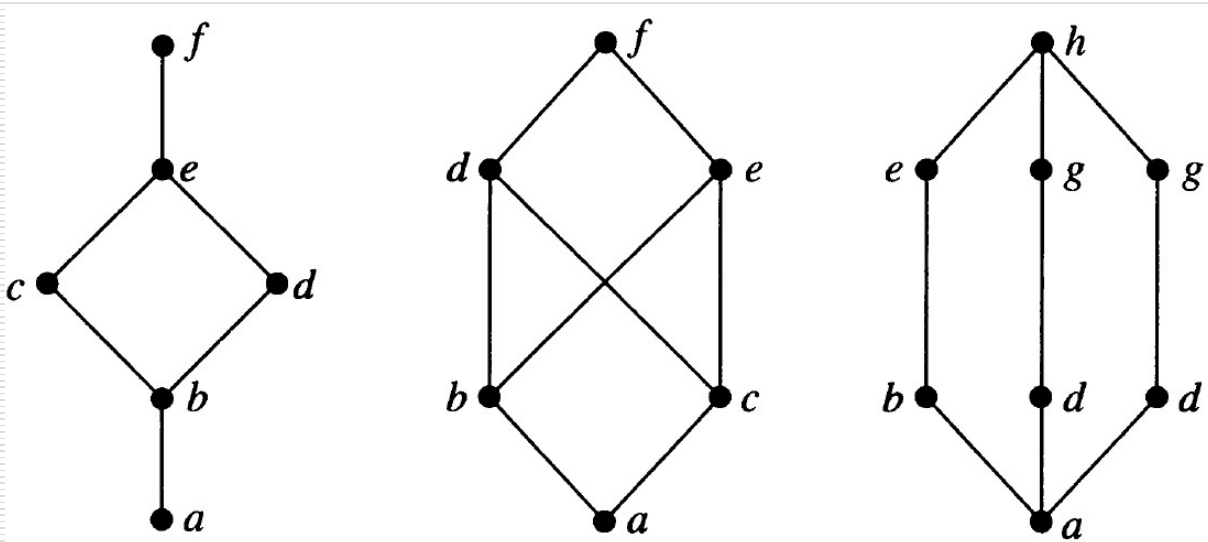
Άνω και Κάτω Φράγμα

- α άνω φράγμα στοιχείων $B \subseteq A$, αν για κάθε $\beta \in B$, $\beta \leq \alpha$.
- α κάτω φράγμα στοιχείων $B \subseteq A$, αν για κάθε $\beta \in B$, $\alpha \leq \beta$.
  - Άνω για {a, b, c}: e, f, j, h. Κάτω: a.
  - Άνω για {j, h}: όχι. Κάτω: f, d, e, b, c, a.
- α ελάχιστο άνω φράγμα $B \subseteq A$ (sup): α άνω φράγμα B και για κάθε β άνω φράγμα B, $\alpha \leq \beta$.
- α μέγιστο κάτω φράγμα $B \subseteq A$ (inf): α κάτω φράγμα B και για κάθε β κάτω φράγμα B, $\beta \leq \alpha$.
- Αν υπάρχουν, είναι μοναδικά.
  - Ελάχιστο άνω φράγμα α, β στο $(N^*, |)$: ΕΚΠ(α, β).
  - Μέγιστο κάτω φράγμα α, β στο $(N^*, |)$: ΜΚΔ(α, β).
  - Ελάχιστο άνω φράγμα A, B στο $(P(S), \subseteq)$: $A \cup B$.
  - Μέγιστο κάτω φράγμα A, B στο $P(S), \subseteq)$: $A \cap B$.



Δικτυωτά (Lattices)

- (A, ≤) είναι **δικτυωτό** (lattice) αν κάθε ζεύγος στοιχείων έχει ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα.
  - Ποια από τα παρακάτω είναι δικτυωτά;
  - Είναι δικτυωτά τα $(N^*, |)$, $(P(S), \subseteq)$;
  - Είναι δικτυωτό το $(\{1, 2, \ldots, k\}, |)$;



Ερώτηση

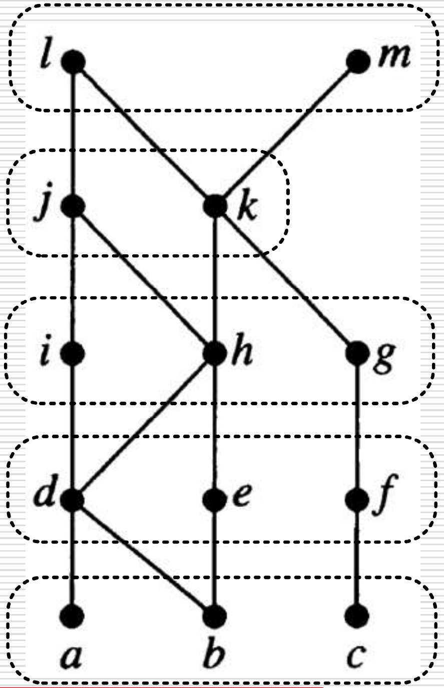
- Τι δηλώνουν οι παρακάτω προτάσεις;
  - Αληθεύουν σε πεπερασμένο σύμπαν;
  - Αληθεύουν σε άπειρο σύμπαν;

$$\begin{array}{l} \forall x R(x,x) \wedge \\ \forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y) \wedge \\ \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(y,x)) \wedge \\ \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(x,y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \forall x R(x,x) \wedge \\ \forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y) \wedge \\ \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \wedge \\ \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x)) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \exists x \forall y R(x,y) \wedge \\ \exists x \forall y R(y,x) \end{array}$$

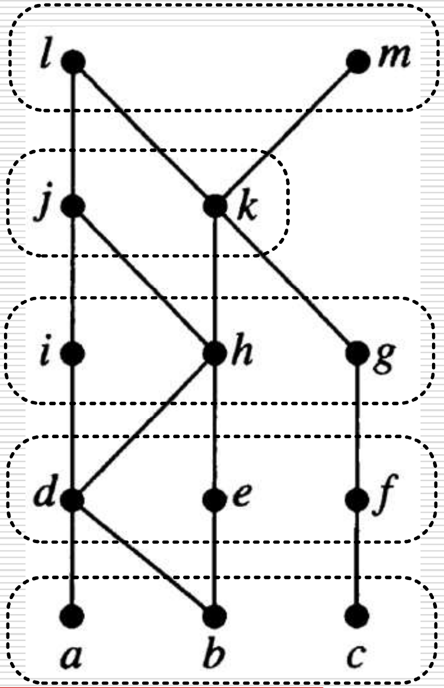
Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες

- Α σύνολο μαθημάτων, (α, β) $\in$ R ανν α προαπαιτούμενο β.
  - Αντισυμμετρική και μεταβατική: σχέση προτεραιότητας.
  - Ανακλαστική κλειστότητα R: σχέση (μερικής) διάταξης.
- Μήκος μεγαλύτερης αλυσίδας: ελάχιστος #εξαμήνων για πτυχίο.
- Μέγεθος μεγαλύτερης αντιαλυσίδας: μέγιστος #μαθημάτων στο ίδιο εξάμηνο.
- Αν μακρύτερη αλυσίδα στο (Α, ≤) έχει μήκος k ≥ 1, στοιχεία Α διαμερίζονται σε k αντιαλυσίδες.
- Αν μεγαλύτερη αντιαλυσίδα στο (Α, ≤) έχει μέγεθος k ≥ 1, στοιχεία Α διαμερίζονται σε k αλυσίδες.



Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες

- Αν μακρύτερη αλυσίδα στο (A, ≤) έχει μήκος k ≥ 1, στοιχεία A διαμερίζονται σε k αντιαλυσίδες.
  - Απόδειξη με επαγωγή.
  - Βάση k = 1: Αν μακρύτερη αλυσίδα έχει 1 στοιχείο, όλα τα στοιχεία αποτελούν 1 αντιαλυσίδα.
  - Επαγωγική υπόθεση: σε κάθε (A, ≤) με μακρύτερη αλυσίδα μήκους k, διαμέριση A σε k αντιαλυσίδες.
  - Επαγωγικό βήμα:
    - (A, ≤) με μακρύτερη αλυσίδα μήκους k+1.
    - M σύνολο maximal στοιχείων: Αντιαλυσίδα με 1 στοιχείο (τελευταίο) σε κάθε αλυσίδα.
    - (A – M, ≤) έχει μακρύτερη αλυσίδα μήκους k.
    - Διαμέριση A – M σε k αντιαλυσίδες.
    - Διαμέριση A σε k+1 αντιαλυσίδες.



Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες

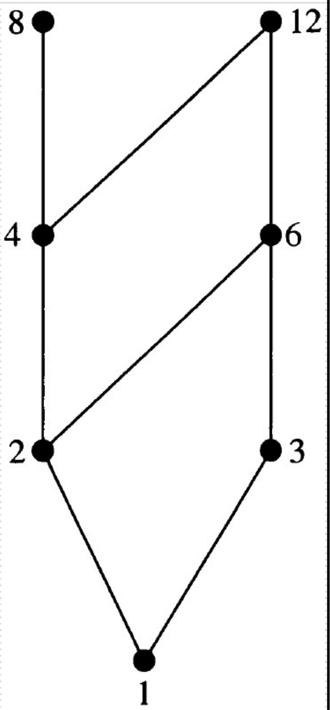
- Αν μακρύτερη αλυσίδα στο (A, ≤) έχει μήκος $k \geq 1$, στοιχεία A διαμερίζονται σε k αντιαλυσίδες.
  - Αν $|A| \geq nm+1$, τότε είτε αλυσίδα μήκους $\geq n+1$ είτε αντιαλυσίδα μεγέθους $\geq m+1$.
- Σε σύνολο nm+1 ανθρώπων, είτε αλυσίδα απογόνων μήκους m+1 είτε n+1 άνθρωποι χωρίς σχέση προγόνου-απογόνου.
  - Αν όλες αλυσίδες μήκους $\leq m$, διαμέριση σε $\leq m$ αντιαλυσίδες. Αν όλες αντιαλυσίδες μεγέθους $\leq n$, #ανθρώπων $\leq nm$.
- Σύνολο S με n^2+1 διαφορετικούς θετικούς φυσικούς:
  - Για κάθε $A \subseteq S$, $|A| = n+1$, υπάρχουν $x, y \in A$, $x \neq y$, με $x \mid y$.
  - Νδο υπάρχει $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\} \subseteq S$ όπου $x_i \mid x_{i+1}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
- Πρέπει νδο στο poset $(S, \mid)$, υπάρχει αλυσίδα μήκους $\geq n+1$.
  - Μεγαλύτερη αντιαλυσίδα έχει μέγεθος $\leq n$.
  - Άρα υπάρχει αλυσίδα μήκους $\geq n+1$.

Παράδειγμα

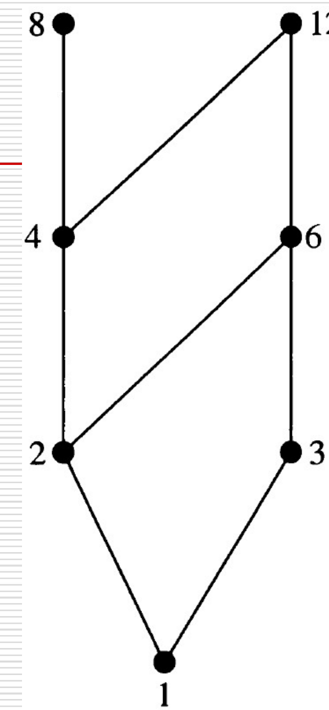
- Σε κάθε ακολουθία n^2+1 διαφορετικών αριθμών, είτε αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε φθίνουσα υπακολ. μήκους $n+1$.
  - Υπακολουθία προκύπτει με διαγραφή κάποιων αριθμών.
  - **0,** 8, **4,** **12,** 2, **10,** **6,** 14, 1, **9,** **5,** 13, **3,** **11,** 7, **15,** **16**
- Αύξουσα υπακολουθία αντιστοιχεί σε αλυσίδα και φθίνουσα υπακολουθία σε αντιαλυσίδα, για μερική διάταξη $\leq$ που λαμβάνει υπόψη σειρά εμφάνισης στην ακολουθία.
  - Θεωρούμε σχέση διάταξης σε ζεύγη (θέση εμφάνισης , τιμή): $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (k, a_k)$ (για $k = n^2+1$)
  - Για κάθε (i, a_i) και (j, a_j), με $i < j$: $(i, a_i) \leq (j, a_j)$ ανν $a_i < a_j$.
  - Αύξουσα υπακολουθία αντιστοιχεί σε αλυσίδα.
  - Φθίνουσα υπακολουθία αντιστοιχεί σε αντιαλυσίδα.

Τοπολογική Διάταξη

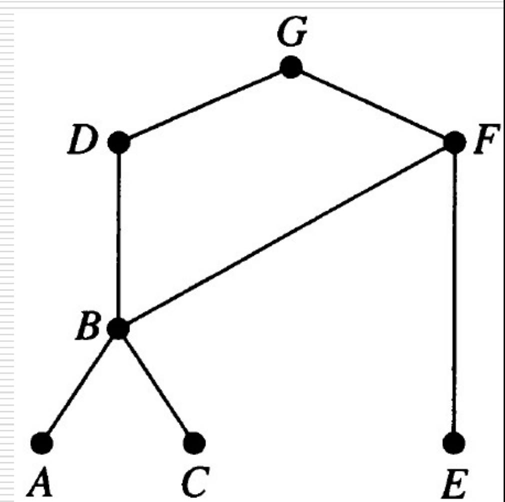
- Ολική διάταξη $(a_1, a_2, ..., a_n)$ συμβατή με μερική διάταξη $(A, \leq)$.
  - Συμβατότητα: Για κάθε $i < j$, είτε $a_i \leq a_j$ είτε a_i, a_j μη συγκρίσιμα.
  - Γραμμική διάταξη κορυφών ΚΑΓ ώστε ακμές (εκτός ανακυκλώσεων) κατευθύνονται από αριστερά προς δεξιά.
- $(A, \leq)$, A πεπερασμένο, επιδέχεται τοπολογικής διάταξης.
  - Γράφος είναι ΚΑΓ ανν επιδέχεται τοπολογικής διάταξης.
- $(A, \leq)$, A πεπερασμένο, έχει ≥ 1 minimal στοιχείο.
  - Ξεκινάμε επιλέγοντας οποιοδήποτε στοιχείο.
  - Ακολουθούμε «ακμές» στην αντίθετη φορά.
  - Όχι κύκλοι και πεπερασμένο: τερματίζουμε σε minimal.



Τοπολογική Διάταξη



- Υπολογισμός τοπολογικής διάταξης:
  - a_1: minimal $(A, \leq)$.
  - a_2: minimal $(A - \{a_1\}, \leq)$.
  - a_3: minimal $(A - \{a_1, a_2\}, \leq)$.
  - ...
  - 1, 3, 2, 6, 4, 12, 8
  - A, C, E, B, D, G
- Αναζήτηση κατά Βάθος (DFS) στο ΚΑΓ
  ή στο διάγραμμα Hasse (με φορά ακμών).
  - Κορυφές σε αντίστροφη σειρά «αποχώρησης».
  - Ολοκλήρωση εξερεύνησης κορυφής και γειτόνων: εισαγωγή κορυφής σε στοίβα.
  - Ολοκλήρωση DFS και εξαγωγή από στοίβα: τοπολογική διάταξη.

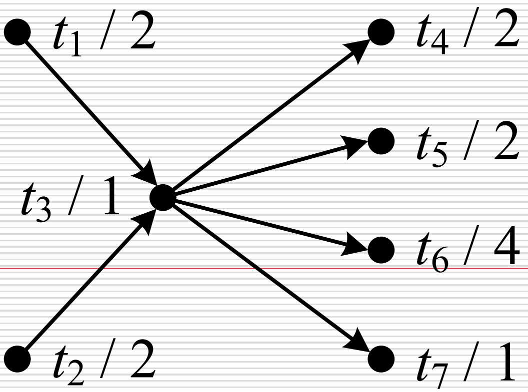


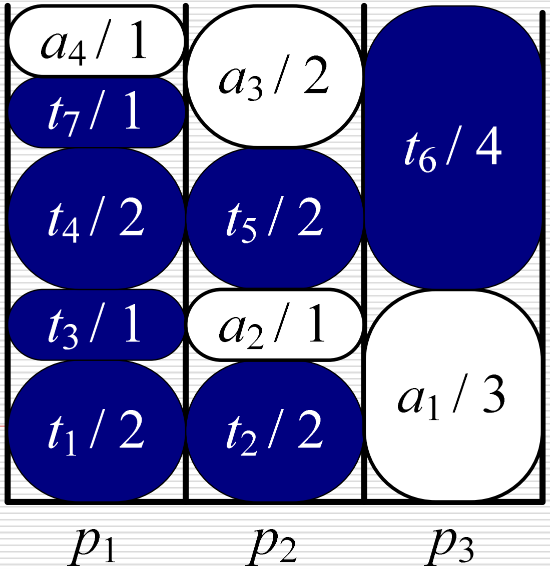
Λεξικογραφική Διάταξη

- Posets $(A_1, \leq_1)$ και $(A_2, \leq_2)$.
- Λεξικογραφική διάταξη $\leq$ στο $A_1 \times A_2$:
  - $(\alpha_1, \alpha_2) < (\beta_1, \beta_2)$ αν είτε $\alpha_1 <_1 \beta_1$ είτε $\alpha_1 = \beta_1$ και $\alpha_2 <_2 \beta_2$.
  - $(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2)$ αν $\alpha_1 = \beta_1$ και $\alpha_2 = \beta_2$.
  - $(N \times N, \leq)$: $(2, 4) \leq (2, 5) \leq (3, 2) \leq (5, 1) \leq (5, 100) \leq (6, 0)$.
- Λεξικογραφική διάταξη $\leq$ στο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$:
  - $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) < (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ αν για κάποιο $k \geq 0$, $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$ και $\alpha_{k+1} <_{k+1} \beta_{k+1}$.
  - $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ αν $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.
- Λεξικογραφική διάταξη συμβολοσειρών με βάση (ολική) διάταξη γραμμάτων του αλφαβήτου.
  - Το «κενό» προηγείται κάθε συμβόλου, τόνοι αγνοούνται. Π.χ. μαντείο < μάντης < μηλιά < μήλο < το < τόπι.

Χρονοπρογραμματισμός Εργασιών

- m ίδιους επεξεργαστές $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$.
- n εργασίες $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ με χρόνους εκτέλεσης $w_1, w_2, \ldots, w_n$.
- Μερική διάταξη επί των εργασιών:
  - $t_j \leq t_i$ ανν t_i δεν μπορεί να αρχίσει πριν ολοκληρωθεί η t_j.
- Χρονοδιάγραμμα εκτέλεσης εργασιών:
  - Για κάθε εργασία t_i χρόνος έναρξης $s(i)$ και επεξεργαστής $\pi(i)$.
    - Εργασίες δεν διακόπτονται: εκκίνηση $s(i)$, τερματισμός $s(i)+w_i$
  - Κάθε χρονική στιγμή, το πολύ μία εργασία σε κάθε επεξεργαστή: $\pi(i) = \pi(j) \Rightarrow [s(i), s(i)+w_i) \cap [s(j), s(j)+w_j) = \varnothing$
  - Για κάθε t_j με $t_j \leq t_i$, $s(j)+w_j \leq s(i)$.

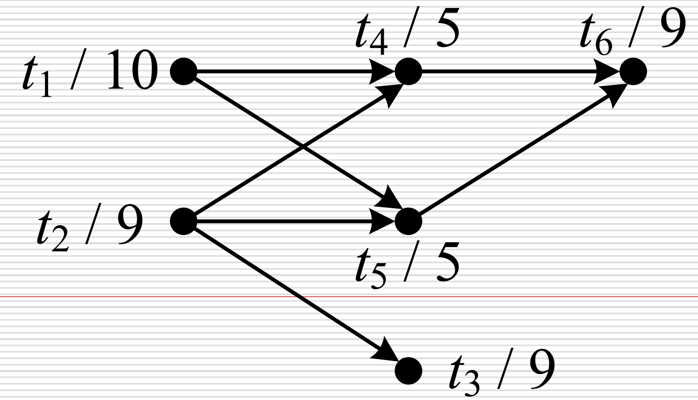




Χρονοπρογραμματισμός Εργασιών

- Χρονοδιάγραμμα με ελάχιστο χρόνο διεκπεραίωσης.
  - Ελαχιστοποίηση χρόνου ολοκλήρωσης τελευταίας εργασίας.
  - Τοπολογική διάταξη αν μόνο ένας επεξεργαστής.
  - NP-δύσκολο για $m \geq 2$.
- Βέλτιστος χρόνος διεκπεραίωσης τουλάχιστον:
  - $(w_1 + \ldots + w_n) / m$.
  - Συνολικός χρόνος κατά μήκος μακρύτερης (χρονικά) αλυσίδας.
- Ποτέ επεξεργαστής αδρανής εσκεμμένα.
  - Δεν εγγυάται βέλτιστη λύση.
  - Εγγυάται χρόνο διεκπεραίωσης $\leq \left(2 - \frac{1}{m}\right) \times$ ελάχιστο χρ. διεκπ.

$m = 2$



Χρονοπρογραμματισμός Εργασιών

- Ανάλυση για m = 2, χρ.διεκπ. = ω, βέλτιστος χρ.διεκπ. = ω*

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{\alpha_i \in A} \text{χρόνος}(\alpha_i)\right) \le \omega^* + \frac{1}{2}\sum_{\alpha_i \in A} \text{χρόνος}(\alpha_i)$$

- Υπάρχει αλυσίδα εργασιών με χρονική διάρκεια ≥ συνολική διάρκεια περιόδων αδράνειας.
  - Περίοδος αδράνειας α_i «προκαλείται» από αλυσίδα εργασιών που εκτελείται στον άλλο επεξεργαστή.
  - Αλυσίδα εργασιών που «προκαλεί» α_i έχει διάρκεια ≥ χρόνος(α_i).
  - Ένωση αλυσίδων που «προκαλούν» περιόδους αδράνειας δίνει αλυσίδα με διάρκεια ≥ συνολική διάρκεια περιόδων αδράνειας.

$$\omega \le \omega^* + \frac{1}{2}\sum_{\alpha_i \in A} \text{χρόνος}(\alpha_i) \le \frac{3}{2}\omega^*$$