Μετασχηματισμοί, Αναπαράσταση και Ισομορφισμός Γραφημάτων

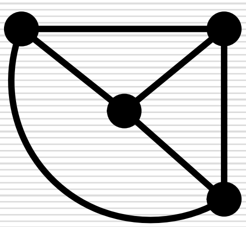
Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

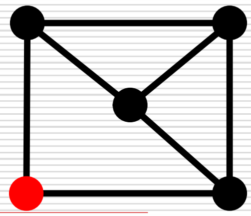
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τοπικοί Μετασχηματισμοί

- Δεδομένου γραφήματος G(V, E):
  - Διαγραφή / προσθήκη ακμής e: G−e και G+e
  - Διαγραφή κορυφής v: G−v
    - Αφαιρούμε v και όλες τις ακμές που προσπίπτουν στη v.
  - Υποδιαίρεση ακμής {u, v}: νέα κορυφή w «παρεμβάλλεται» στην {u, v} και έχουμε {u, w}, {w, v} αντί της {u, v}.
  - Απλοποίηση σειράς (κορυφής w βαθμού 2): ακμές {u, w}, {w, v} αντικαθίστανται από {u, v}.

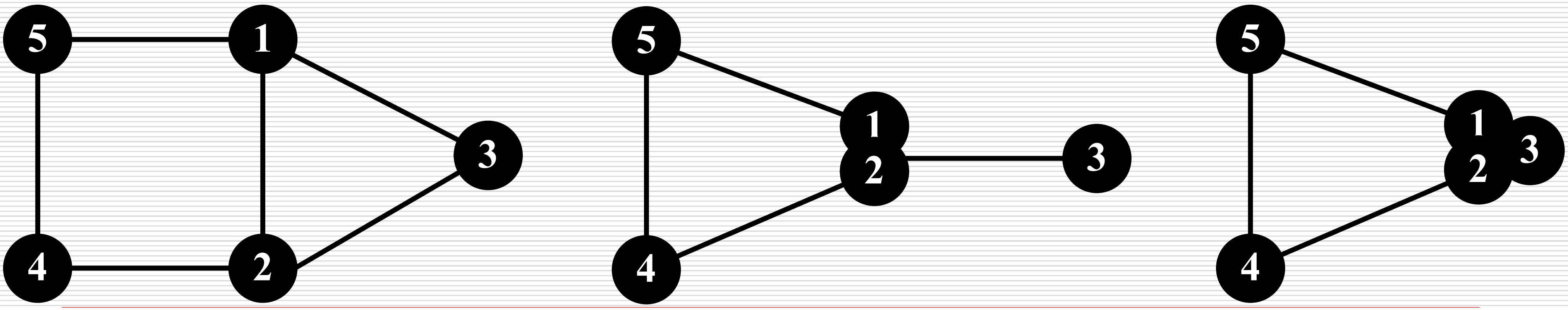


  - k-οστή δύναμη του G: G^k
    - Ίδιο σύνολο κορυφών V.
    - Κορυφές u και v ενώνονται με ακμή στο G^k ανν συνδέονται με μονοπάτι μήκους ≤ k στο G.



Σύμπτυξη Ακμής

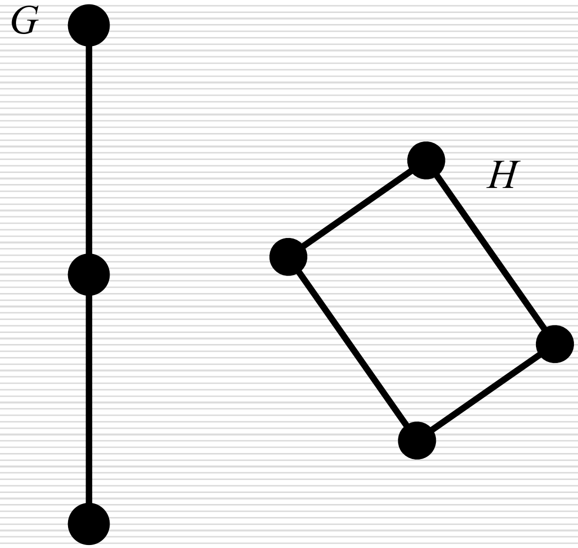
- Σύμπτυξη (contraction) ακμής {u, v}:
  - Αντικατάσταση u, v από μία νέα κορυφή uv.
  - Κάθε ακμή {x, u} / {x, v} αντικαθίσταται από ακμή {x, uv}.
  - Ακμή {u, v} και πιθανές παράλληλες ακμές παραλείπονται (εκτός αν θεωρούμε πολυγραφήματα).

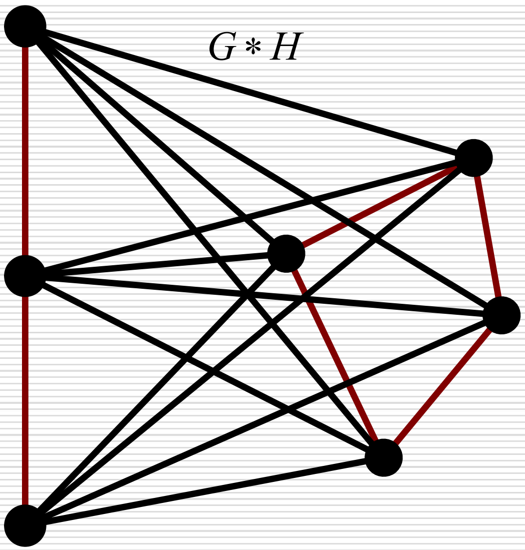


Σύνδεση Γραφημάτων

- Σύνδεση (join) G*H δύο γραφημάτων G και H:
  - Διατηρούμε τα γραφήματα G και H ως έχουν.
  - Συνδέουμε όλες τις κορυφές του G με όλες τις κορυφές του H.

$$G*H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{\{u,v\} : u \in V(G), v \in V(H)\})$$



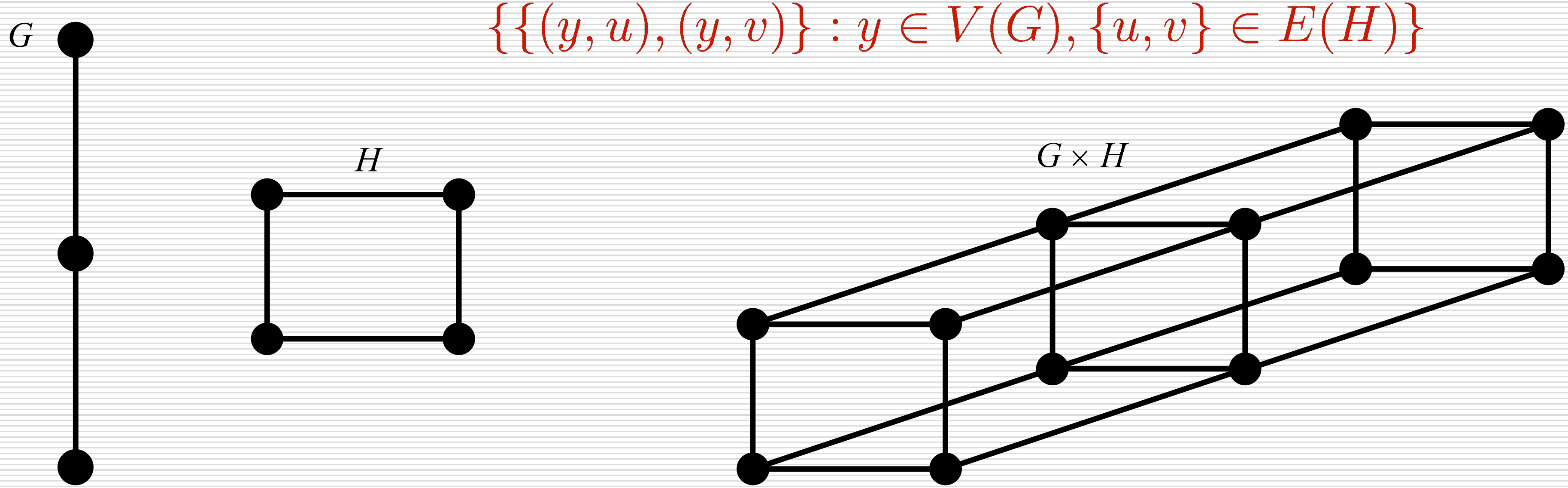


Γινόμενο Γραφημάτων

- (Καρτεσιανό) γινόμενο (product) G × H γραφημάτων G και H:
  - Γράφημα με V(G) × V(H) κορυφές που περιέχει ένα αντίγραφο του H για κάθε κορυφή του G και ένα αντίγραφο του G για κάθε κορυφή του H.

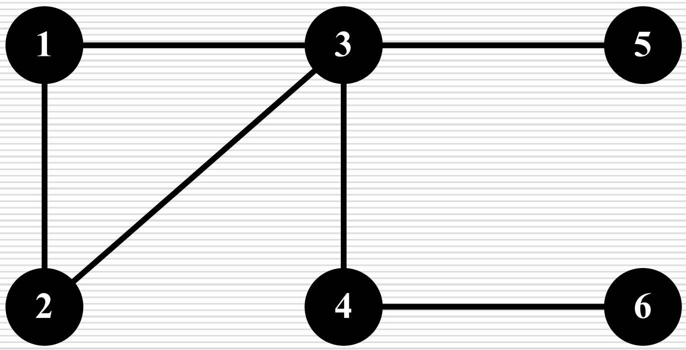
$$V(G \times H) = \{(u,v) : u \in V(G), v \in V(H)\}$$

$$\begin{aligned} E(G \times H) = \{&\{(u,x),(v,x)\} : \{u,v\} \in E(G), x \in V(H)\} \cup \\ &\{\{(y,u),(y,v)\} : y \in V(G), \{u,v\} \in E(H)\} \end{aligned}$$



Αναπαράσταση Γραφημάτων

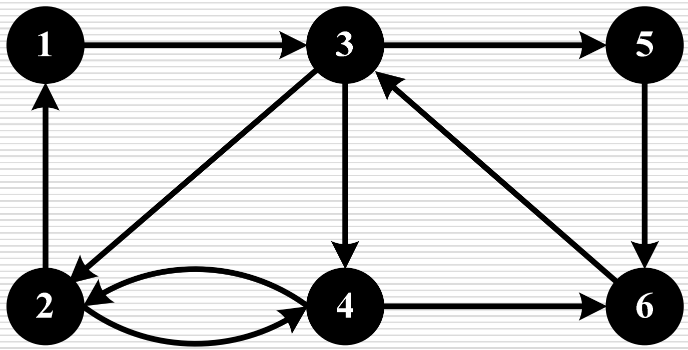
- … με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i,j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
  - Αν έχουμε βάρη, $A[i,j] = w(v_i, v_j)$
  - (Απλό) μη κατευθυνόμενο: συμμετρικός, διαγώνιος 0.
  - Άθροισμα στοιχείων γραμμής (στήλης): βαθμός κορυφής.



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Αναπαράσταση Γραφημάτων

- … με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i,j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
  - Αν έχουμε βάρη, $A[i,j] = w(v_i, v_j)$
  - Άθροισμα στοιχείων γραμμής / στήλης σε κατευθυνόμενο: έξω-βαθμός / έσω-βαθμός κορυφής.



	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	1	0	0	0

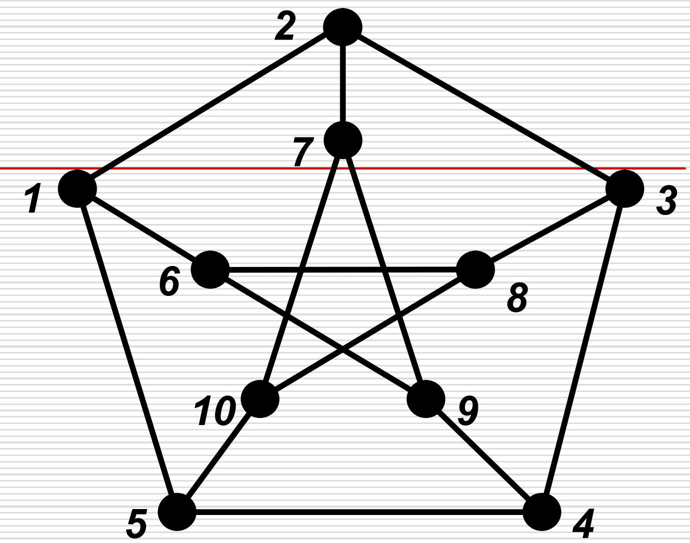
Πίνακας Γειτνίασης

- $A^k[u_i, u_j]$ = #διαδρομών $u_i - u_j$ μήκους k (απλά γραφήματα).
  - Απόδειξη με επαγωγή και πολλαπλασιασμό πινάκων.
  - Διαγώνιος τετραγώνου (μη κατευθυνόμενα): $A^2[u_i, u_i]$ = βαθμός(u_i).
  - $A^3[u_i, u_i] = 2 \times$ #τριγώνων που συμμετέχει u_i.
  - Πλήθος τριγώνων = $\sum_{i=1}^{n} A^3[u_i, u_i]/6$
- $Y[u_i, u_j]$ = #διαδρομών $u_i - u_j$ μήκους $\leq n - 1$.

$$Y = \sum_{k=1}^{n-1} A^k$$

  - Μονοπάτια έχουν μήκος $\leq n - 1$, και διαδρομή ανν μονοπάτι.
  - Γράφημα συνεκτικό ανν όλα τα στοιχεία του Y θετικά (> 0).
- Μήκος ελάχιστου (#ακμών) $u_i - u_j$ μονοπατιού:
  - Ελάχιστη τιμή k ώστε $A^k[u_i, u_j] > 0$.

Πίνακας Πρόσπτωσης

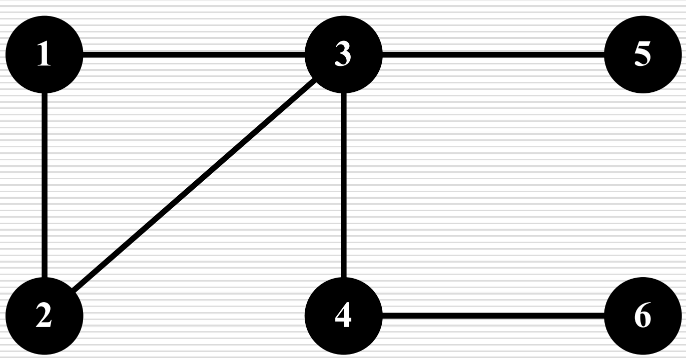


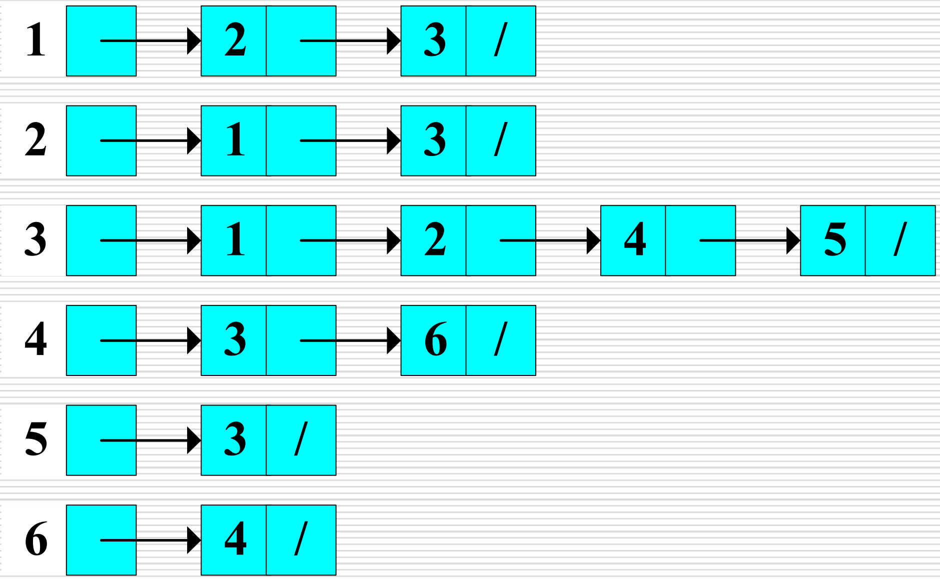
$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in e_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

	1,2	1,5	1,6	2,3	2,7	3,4	3,8	4,5	4,9	5, 10	6,8	6,9	7,9	7, 10	8, 10
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

Αναπαράσταση Γραφημάτων

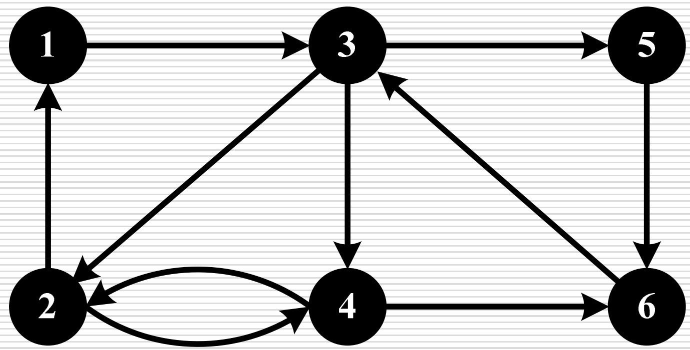
- Στον υπολογιστή: με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.
  - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.

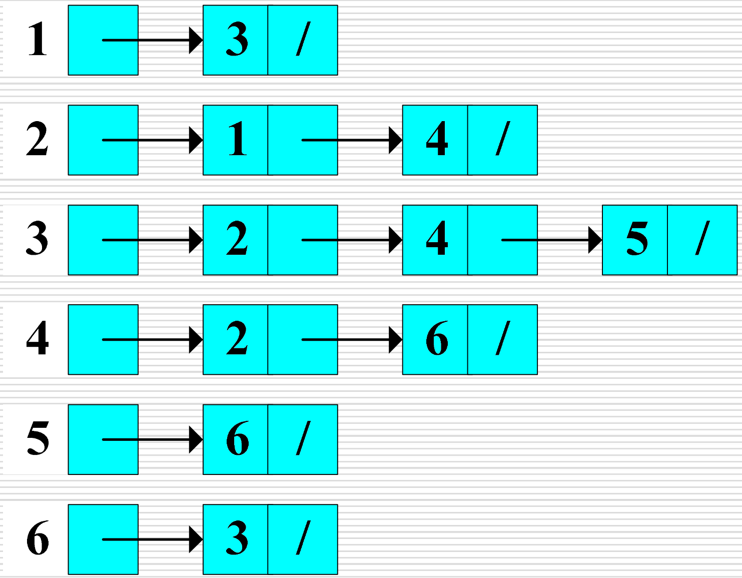




Αναπαράσταση Γραφημάτων

- Στον υπολογιστή: με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.
  - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.
  - Αλγόριθμοι συνήθως λειτουργούν κατά γειτονιές.
  - Οικονομία χώρου.

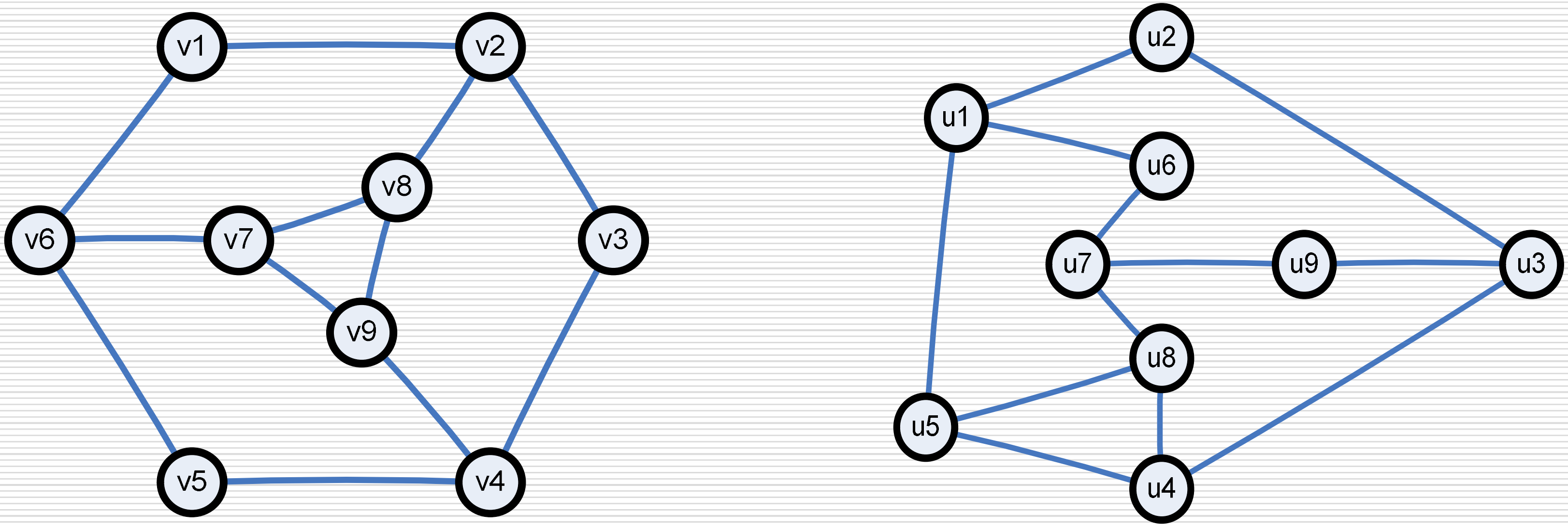




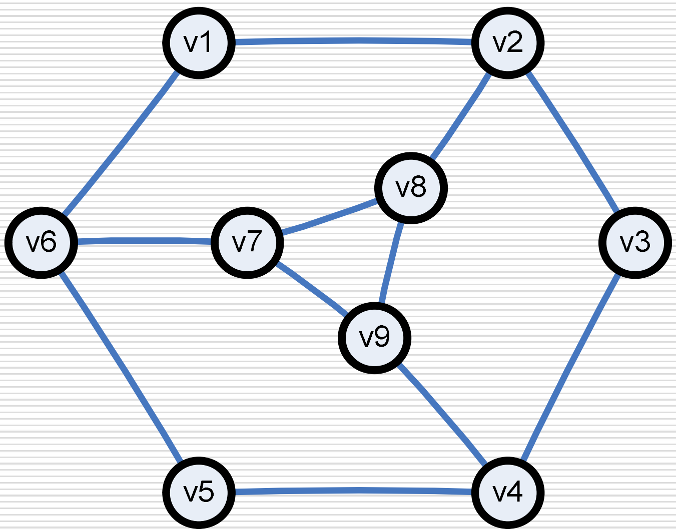
Ισομορφικά Γραφήματα

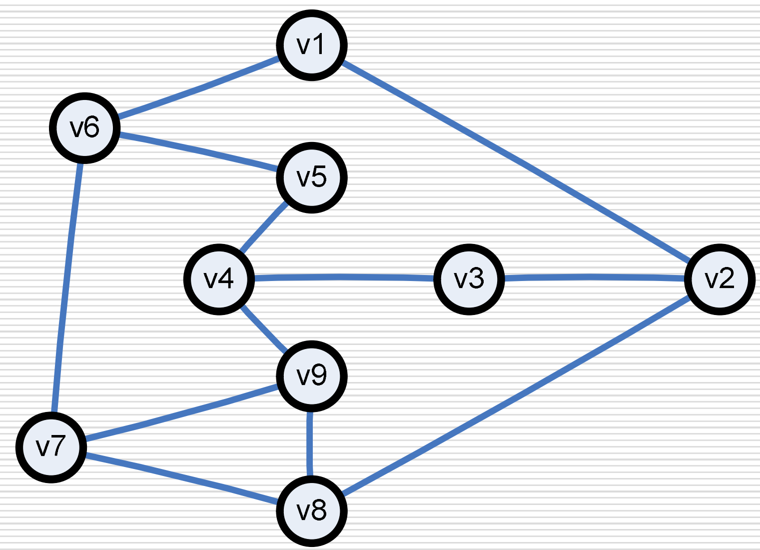
- Γραφήματα $G(V_G, E_G)$ και $H(V_H, E_H)$ είναι **ισομορφικά** ανν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f: V_G \to V_H$ (ισομορφισμός) ώστε για κάθε $u, v \in V_G$, $\{u, v\} \in E_G$ ανν $\{f(u), f(v)\} \in E_H$
  - Υπάρχει αντιστοιχία κορυφών που διατηρεί τη γειτονικότητα.
  - Ισομορφισμός αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.
- Αναλλοίωτη ιδιότητα: ισομορφικά γραφήματα «συμφωνούν».
  - Όλες οι σημαντικές ιδιότητες: #κορυφών, #ακμών, βαθμοί, συνεκτικότητα, κύκλος Euler και Hamilton, χρωματικός αριθμός, ...
- Πως αποδεικνύουμε ότι δύο γραφήματα ισομορφικά:
  - Βρίσκουμε ισομορφισμό και ελέγχουμε ότι διατηρεί γειτονικότητα.
  - Αποδεικνύουμε ότι τα συμπληρωματικά τους είναι ισομορφικά.

Ισομορφικά Γραφήματα

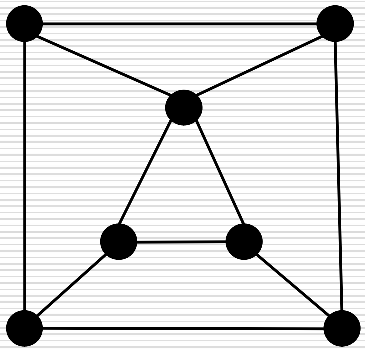


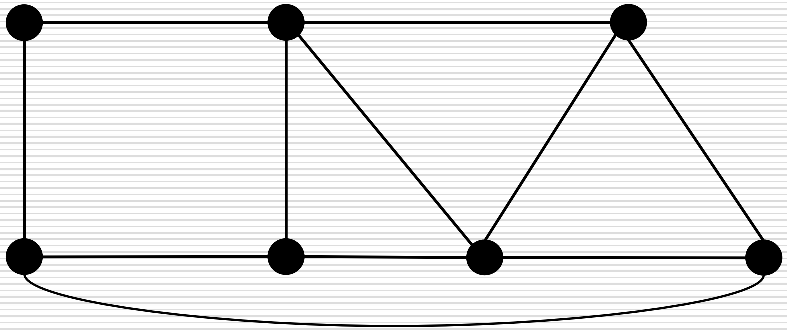
Ισομορφικά Γραφήματα

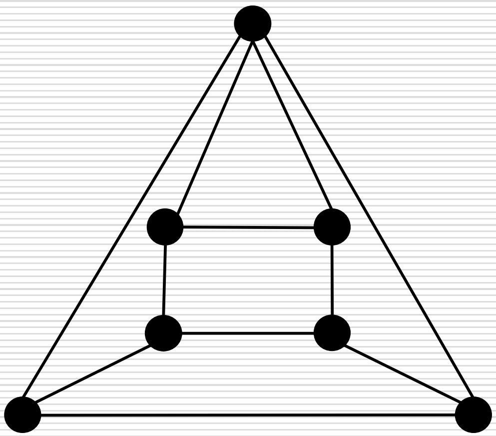




Ισομορφικά Γραφήματα





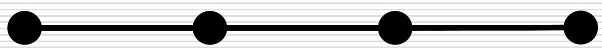


Ισομορφικά Γραφήματα

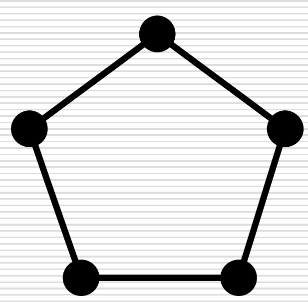
- Πως αποδεικνύω ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά:
  - Βρίσκω μια αναλλοίωτη ιδιότητα στην οποία «διαφωνούν».
  - Να βρούμε όλα τα μη ισομορφικά συνεκτικά γραφήματα με 6 κορυφές, 4 κορ. βαθμού 3 και 2 κορ. βαθμού 4.
- Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα: γράφημα ισομορφικό με το συμπληρωματικό του.
  - Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα έχει n(n-1)/4 ακμές.
  - Αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα υπάρχουν μόνο αν n ή n-1 είναι πολλαπλάσιο του 4.
  - Νδο κάθε αυτοσυμπληρωματικό γράφημα είναι συνεκτικό.

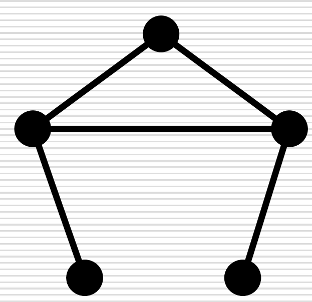
Αυτοσυμπληρωματικά Γραφήματα

- **Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα:** γράφημα ισομορφικό με το συμπληρωματικό του.
  - Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα έχει $n(n-1)/4$ ακμές.
  - Υπάρχουν αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα για:
    - $n = 1$: μεμονωμένη κορυφή.
    - $n = 4$: μονοπάτι μήκους 3



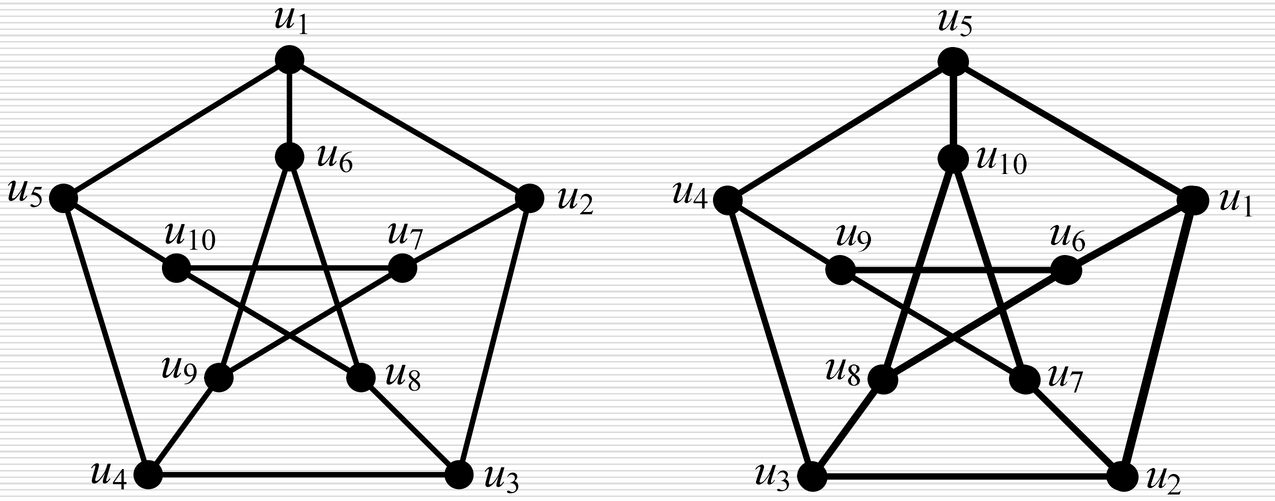
    - $n = 5, 8, 9, \ldots$:





Αυτομορφισμός

- Ισομορφισμός ενός γραφήματος στον εαυτό του.
  - Εκφράζει «συμμετρία» γραφήματος: αντιστοιχία κορυφών με βάση τους «ρόλους» τους – διατηρεί δομή γραφήματος.
  - Ταυτοτικός αυτομορφισμός (υπάρχει τετριμμένα). Αν δεν υπάρχουν άλλοι αυτομορφισμοί, γράφημα είναι μη συμμετρικό.
  - Αυτομορφισμοί μονοπατιού, κύκλου, τροχού, Petersen.



Αυτομορφισμός

- Ισομορφισμός ενός γραφήματος στον εαυτό του.
  - Εκφράζει «συμμετρία» γραφήματος: αντιστοιχία κορυφών με βάση τους «ρόλους» τους – διατηρεί δομή γραφήματος.
  - Όλα τα συνεκτικά γραφήματα με 2, 3, 4, και 5 κορυφές είναι συμμετρικά.
  - Παραδείγματα μη συμμετρικών γραφημάτων: