Γεννήτριες Συναρτήσεις

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αναπαράσταση Ακολουθιών

- **Ακολουθία**: αριθμητική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το N.
- Με γενικό (ή «κλειστό») τύπο $α_n$: n-οστός όρος συναρτήσει n.
- Κωδικοποίηση σε δυναμοσειρά μιας (πραγματικής) μεταβλητής x.
- Γεννήτρια Συνάρτηση (ΓΣ) A(x) ακολουθίας **α**: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$
  - Συντελεστής του x^n αντιστοιχεί σε n-οστό όρο ακολουθίας **α**.
  - Επιλέγουμε διάστημα τιμών x ώστε σειρά να συγκλίνει.
  - Έτσι θεωρούμε ότι A(x) άπειρα παραγωγίσιμη (αναλυτική). Παραγωγίζουμε/ολοκληρώνουμε την A(x) ως πεπερασμένο άθροισμα.
- Κάθε ακολουθία **α** αντιστοιχεί σε μοναδική ΓΣ A(x).
- ΓΣ A(x) αντιστοιχεί σε μοναδική ακολουθία: $\alpha_n = (1/n!)A^{(n)}(0)$
- Μετασχηματισμός και «αλγεβρικός» χειρισμός ακολουθιών και επίλυση των προβλημάτων που κωδικοποιούν.

Παραδείγματα

- ΓΣ ακολουθίας 1, 1, 1, 1, ... : $1/(1-x)$
- ΓΣ ακολουθίας a_n = b λ^n : $b/(1-\lambda x)$
- ΓΣ για πεπερασμένες ακολουθίες (υπόλοιποι όροι θεωρούνται 0).
  - ΓΣ ακολουθίας 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5: $x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6$
  - ΓΣ ακολουθίας $a_k = C(n, k)$: $(1+x)^n$
- ΓΣ ακολουθίας $a_n = n+1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

  - ΓΣ ακολουθίας $\beta_n = n$: $B(x) = x/(1-x)^2$
- Ακολουθία που αντιστοιχεί σε ΓΣ $A(x) = 5/(1 - 4x)$: $a_n = 5\ 4^n$

Παραδείγματα

- Ακολουθία αντιστοιχεί σε ΓΣ $A(x) = 1/(1 - x)^n$;
  - Γενικευμένο δυωνυμικό ανάπτυγμα (όταν n δεν είναι φυσικός):

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k$$

  - Ειδικότερα, αν n φυσικός: $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$
  - Δηλαδή η $1/(1-x)^n$ είναι η ΓΣ για συνδυασμούς k από n αντικείμενα με επανάληψη (ή διανομή k ίδιων αντικειμένων σε n διακ. υποδοχές).
- Με βάση γενικευμένο δυωνυμικό ανάπτυγμα,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

  - Άρα η ΓΣ $A(x) = 1/(1+x)$ αντιστοιχεί στην ακολουθία $a_n = (-1)^n$

Πράξεις Ακολουθιών

- Πράξεις μεταξύ ακολουθιών:
  - Διαβάθμιση με συντελεστή c: $(c\boldsymbol{\alpha})_n = c\alpha_n$
  - Γραμμικός συνδυασμός: $(c\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\beta})_n = c\alpha_n + d\beta_n$
  - Δεξιά ολίσθηση κατά k θέσεις:
    $$(S^k\boldsymbol{\alpha})_n = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 0, \dots, k-1 \\ \alpha_{n-k} & \text{για } n \geq k \end{cases}$$
  - Αριστερή ολίσθηση κατά k θέσεις: $(S^{-k}\boldsymbol{\alpha})_n = a_{n+k}$
  - Ακολουθία μερικών αθροισμάτων: $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$
  - Ακολουθία συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων: $\delta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k$
  - Ευθεία διαφορά: $(\Delta\boldsymbol{\alpha})_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$
  - Ανάστροφη διαφορά (ολίσθ. ευθείας 1 θέση δεξιά): $(\nabla\boldsymbol{\alpha})_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$
  - Συνέλιξη: $(\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta})_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$

Βασικές Ιδιότητες

- Γραμμική ιδιότητα:
  - Η ακολουθία c**α** + d**β** έχει ΓΣ την c A(x) + d B(x).
  - Η ΓΣ $\frac{10-38x}{1-6x+8x^2} = \frac{1}{1-4x} + \frac{9}{1-2x}$ έχει ακολουθία την $4^n + 9 \cdot 2^n$
  - Η ΓΣ $\frac{9-47x}{1-10x+21x^2} = \frac{5}{1-3x} + \frac{4}{1-7x}$ έχει ακολουθία την $5 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n$
- Ιδιότητα ολίσθησης:
  - Η ακολουθία S^k **α** έχει ΓΣ την x^k A(x), αφού:

$$x^k A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+k} = \sum_{n=0}^{k-1} 0 x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{n-k} x^n$$

  - Π.χ. 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, ... έχει ΓΣ την $x^4/(1-x)$
    0, 0, 1, 2, 4, …, 2^{n-2} έχει ΓΣ την $x^2/(1-2x)$
  - Η ακολουθία S^{-k} **α** έχει ΓΣ την $x^{-k}\left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x^i\right)$
  - Π.χ. η ακολουθία $a_n = 2^{n+3}$ έχει ΓΣ την

$$x^{-3}[\tfrac{1}{1-2x} - 1 - 2x - 4x^2] = \tfrac{8}{1-2x}$$

Βασικές Ιδιότητες

- Μερικών αθροισμάτων: $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$
  - Παρατηρούμε ότι $a_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$
  - Άρα $A(x) = \Gamma(x) - x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x) = A(x) / (1-x)$.
  - Π.χ. $\gamma_n = n+1$ είναι ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $a_n = 1$.
    - Άρα έχει ΓΣ την $\Gamma(x) = 1/(1-x)^2$
  - Ποια είναι η ΓΣ της $\beta_n = n(n+1)/2$;
    - Η β_n αποτελεί την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\delta_n = n$, η οποία έχει ΓΣ την $D(x) = x/(1-x)^2$.
    - Άρα έχει ΓΣ την $B(x) = x/(1-x)^3$
- Συνέλιξη $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta}$ έχει ΓΣ την $A(x)\, B(x)$.
  - Ο συντελεστής του x^n στο $A(x)\, B(x)$ είναι $(\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta})_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$
  - Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k 2^{n-k}$
    - Από ιδιότητα συνέλιξης, $A(x) = 1/[(1-3x)(1-2x)]$

Βασικές Ιδιότητες

- Ιδιότητα της Κλίμακας:
  - Η ακολουθία $\gamma_n = n\, a_n$ έχει ΓΣ την $\Gamma(x) = x\, A'(x)$, αφού

$$\Gamma(x) = xA'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n x^n)' = x\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n\alpha_n)x^n$$

  - Η ακολουθία $\delta_n = a_n /(n+1)$ έχει ΓΣ την $\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz$

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \alpha_n z^n dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^n$$

Παραδείγματα

- Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας **β** = c **α** + d;
  - $B(x) = c\,A(x) + d/(1-x)$
- Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = c^n a_n$;
  - $B(x) = A(cx)$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την $A(x) = 4x + 2/(1-3x)$;
  - $a_0 = 2$, $a_1 = 10$, $a_n = 2\, 3^n$, για $n \geq 2$.
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την $A(x) = 2/(1 - 4x^2)$;
  - Ανάλυση σε κλάσματα: $A(x) = 1/(1-2x) + 1/(1+2x)$
  - Ακολουθία $a_n = 2^n + (-2)^n$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την $A(x) = \frac{22x^3-9x^2-14x-1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$
  - Ανάλυση σε κλάσματα: $A(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+3x} - \frac{1}{1-2x} - \frac{2}{(1-2x)^2}$
  - Ακολουθία $a_n = (-1)^n + (-3)^n - 2^n - (n+1)2^{n+1}$

Εφαρμογές

- ... των ΓΣ είναι πολλές και σημαντικές. Μεταξύ άλλων:
  - Υπολογισμός αθροισμάτων.
  - Επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής.
  - Επίλυση αναδρομικών εξισώσεων.
- Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων:
  - Διατύπωση με βάση μια ακολουθία (ή συνδυασμό ακολουθιών) ώστε ο «κλειστός» τύπος για τον n-οστό όρο να δίνει τη λύση.
  - Υπολογισμός της ΓΣ της ακολουθίας (με βάση ιδιότητες ΓΣ).
  - Ανάπτυγμα ΓΣ και υπολογισμός έκφρασης για n-οστό όρο.
- Υπολογισμός αθροίσματος $\sum_{k=0}^{n} 3^k 2^{n-k}$
  - ΓΣ αντίστοιχης ακολουθίας **a** είναι η $A(x) = 1/[(1-3x)(1-2x)]$
  - Ανάλυση σε κλάσματα: $A(x) = 3/(1-3x) - 2/(1-2x)$
  - Άθροισμα $= a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

Υπολογισμός Αθροισμάτων

- Υπολογισμός αθροίσματος $\sum_{k=0}^{n} k^2$
  - Ακολουθία $a_n = n$ έχει ΓΣ την $A(x) = x/(1-x)^2$
  - Ιδιότητα κλίμακας: $\beta_n = n^2$ έχει ΓΣ την $B(x) = x(1+x)/(1-x)^3$
  - Άθροισμα αντιστοιχεί στην ακολουθία μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας β, η οποία έχει ΓΣ την $\Gamma(x) = x(1+x)/(1-x)^4$
  - Χρησιμοποιούμε $(1-x)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{4+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$
  - ... και έχουμε: $\frac{x^2}{(1-x)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{3} x^k$ και $\frac{x}{(1-x)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{3} x^k$
  - Άθροισμα = $\binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$
- Ομοίως να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n} k^3$

Προβλήματα Συνδυαστικής

- **Συνήθεις** ΓΣ χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση και επίλυση προβλημάτων **συνδυασμών**.
  - Για κάθε αντικείμενο Α, κωδικοποιούμε στον εκθέτη της μεταβλητής x πόσες φορές μπορούμε να το επιλέξουμε.
    - $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^p$: μπορούμε να επιλέξουμε το Α 0, 1, ..., p φορές (μπορεί άπειρο άθροισμα).
    - Σε αυτή τη φάση κωδικοποιούνται οι περιορισμοί.
    - Απαριθμητής για (επιλογές) αντικειμένου Α.
  - Απαριθμητές για διαφορετικά αντικείμενα πολλαπλασιάζονται (κανόνας γινομένου) και δίνουν ΓΣ για συνδυασμούς από n αντικείμενα.
  - Ο συντελεστής του x^k στη ΓΣ αντιστοιχεί στον #συνδυασμών k από n αντικείμενα (υπό τους περιορισμούς που έχουμε θέσει).
  - Η ΓΣ κωδικοποιεί όλα τα ενδεχόμενα του πειράματος και #τρόπων να προκύψει κάθε ενδεχόμενο.

Παραδείγματα

- Συνδυασμοί από n αντικείμενα χωρίς επαναλήψεις:
  - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο: $1+x$
  - ΓΣ $(1+x)^n$. Συντελεστής x^k = $C(n, k)$.
- Συνδυασμοί από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις:
  - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο: $1+x+x^2+x^3+\ldots = 1/(1-x)$
  - ΓΣ $1/(1-x)^n$. Συντελεστής x^k = $C(n+k-1, k)$.
- Συνδυασμοί από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις ώστε κάθε αντικείμενο να επιλεγεί τουλάχιστον 1 φορά:
  - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο: $x+x^2+x^3+\ldots = x/(1-x)$
  - ΓΣ $x^n/(1-x)^n$. Συντελεστής x^k = $C(k-1, n-1)$.

Παραδείγματα

- #λύσεων εξίσωσης $z_1+z_2+z_3+z_4 = 30$ στους φυσικούς αν z_1 άρτιος, θετικός ≤ 10, z_2 περιττός ≤ 11, $3 \le z_3 \le 10$, $0 \le z_4 \le 15$.
  - $A(x)=(x^2+x^4+\ldots+x^{10})(x+x^3+\ldots+x^{11})(x^3+x^4+\ldots+x^{10})(1+x+x^2+\ldots+x^{15})$
  - Ζητούμενο δίνεται από συντελεστή x^{30} που είναι 185.
  - Ο συντελεστής του x^{30} στην A(x) **δεν** ταυτίζεται με αυτόν στην $A'(x)=(x^2+x^4+x^6+\ldots)(x+x^3+x^5+\ldots)(x^3+x^4+x^5+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)$
- Κέρματα 20 λεπτών, 50 λεπτών, 1 ευρώ και 2 ευρώ. Συνδυασμοί με συνολική αξία n ευρώ ώστε τουλάχιστον ένα κέρμα από κάθε είδος.
  - Κωδικοποιούμε στον εκθέτη την αξία των κερμάτων (σε λεπτά).
  - $A(x) = (x^{20}+x^{40}+\ldots)(x^{50}+x^{100}+\ldots)(x^{100}+x^{200}+\ldots)\ (x^{200}+x^{400}+\ldots)$
  - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{100n}

Παραδείγματα

- #διανομών 2n+1 ίδιων μπαλών σε 3 διακεκριμένες υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή να έχει ≤ n μπάλες.
  - Η ΓΣ είναι $A(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^n)^3 = (1-x^{n+1})^3/(1-x)^3$
  - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{2n+1}
  - Με πράξεις:

$$A(x) = (1 - 3x^{n+1} + 3x^{2n+2} - x^{3n+3})\frac{1}{(1-x)^3}$$
$$= (1 - 3x^{n+1} + 3x^{2n+2} - x^{3n+3})\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k\right)$$

  - Ο συντελεστής του x^{2n+1} είναι

$$\binom{2n+3}{2} - 3\binom{n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Παραδείγματα

- ΓΣ για τη διανομή 20 μαρκαδόρων, 6 μαύρων, 10 πράσινων, και 4 κόκκινων, σε 2 καθηγητές ώστε κάθε καθηγητής να πάρει 10 μαρκαδόρους και τουλάχιστον 1 από κάθε χρώμα.
  - Διανομή στον 1ο καθηγητή (σύμφωνα με περιορισμούς) καθορίζει τι θα πάρει ο 2ος καθηγητής με μοναδικό τρόπο.
  - Αρκεί να διατυπώσουμε τη ΓΣ για τον 1ο καθηγητή.
  - $(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x+x^2+\ldots+x^9)(x+x^2+x^3)$
  - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{10} που είναι 15.

Παραδείγματα

- 100 (μη διακεκριμένοι) επιβάτες κατεβαίνουν σε 4 (διακεκριμένες) στάσεις. Γεννήτρια Συνάρτηση όταν:
- Δεν υπάρχουν περιορισμοί.
  - #ακεραίων λύσεων της $z_1+z_2+z_3+z_4 = 100$ με $z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0$.
  - $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^4 = 1/(1-x)^4$
  - Ζητούμενο δίνεται από συντελεστή x^{100} που είναι $C(103, 3)$
- #επιβ. 3η στάση ≥ #επιβ. 2η στάση ≥ #επιβ. 1η στάση.
  - Πρέπει $z_2 = z_1+\kappa$, $\kappa \geq 0$, και $z_3 = z_2+\lambda = z_1+\kappa+\lambda$, $\lambda \geq 0$.
  - #ακεραίων λύσεων της $3z_1+2\kappa+\lambda+z_4 = 100$ με $z_1, \kappa, \lambda, z_4 \geq 0$.
  - $(1+x^3+x^6+\ldots+x^{99})(1+x^2+x^4+\ldots+x^{100})(1+x+x^2+\ldots+x^{100})^2$
  - Ζητούμενο δίνεται από συντελεστή x^{100} που είναι 30787

Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

- ... για προβλήματα διατάξεων.
  - Διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένες θέσεις.
  - Αναζητούμε τον συντελεστή τον συντελεστή του $x^k/k!$ (ουσιαστικά πολλαπλασιάζουμε τον συντελεστή του x^k με $k!$)
  - Λαμβάνουμε υπόψη διατάξεις στον σχηματισμό των απαριθμητών.
- Διατάξεις k αντικειμένων από n χωρίς επανάληψη.
  - $P(n, k) = C(n, k) \times k!$
  - Το $P(n, k)$ προκύπτει ως συντελεστής του $x^k/k!$ στο $(1+x)^n$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!}$$

Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

- Εκθετική Γεννήτρια Συν. E(x) ακολουθίας **α**: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}$
  - Συντελεστής του $x^n/n!$ αντιστοιχεί σε n-οστό όρο ακολουθίας **α**.
- «*Εκθετική*» γιατί στην ακολουθία 1, 1, 1, ... αντιστοιχεί η Εκθετική ΓΣ (ΕΓΣ) e^x λόγω της ταυτότητας:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  - Εκθετικός απαριθμητής για μεταθέσεις n διαφορ. αντικ.: $x^n = n! \frac{x^n}{n!}$
  - Εκθετικός απαριθμητής για μεταθέσεις n ίδιων αντικειμένων: $x^n/n!$
  - ΕΓΣ για μεταθέσεις n αντικειμένων σε k ομάδες με ίδια αντικείμενα με πληθάριθμο ομάδων $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\frac{x^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{x^{n_2}}{n_2!} \cdot \cdots \cdot \frac{x^{n_k}}{n_k!} = \frac{x^n}{n_1! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Παραδείγματα

- ΕΓΣ για διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές χωρίς περιορισμούς και χωρίς να έχει σημασία η σειρά στις υποδοχές.
  - Ισοδύναμα, ΕΓΣ για διατάξεις k από n με απεριόριστες επανάληψεις.
  - Εκθετικός απαριθμητής για κάθε υποδοχή: $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$
  - Εκθετική ΓΣ: e^{nx} και ο συντελεστής $x^k/k!$ είναι n^k

Παραδείγματα

- Το ίδιο με περιορισμό καμία υποδοχή να μην μείνει κενή ($k \geq n$):
  - Εκθετικός απαριθμητής για κάθε υποδοχή: $e^x - 1$
  - Εκθετική ΓΣ: $(e^x - 1)^n$
  - Συντελεστής του $x^k/k!$ είναι ίσος με $\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} (n-\ell)^k$
- Εφαρμογές:
  - Πρόγραμμα μελέτης 4 μαθημάτων για 7 ημέρες ώστε κάθε μάθημα να μελετηθεί τουλάχιστον 1 ημέρα.
    - «Διανομή» 7 διακ. ημερών σε 4 διακ. μαθήματα ώστε κανένα μάθημα να μην μείνει «κενό».
    - #«διανομών»: $4^7 - 4\times3^7 + 6\times2^7 - 4 = 8400$
  - Ανάθεση 20 μεταπτ. φοιτητών σε 5 εργαστήρια ώστε κάθε εργαστήριο να δεχθεί τουλάχιστον 1 φοιτητή.
    - #«αναθέσεων»: $5^{20} - 5\times4^{20} + 10\times3^{20} - 10\times2^{20} + 5$

Παραδείγματα

- #πενταδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος από 1:
  - Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 0, 2, 3, 4:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

  - Εκθετικός απαριθμητής για ψηφίο 1:

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

  - Εκθετική ΓΣ: $e^4(e^x + e^{-x})/2 = (e^{5x} + e^{3x})/2$
  - Συντελεστής του $x^n/n!$ είναι $(5^n + 3^n)/2$

Παραδείγματα

- #πενταδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος 1 και περιττό πλήθος 0 όπου τα 2, 3, 4 εμφανίζονται τουλάχιστον 1 φορά.
  - Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 2, 3, 4: $e^x - 1$
  - Εκθετικός απαριθμητής για ψηφίο 1: $(e^x + e^{-x})/2$
  - Εκθετικός απαριθμητής για ψηφίο 0:

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

  - Εκθετική ΓΣ: $(e^x - 1)^3 [(e^x + e^{-x})/2] [(e^x - e^{-x})/2]$
  - Συντελεστής του $x^n/n!$ είναι

$$(5^n - 3\times 4^n + 3^{n+1} - 2^n + (-2)^n - 3\times(-1)^n - 1)/4$$

Παραδείγματα

- ΕΓΣ για διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές χωρίς περιορισμούς και όταν έχει σημασία η σειρά στις υποδοχές.
  - Επειδή έχει σημασία η σειρά σε κάθε υποδοχή, κατά το σχηματισμό του απαριθμητή, πολλαπλασιάζουμε το $x^k/k!$ με $k!$
  - Ο **εκθετικός** απαριθμητής για κάθε υποδοχή είναι:

$$1 + 1!\frac{x}{1!} + 2!\frac{x^2}{2!} + 3!\frac{x^3}{3!} + 4!\frac{x^4}{4!} + 5!\frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

  - Η (Ε)ΓΣ είναι $1/(1 - x)^n$
  - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του $x^k/k!$, που είναι:

$$\binom{n+k-1}{k} \times k! = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$