Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

2η σειρά φροντιστηριακών ασκήσεων

(εαρινό 2022)

Επιμέλεια Διαφανειών: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

Γραφήματα

συνδετικά δέντρα, επίπεδα γραφήματα, κύκλος euler, κύκλος hamilton, ισομορφισμός, διμερή γραφήματα, χρωματικός αριθμός γραφημάτων

Έστω δέντρο T του οποίου όλες οι ακμές έχουν μοναδιαίο μήκος. Θεωρούμε κορυφές u, v των οποίων η απόσταση $d(u, v)$ στο T είναι μέγιστη, δηλ. για κάθε ζεύγος κορυφών x, y, ισχύει ότι $d(x, y) \leq d(u, v)$. Να δείξετε ότι:

α) Οι κορυφές u και v είναι φύλλα του δέντρου T.

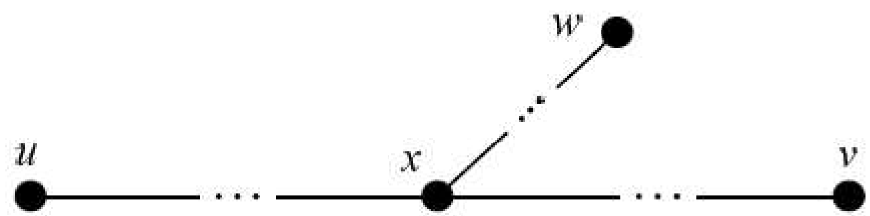
(α) Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η κορυφή u δεν είναι φύλλο. Τότε έχει τουλάχιστον δύο γειτονικές κορυφές. Επειδή το μονοπάτι $u - v$ είναι μοναδικό, κάποια από τους γείτονες της u, ας την ονομάσουμε w, δεν ανήκει στο μονοπάτι $u - v$. Επομένως το μοναδικό $w - v$ μονοπάτι διέρχεται από τη u. Συνεπώς $d(w, v) = 1 + d(u, v)$. Άτοπο, λόγω της υπόθεσης ότι η απόσταση μεταξύ των u και v είναι μέγιστη. Λόγω συμμετρίας, το ίδιο ισχύει και για την κορυφή v.

β) Μια κορυφή w ανήκει στο μονοπάτι που συνδέει τις u και v στο T αν και μόνο αν

$d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$.

(β) Επειδή το $u - v$ μονοπάτι είναι μοναδικό, για κάθε κορυφή w που ανήκει στο $u - v$ μονοπάτι, ισχύει ότι $d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$.

Για το αντίστροφο, έστω κορυφή w τέτοια ώστε $d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι η w δεν ανήκει στο $u - v$ μονοπάτι. Γνωρίζουμε ότι σε ένα δέντρο κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με μοναδικό μονοπάτι. Αφού η w δεν ανήκει στο $u - v$ μονοπάτι, το μονοπάτι $u - w$ περιέχει τμήμα $x - w$, με μήκος τουλάχιστον 1, το οποίο (με εξαίρεση την κορυφή x) δεν ανήκει στο $u - v$ μονοπάτι (βλ. το παρακάτω σχήμα). Μάλιστα, επειδή οι κορυφές u και v είναι φύλλα, η κορυφή x (δηλ. η αρχή αυτού του τμήματος) είναι διαφορετική από τις u και v. Επιπλέον, το μοναδικό μονοπάτι που συνδέει τις w και v διέρχεται από την x. Συνεπώς η απόσταση $d(u, w) + d(w, v)$, δηλ. η απόσταση να πάμε από την u στην v μέσω της w, είναι ίση με $d(u, v) + 2\, d(x, w)$, δηλ. ίση με την απόσταση να πάμε απευθείας από την u στην v συν την απόσταση να πάμε από την x στην w και να επιστρέψουμε στην x. Επειδή $d(x, w) \geq 1$, καταλήγουμε ότι $d(u, w) + d(w, v) > d(u, v)$, άτοπο.



γ) Έστω ότι $d(u, v) = 2r$, για κάποιον φυσικό $r \geq 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική κορυφή c στο T για την οποία ισχύει ότι $d(c, x) \leq r$, για κάθε κορυφή x.

(γ) Έστω c η κορυφή του $u-v$ μονοπατιού για την οποία $d(u, c) = r$. Προφανώς, για κάθε κορυφή u' στο μονοπάτι $u-c$, $d(c, u') \leq r$. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει κορυφή x τέτοια ώστε $d(c, x) > r$. Αφού η x δεν ανήκει στο $u-c$ μονοπάτι, το μοναδικό που συνδέει τις u και x διέρχεται από τη c. Έχουμε λοιπόν ότι $d(u,x) = d(u,c) + d(c,x) > 2r$. Αυτό αντιβαίνει στην υπόθεση ότι η απόσταση μεταξύ των u και v, που είναι ίση με $2r$, είναι μέγιστη.

Ως προς τη μοναδικότητα της c, αρχικά παρατηρούμε ότι επειδή η u είναι φύλλο και το μονοπάτι $u-v$ είναι μοναδικό, υπάρχει μοναδική κορυφή c στο $u-v$ μονοπάτι τέτοια ώστε $d(u, c) = r$. Έστω τώρα μια οποιαδήποτε κορυφή c' τέτοια ώστε $d(c', x) \leq r$ για κάθε κορυφή x του T. Επειδή

$$2r = d(u,v) \leq d(u,c') + d(c',v) \leq r + r = 2r \ ,$$

ισχύει ότι $d(u,v) = d(u,c') + d(c',v) = 2r$. Συνεπώς, λόγω του (β), η c' ανήκει στο $u-v$ μονοπάτι. Επιπλέον, πρέπει $d(u,c') = d(c',v) = r$. Άρα η μοναδική κορυφή με αυτή την ιδιότητα είναι η κορυφή c που ανήκει στο $u-v$ μονοπάτι και έχει $d(u, c) = r$.

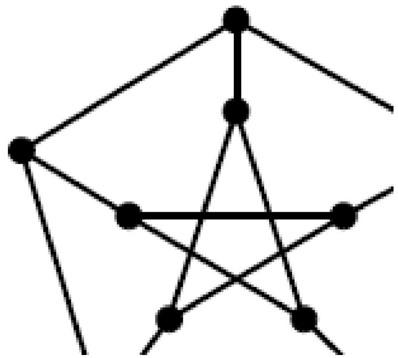
Έστω $k \geq 3$ ένας φυσικός αριθμός. Θεωρούμε ένα απλό επίπεδο γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές και m ακμές το οποίο δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k-1$ (δηλ. αν το G έχει κύκλους, τότε το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k).

1. Να δείξετε ότι κάθε τέτοιο γράφημα έχει πλήθος ακμών $m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$.

1. Αν οι κύκλοι του είναι μήκους τουλάχιστον k τότε κάθε όψη ορίζεται από k τουλάχιστον ακμές. Ισχύει $k \cdot f \leq 2m$. Επειδή πρόκειται για συνεκτικό επίπεδο γράφημα ισχύει πως $m+2=n+f$. Κάνοντας πράξεις
$$k \cdot (m+2-n) \leq 2 \cdot m \Rightarrow \ldots \Rightarrow m \leq \frac{k}{k-2}(n-2).$$

Έστω $k \geq 3$ ένας φυσικός αριθμός. Θεωρούμε ένα απλό επίπεδο γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές και m ακμές το οποίο δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k-1$ (δηλ. αν το G έχει κύκλους, τότε το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k).

2. Είναι επίπεδο το γράφημα στο διπλανό σχήμα; Να αιτιολογήσετε πλήρως τον ισχυρισμό σας.

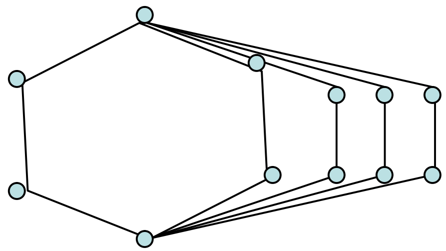


2. Το γράφημα έχει 10 κορυφές, 15 ακμές και κύκλους μήκους μικρότερου ή ίσου του 5. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα $m \leq \frac{5}{5-2}(10-2) = \frac{40}{3}$. Αλλά $m = 15$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί το γράφημα δεν είναι επίπεδο.

Έστω $k \geq 3$ ένας φυσικός αριθμός. Θεωρούμε ένα απλό επίπεδο γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές και m ακμές το οποίο δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k-1$ (δηλ. αν το G έχει κύκλους, τότε το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k).

3. Να δείξετε ότι για κάθε άρτιο $n \geq 6$, υπάρχει απλό επίπεδο γράφημα G με n κορυφές και $\dfrac{3n}{2}-3$ ακμές στο οποίο όλοι οι κύκλοι έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του 6. Να βρείτε ένα τέτοιο γράφημα για $n=12$ και να το αποτυπώσετε στο επίπεδο.

3. Για $n=6$ έχω 6 ακμές και έξι κορυφές και θέλω κύκλο μήκους 6. Άρα παίρνω το C_6. Αν προσθέσω 2 κορυφές πρέπει να προσθέσω 3 ακμές. Αν προσθέσω 4 κορυφές πρέπει να προσθέσω 6 ακμές και παίρνω το γράφημα που ακολουθεί.



Θεωρούμε συνεκτικό επίπεδο γράφημα στο οποίο όλες οι όψεις έχουν βαθμό 5 ή 6. Να δείξετε ότι (i) αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με 3, τότε το γράφημα έχει 12 όψεις βαθμού 5, και (ii) ότι αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 3, τότε υπάρχουν τουλάχιστον 12 όψεις βαθμού 5.

(i) Υποθέτουμε πως έχουμε x όψεις βαθμού 5 και y όψεις βαθμού 6 $f = x + y$ (1)

Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος είναι διπλάσιο του πλήθους των ακμών. Επομένως για γράφημα με βαθμό κάθε κορυφής ίσο με 3 ισχύει $3n = 2m$ (2)

Από τον τύπο του Euler προκύπτει πως: $n + f = m + 2 \Rightarrow f = m/3 + 2$ (3)

Το δυϊκό γράφημα έχει ίδιο πλήθος ακμών με το αρχικό και πλήθος κορυφών f (μία όψη για κάθε κορυφή). Οι βαθμοί των κορυφών του δυϊκού γραφήματος είναι 5 και 6. Επομένως ισχύει πως $5x + 6y = 2m$ (4)

Προσπαθώ να υπολογίσω το x

Από την (1) προκύπτει $x = f - y \Rightarrow$ λόγω της (3) $\Rightarrow x = m/3 + 2 - y$

Από (4) προκύπτει $y = \dfrac{2m - 5x}{6}$. Επομένως $x = m/3 + 2 - y = m/3 + 2 - \dfrac{2m-5x}{6} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 12$

(ii) Η διαφορά εδώ είναι πως η ισότητα (2) γίνεται $3n \le 2m$. Και με πράξεις προκύπτει το ζητούμενο.

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο n, να δείξετε ότι κάθε απλό γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές και τουλάχιστον $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton. Να δείξετε ακόμη ότι για κάθε $n \geq 3$, υπάρχει απλό γράφημα με n κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ ακμές που δεν έχει κύκλο Hamilton.

Βάση: Για $n = 3$ ισχύει διότι έχουμε 3 ακμές και επομένως εύκολα φτιάχνουμε κύκλο Hamilton.

Επαγωγικό υπόθεση: Για $n = k - 1$ έστω πως ισχύει.
Επαγωγικό βήμα: Θέλουμε να δείξουμε πως για $n = k$ το γράφημα G με $\frac{(k-1)(k-2)}{2} + 2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton.

Συνέχεια →

Αφαιρούμε μία κορυφή από το γράφημα G με τις n κορυφές. Επιλέγουμε αυτή με τον μεγαλύτερο βαθμό κορυφής. Το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Hamilton λόγω επαγωγικής υπόθεσης. Ξεκινάμε να σχεδιάζουμε τον κύκλο Hamilton για το γράφημα με $k-1$ κορυφές. Ο στόχος μας είναι προσθέτοντας τη νέα κορυφή u να μπορούμε να φύγουμε από μία κορυφή x του $G-u$ να πάμε ακολουθώντας μία ακμή στην u και να επιστρέψουμε μέσω μιάς άλλης ακμής στην επόμενη κορυφή y του γραφήματος $G-u$ την οποία θα επισκεφτόταν ο κύκλος Hamilton του $G-u$ γραφήματος αν δεν χρειαζόταν να μεσολαβήσει η u. Θέλουμε επομένως η u να μεσολαβεί σε δύο διαδοχικές κορυφές του $G-u$. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει καταρχάς να έχει βαθμό ≥ 2 που ισχύει διότι διαφορετικά το πλήθος των ακμών του γραφήματος θα ήταν μικρότερο από αυτό που δίνεται . Πρέπει όμως να δούμε και τι βαθμό θα πρέπει να έχει για να υπάρχουν διαδοχικές κορυφές στις οποίες μπορεί να Αποδεικνύουμε πως ο βαθμός της είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $k-2$. Έστω πως είναι μικρότερος ή ίσος του $k-3$. Το άθροισμα των βαθμών του γραφήματος θα είναι $\leq k(k-3)$ και επομένως το μέγιστο πλήθος των ακμών του θα είναι $k\dfrac{k-3}{2}$.

Αλλά $\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}+2>k\dfrac{k-3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{k^2-3k+2}{2}+2>\dfrac{k^2-3k}{2}$. Καταλήξαμε σε άτοπο διότι υπάρχει κορυφή με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του $k-2$. Και εφόσσον $k \geq 4$ υπάρχουν διαδοχικές κορυφές με τις οποίες συνδέεται η u και μπορώ να σχηματίσω κύκλο Hamilton.

Συνέχεια ⟶

Παρατηρούμε εδώ πως πρέπει να μελετήσουμε ιδιαιτέρως την περίπτωση που υπάρχει κορυφή βαθμού $n-1$. Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η επαγωγική υπόθεση. Γιατί αν από το πλήθος των ακμών του γραφήματος με n κορυφές αφαιρέσω τις ακμές της κορυφής που έχει βαθμό $n-1$ θα πρέπει λογικά να πάρω τις ακμές του γραφήματος με $n-1$ κορυφές δηλαδή τουλάχιστον $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+2$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2-(n-1)\geq\frac{(n-2)(n-3)}{2}+2\Rightarrow n^2-3n+2-2n-2\geq n^2-5n+6\Rightarrow 0\geq 6$$

Άτοπο.

Στην περίπτωση αυτή το γράφημα με $n-1$ κορυφές θα έχει $\frac{(k-2)(k-3)}{2}+1$ ακμές

διότι $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2-(n-1)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+1$

Εφόσσον δεν έχω τώρα απαραίτητα κύκλο Hamilton (μου λείπει μία ακμή) θα έχω μονοπάτι Hamilton. Η n-οστή κορυφή είναι βαθμού $n-1$ και επομένως συνδέεται με όλες τις άλλες κορυφές. Συνδέω την κορυφή αυτή με αυτές που δεν έκλεινε ο κύκλος Hamilton και παίρνω τώρα κύκλο Hamilton.

Να δείξετε ακόμη ότι για κάθε $n \geq 3$, υπάρχει απλό γράφημα με n κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ ακμές που δεν έχει κύκλο Hamilton.

Το γράφημα με $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ που δεν έχει κύκλο Hamilton είναι το πλήρες γράφημα με $n-1$ κορυφές και μια ακμή γέφυρα από κάποια ακμή του πλήρους γραφήματος σε μεμονωμένη κορυφή.

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο n, να δείξετε ότι κάθε εξωεπίπεδο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3.

Για $n = 1,2,3$ ισχύει τετριμμένα.

Έστω πως ισχύει για $n = k$.

Θα δείξουμε πως ισχύει για $n = k + 1$.

Κάθε εξωεπίπεδο γράφημα έχει κορυφή βαθμού 2. Αφαιρώ την κορυφή αυτή. Χρωματίζω τις k κορυφές του γραφήματος με 3 χρώματα. Προσθέτω την κορυφή αυτή με δύο ακμές σε δύο διαδοχικές κορυφές (αν δεν ήταν διαδοχικές δεν θα έπαιρνα εξωεπίπεδο γράφημα). Οι κορυφές αυτές είχαν διαφορετικό χρώμα εφόσσον συνδεόταν με κοινή ακμή. Στην κορυφή που πρόσθεσα βάζω το τρίτο χρώμα και επομένως τα τρία χρώματα επαρκούν για τον χρωματισμό του εξωεπίπεδου γραφήματος.

Απόδειξη χωρίς επαγωγή

Σχεδιάζω ένα οποιοδήποτε εξωεπίπεδο γράφημα G. Στην εξωτερική του όψη προσθέτω μία κορυφή u. Συνδέω την κορυφή αυτή με όλες τις κορυφές του εξωεπίπεδου γραφήματος. Το νέο γράφημα $G + u$ παραμένει επίπεδο. Κάθε επίπεδο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 4. Η u συνδέεται με όλες τις κορυφές του G και επομένως έχει διαφορετικό χρώμα από αυτές. Οι υπόλοιπες κορυφές έχουν 3 χρώματα. Επομένως το εξωεπίπεδο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό 3.

Ένα γράφημα $G(V,E)$ ονομάζεται (χρωματικά) $k-$κρίσιμο εάν $\chi(G)=k$ και $\chi(G-\upsilon)<k$ για κάθε κορυφή $\upsilon \in V$. Να δείξετε ότι για κάθε $k-$κρίσιμο γράφημα G, (i) το G είναι συνεκτικό, και (ii) το G έχει ελάχιστο βαθμό κορυφών $\delta(G)\geq k-1$.

(i) Έστω πως δεν είναι συνεκτικό. Θα έχει τουλάχιστον 2 συνεκτικές συνιστώσες με χρωματικό αριθμό $\chi(G_1)$ και $\chi(G_2)$. Και έστω $\chi(G_1)\leq \chi(G_2)$. Ο χρωματικός αριθμός του γράφου θα είναι ίσος με αυτόν της δεύτερης συνιστώσας. Αν από την πρώτη συνιστώσα αφαιρέσουμε μία ακμή ο χρωματικός αριθμός του G δεν θα αλλάξει. Επομένως θα ισχύει $\chi(G-u)=\chi(G)$ Άτοπο.

(ii) Έστω πως ο ελάχιστος βαθμός κορυφών είναι $\delta(G)\leq k-2$. Αφαιρώ από το γράφημα την κορυφή με τον ελάχιστο βαθμό. Έστω u η κορυφή αυτή. Ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος $G-u$ θα γίνει μικρότερος ή ίσος με $k-1$. Αν προσθέσω ξανά αυτή την κορυφή δεν θα χρειαστώ άλλο χρώμα για να την χρωματίσω γιατί συνδέεται με $k-2$ κορυφές και επομένως τη χρωματίζω με το χρώμα που απέμεινε $\chi(G-u)=\chi(G)$ Άτοπο.

α) Κατασκευάστε όλα τα αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα με το πολύ 5 κορυφές, τα οποία δεν είναι ισομορφικά μεταξύ τους.

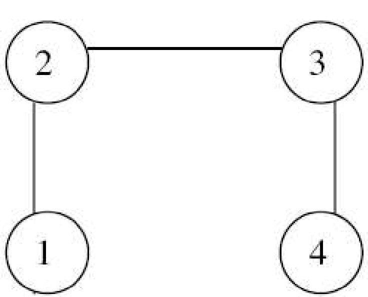
Ένα (απλό συνδεδεμένο, και μη-κατευθυνόμενο) γράφημα G ονομάζεται *αυτοσυμπληρωματικό* όταν είναι ισόμορφο με το συμπλήρωμά του $\overline{G}$.

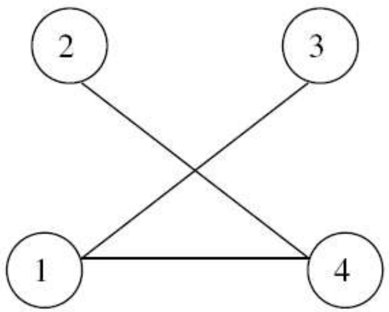
Ένα γράφημα με 0 ή 1 κορυφές είναι αυτοσυμπληρωματικό. Με 2 ή 3 δεν μπορεί να είναι γιατί το πλήθος των κορυφών του πλήρους γραφήματος διά δύο δεν είναι ακέραιος.

Το πλήρες γράφημα με 4 κορυφές θα έχει 6 ακμές. Εξετάζω αν το γράφημα με 4 κορυφές και 3 ακμές έχει αυτοσυμπληρωματικό. Το καθένα από τα δύο γραφήματα θα έχει άθροισμα βαθμών κορυφών 6. Διακρίνω περιπτώσεις:

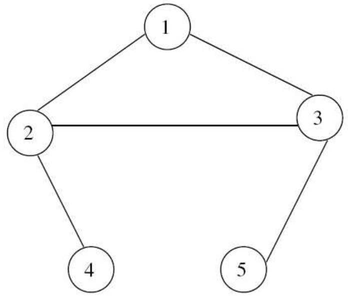
Το γράφημα να έχει κορυφή βαθμού 3. Δεν γίνεται γιατί στο συμπλήρωμα θα πρέπει να έχω κορυφή 0. Για τον ίδιο λόγο δεν έχω κορυφή βαθμού 0.

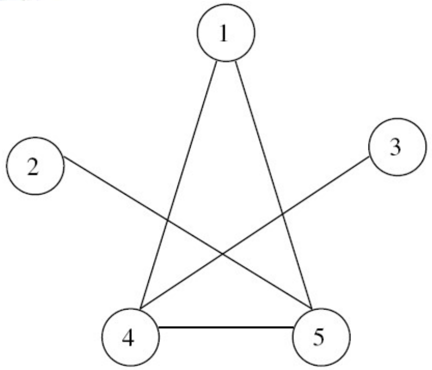
Το γράφημα να έχει κορυφή βαθμού 2. Μπορεί να έχει και μάλιστα θα έχει 2 τέτοιες εφόσσον δεν έχω κορυφή βαθμού 0. Και οι άλλες κορυφές θα έχουν βαθμό 1. Σχεδιάζω το γράφημα. Φτιάχνω το συμπληρωματικό του και διαπιστώνω πως είναι αυτοσυμπληρωματικά.



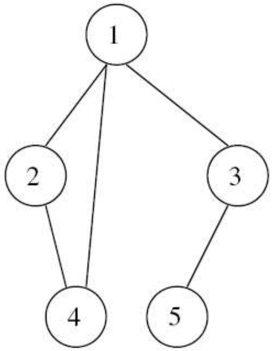


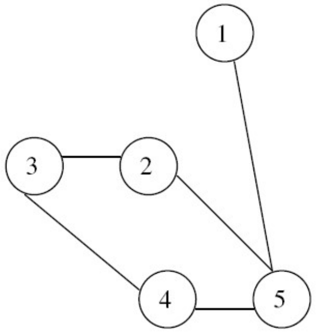
Το πλήρες γράφημα με 5 κορυφές θα έχει 10 ακμές. Εξετάζω αν το γράφημα με 5 κορυφές και 5 ακμές έχει αυτοσυμπληρωματικό. Το καθένα από τα δύο γραφήματα θα έχει άθροισμα βαθμών κορυφών 10. Διακρίνω περιπτώσεις:
Το γράφημα να έχει κορυφή βαθμού 4. Δεν γίνεται γιατί στο συμπλήρωμα θα πρέπει να έχω κορυφή 0. Για τον ίδιο λόγο δεν έχω κορυφή βαθμού 0.
Συνεχίζω εξετάζοντας όλες τις περιπτώσεις για όλες τις πιθανές τιμές των βαθμών των κορυφών. Φτάνω στο 3,2,2,1,1. Διαπιστώνω πως το συμπλήρωμά του είναι αυτοσυμπληρωματικό.



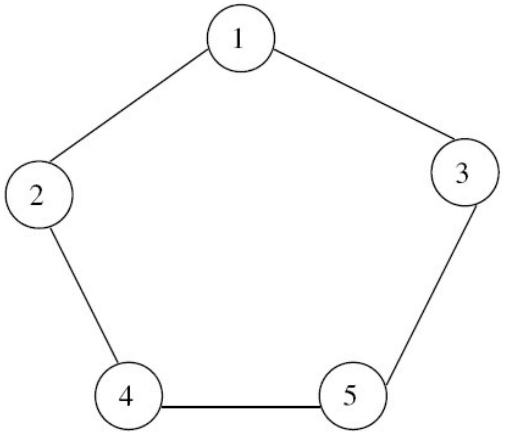


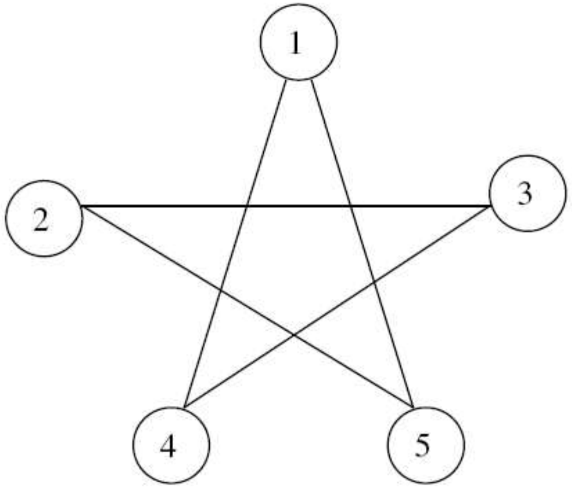
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκω πως το γράφημα με βαθμούς κορυφών 3,2,2,2,1 έχει συμπληρωματικό όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Αλλά τα δύο γραφήματα δεν είναι αλληλοσυμπληρωματικά.





Και τελευταίο είναι το γράφημα με βαθμούς κορυφών 2,2,2,2,2 που είναι ο κύκλος και το συμπλήρωμά του είναι επίσης κύκλος. Ακολουθούν τα σχήματα των δύο γραφημάτων όπου φαίνεται πως είναι αυτοσυμπληρωματικά.





β) Αν το γράφημα G είναι ένας κύκλος με n κορυφές, αποδείξτε ότι το G είναι αυτοσυμπληρωματικό αν και μόνο αν n=5.

Κάθε κορυφή σε ένα γράφημα κύκλο έχει βαθμό 2. Αυτός πρέπει να είναι και ο βαθμός κάθε κορυφής στο συμπληρωματικό. Σε ένα πλήρες γράφημα κάθε κορυφή έχει βαθμό $n-1$. Επομένως $n-1=4 \Rightarrow n=5$.

Να αποδεχθεί πως κάθε γράφημα $G(V,E)$ έχει Independent Set μεγέθους μεγαλύτερου ή ίσου του $n^2/4m$

Έστω ο βαθμός κορυφής είναι $2m/n$.

Διαγράφουμε κάθε κορυφή με πιθανότητα $1-1/d$.

Οι κορυφές που θα απομείνουν είναι n/d και κάνοντας πράξεις βρίσκουμε πως το πλήθος κορυφών που απομένουν είναι $n^2/2m$.

Αντίστοιχα οι ακμές που απομένουν $m/d^2 =...= n^2/4m$ κατά μέση τιμή (αν η πιθανότητα να απομείνει μία κορυφή είναι p η πιθανότητα να διαγραφεί είναι p^2)

Στις ακμές που απέμειναν αφαιρώ τη μία κορυφή της.

Οι κορυφές που θα απομείνουν είναι $n^2/2m$ - $n^2/4m = n^2/4m$

Όσον αφορά τις ακμές δεν απομένει καμία.

Επομένως το Independent Set έχει μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο του $n^2/4m$.

Δείξτε ότι, για οποιεσδήποτε δύο ακμές e_1 και e_2 ενός μη-κατευθυνόμενου και συνδεδεμένου γραφήματος οι οποίες δεν προσπίπτουν στην ίδια κορυφή, υπάρχει ένα μονοπάτι το οποίο ξεκινά με την e_1 και τελειώνει με την e_2.

Έστω e_1 η ακμή που συνδέει τις κορυφές u και v και e_2 η ακμή που συνδέει τις κορυφές w και z. Αν θεωρήσουμε το μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές u και z ενδέχεται να συναντήσουμε τις v και w. Από την τελευταία εμφάνιση είτε της κορυφής u είτε της κορυφής v έως την πρώτη εμφάνιση της κορυφής w ή z έχουμε το μονοπάτι (έστω p) που συνδέει τις ακμές e_1 και e_2. Και όλο το μονοπάτι είναι αυτό που ξεκινά με την e_1 συνεχίζει με το p και τελειώνει με την e_2.

Να διατυπώσετε αλγόριθμο που να αποφαίνεται αν δύο δέντρα με ρίζα είναι ισομορφικά.

Μπορείτε να μελετήσετε σχετικές ιστοσελίδες στο διαδίκτυο όπως για π.χ. https://towardsdatascience.com/graph-theory-isomorphic-trees-7d48aa577e46