Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου
3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 9/2/2022

Άσκηση 1: Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο με Περιορισμούς (1.5 μον.)

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με n κορυφές, m ακμές και θετικά βάρη w στις ακμές. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $T^*(s, k)$ του G στο οποίο μια συγκεκριμένη κορυφή s έχει βαθμό ίσο με k (θεωρούμε ότι $k \geq 1$ και ότι το k δεν ξεπερνά τον βαθμό της s στο G, οπότε το G έχει ένα τέτοιο συνδετικό δέντρο).

(α) Να δείξετε ότι η άπληστη στρατηγική, η οποία συμπεριλαμβάνει στο συνδετικό δέντρο τις k ακμές μικρότερου βάρους που προσπίπτουν στην s, δεν οδηγεί πάντα στη βέλτιστη λύση.

(β) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $T^*(s, k)$ στο οποίο η κορυφή s έχει βαθμό ίσο με k. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 2: Σχεδιασμός Videogame (2.5 μον.)

Σας έχει ανατεθεί ο σχεδιασμός ενός μοντέρνου videogame. Κεντρικό στοιχείο του είναι ο Λαβύρινθος, τον οποίο οι παίκτες διασχίζουν περνώντας μέσα από πολλά δωμάτια. Κάθε δωμάτιο μπορεί να είναι άδειο, να κατοικείται από ένα τέρας, ή να περιέχει ένα μαγικό φίλτρο. Καθώς ο παίκτης περνάει μέσα από τα δωμάτια, αυξάνεται ή μειώνεται η δύναμή του (την οποία συμβολίζουμε με P). Αν κάποια στιγμή η δύναμη P του παίκτη πάψει να είναι θετική, ο παίκτης χάνει τη "ζωή" του και το παιχνίδι σταματάει εκεί.

Ο Λαβύρινθος αναπαρίσταται από ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E, p)$, με βάρη $p : V \to \mathbb{Z}$ στις κορυφές, όπου οι κορυφές αντιστοιχούν σε δωμάτια και οι ακμές σε διαδρόμους (μιας κατεύθυνσης) που οδηγούν από το ένα δωμάτιο στο άλλο. Ο Λαβύρινθος έχει συγκεκριμένη είσοδο $s \in V$ και έξοδο $t \in V$. Η συνάρτηση βάρους κορυφών p αναπαριστά τι συναντούν οι παίκτες σε κάθε δωμάτιο. Ειδικότερα, έχουμε $p(v) = 0$, όταν το δωμάτιο είναι άδειο, $p(v) > 0$, όταν το δωμάτιο περιέχει ένα μαγικό φίλτρο, και $p(v) < 0$, όταν το δωμάτιο κατοικείται από ένα τέρας. Όταν ένας παίκτης με δύναμη P βρεθεί στο δωμάτιο v, η δύναμή του αλλάζει σε $P + p(v)$. Μετά την αποχώρηση του παίκτη από το δωμάτιο v, το τέρας ή το μαγικό φίλτρο ανανεώνονται. Υποθέτουμε ότι ο παίκτης ξεκινά στην είσοδο s με δύναμη P_0, ότι το δωμάτιο εισόδου είναι άδειο (άρα $p(s) = 0$), και ότι υπάρχει πάντα διαδρομή από την είσοδο s στην έξοδο t του Λαβύρινθου.

Για να μεγιστοποιήσουμε τα έσοδα από το videogame, θέλουμε να διαπιστώνουμε αποδοτικά ποια είναι η ελάχιστη δύναμη P_0, με την οποία αν ξεκινήσει ένας παίκτης στην είσοδο s, μπορεί να φτάσει "ζωντανός" στην έξοδο t. Μια $s - t$ διαδρομή π είναι r-*ασφαλής*, αν ο παίκτης, ξεκινώντας με δύναμη $P_0 = r$, φτάνει "ζωντανός" στην έξοδο, ακολουθώντας την π. Ένας Λαβύρινθος $G(V, E, p)$ είναι r-*ασφαλής*, αν περιέχει r-ασφαλή $s - t$ διαδρομή π.

Για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα διατυπώσετε.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο Λαβύρινθο $G(V, E, p)$, στον οποίο δεν υπάρχουν κύκλοι που ενισχύουν τη δύναμη του παίκτη, και δεδομένη τιμή r, αποφαίνεται αν ο Λαβύρινθος G είναι r-ασφαλής.

2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο Λαβύρινθο $G(V, E, p)$, στον οποίο μπορεί να υπάρχουν κύκλοι που ενισχύουν τη δύναμη του παίκτη, και δεδομένη τιμή r, αποφαίνεται αν ο Λαβύρινθος G είναι r-ασφαλής.
3. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο Λαβύρινθο $G(V, E, p)$, υπολογίζει την ελάχιστη τιμή r για την οποία ο Λαβύρινθος G είναι r-ασφαλής.

Άσκηση 3: Ταξίδι σε Περίοδο Ενεργειακής Κρίσης (2 μον.)

Ταξιδεύετε από την πόλη s στην πόλη t μέσω οδικού δικτύου που περιγράφεται από κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ (με $s, t \in V$) με n κορυφές και m ακμές. Υπό κανονικές συνθήκες, θα ακολουθούσατε τη συντομότερη $s - t$ διαδρομή. Αλλά με τις τιμές της βενζίνης στα ύψη, έχετε αποφασίσει να ακολουθήσετε την *οικονομικότερη* διαδρομή, με βάση την τιμή της βενζίνης στις πόλεις κατά μήκος της διαδρομής σας. Το ντεπόζιτο του αυτοκινήτου σας χωράει μέχρι B λίτρα βενζίνης. Για κάθε ακμή $e \in E$, έχετε υπολογίσει με ακρίβεια την ποσότητα βενζίνης $b(e) \in \mathbb{N}$ (σε λίτρα) που απαιτείται για να διασχίσετε την e με το αυτοκίνητό σας. Έχετε ακόμη καταγράψει την τιμή $c(v)$ (σε ευρώ / λίτρο) της βενζίνης σε κάθε πόλη $v \in V$ (μπορείτε να ανεφοδιαστείτε μόνο στις πόλεις / κορυφές του οδικού δικτύου). Υποθέτοντας ότι ξεκινάτε με άδειο ντεπόζιτο από την s (οπότε αναγκαστικά θα αγοράσετε μια ποσότητα βενζίνης στην s), ότι θέλετε να καταλήξετε με άδειο ντεπόζιτο στην t, και ότι πρέπει πάντα η ποσότητα της βενζίνης στο ντεπόζιτό σας να κυμαίνεται μεταξύ 0 και B, θέλετε να υπολογίσετε τη διαδρομή (και το αντίστοιχο πλάνο ανεφοδιασμού) που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος για να ταξιδέψετε από την s στην t.

Για τις παρακάτω δύο περιπτώσεις, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα διατυπώσετε.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του πιο οικονομικού πλάνου ανεφοδιασμού όταν το G είναι ένα $s - t$ μονοπάτι $(s, v_2, \dots, v_{n-1}, t)$ με n κορυφές.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της πιο οικονομικής $s - t$ διαδρομής (και του αντίστοιχου πλάνου ανεφοδιασμού), για τη γενική περίπτωση, όπου το G μπορεί να είναι οποιοδήποτε κατευθυνόμενο γράφημα.

Άσκηση 4: Επαναφορά της Ομαλότητας στη Χώρα των Αλγορίθμων (1.5 μον.)

Τις τελευταίες εβδομάδες έχουμε γενικευμένες συγκρούσεις μεταξύ Στρατού (βλ. δυνάμεων της νέας δημοκρατικά εκλεγμένης κυβέρνησης) και Εξτρεμιστών (βλ. δυνάμεων που υποστηρίζουν την προηγούμενη κυβέρνηση της χώρας, η οποία ηττήθηκε στις πρόσφατες εκλογές και αρνείται να αποδεχθεί το αποτέλεσμα) κατά μήκος της κεντρικής οδικής αρτηρίας της Χώρας των Αλγορίθμων.

Η κεντρική οδική αρτηρία έχει τη μορφή μιας απεριόριστης ευθείας, όπου οι θέσεις καθορίζονται με βάση την απόσταση (σε χιλιόμετρα) από την αρχή της, που αντιστοιχεί στο χιλιόμετρο 0. Οι Εξτρεμιστές έχουν εγκαθιδρύσει βάσεις ανεφοδιασμού σε ορισμένα σημεία της οδικής αρτηρίας, τις οποίες χρησιμοποιούν για να υποστηρίζουν τις δυνάμεις τους. Η ύπαρξη βάσης σε απόσταση το πολύ d είναι αναγκαία για την ενεργή παρουσία δυνάμεων Εξτρεμιστών σε μια θέση. Αν κάποιες βάσεις καταστραφούν, όλες οι δυνάμεις Εξτρεμιστών που θα βρεθούν χωρίς υποστήριξη από βάση σε απόσταση το πολύ d παραδίδονται άμεσα.

Ο Στρατηγός Δ γνωρίζει με ακρίβεια τις θέσεις των δυνάμεων Στρατού, των δυνάμεων Εξτρεμιστών και των βάσεων Εξτρεμιστών στην κεντρική οδική αρτηρία. Θέλει να σχεδιάσει μια γενικευμένη επίθεση που θα κάμψει πλήρως την αντίσταση των Εξτρεμιστών και θα τερματίσει οριστικά τις συγκρούσεις. Δυνάμεις Στρατού σε μια θέση x μπορούν να αιχμαλωτίσουν δυνάμεις Εξτρεμιστών σε μια θέση y ή να καταστρέψουν μια βάση τους στη θέση y εξαπολύοντας επίθεση με συνολικό κόστος ανάλογο της απόστασης $|x - y|$ (το κόστος είναι ίδιο είτε πρόκειται ο Στρατός να αιχμαλωτίσει Εξτρεμιστές είτε να καταστρέψει μια βάση τους, ποτέ δεν μπορεί να κάνει και τα δύο). Μετά από μια τέτοια επίθεση, οι δυνάμεις Στρατού πρέπει να επιστρέψουν στην αρχική τους θέση y για ανασύνταξη. Μετά την ανασύνταξη, οι δυνάμεις Στρατού μπορούν να εξαπολύσουν νέα επίθεση.

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο τις θέσεις των δυνάμεων Στρατού $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, των δυνάμεων Εξτρεμιστών $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{Z}$, των βάσεων Εξτρεμιστών $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$, και τη μέγιστη απόσταση υποστήριξης από βάση Εξτρεμιστών $d \in \mathbb{N}$, υπολογίζει το ελάχιστο κόστος μιας γενικευμένης επίθεσης που θα κάμψει πλήρως την αντίσταση των Εξτρεμιστών. Η αντίσταση των Εξτρεμιστών θα έχει καμφθεί πλήρως όταν όλες οι δυνάμεις τους θα έχουν είτε αιχμαλωτιστεί είτε παραδοθεί (μπορεί να υπάρχουν βάσεις σε λειτουργία, αν δεν υπάρχουν δυνάμεις Εξτρεμιστών για να υποστηρίξουν). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 5: Αναγωγές και NP-Πληρότητα (2.5 μον.)

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-Πλήρη:

Τακτοποίηση Ορθογωνίων Παραλληλογράμμων

Είσοδος: n ορθογώνια παραλληλόγραμμα $A_1, \ldots, A_n$, διαστάσεων $1 \times x_1, \ldots, 1 \times x_n$, αντίστοιχα, και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο B συνολικού εμβαδού $x_1 + \cdots + x_n$. Θεωρούμε ότι τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι θετικοί ακέραιοι πολυωνυμικά μεγάλοι σε σχέση με το n.

Ερώτηση: Είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $A_1, \ldots, A_n$ εντός του B χωρίς επικαλύψεις;

Μέγιστη Τομή με Βάρη στις Κορυφές

Είσοδος: Ακέραιος $B \geq 1$ και πλήρες γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές, όπου κάθε κορυφή v έχει ακέραιο βάρος $w(v) \geq 1$ και κάθε ακμή $e = \{u, v\}$ έχει βάρος $w(e) = w(u)w(v)$.

Ερώτηση: Υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ στο G τέτοια ώστε το συνολικό βάρος των ακμών που διασχίζουν την τομή να είναι τουλάχιστον B;

Αραιό Γράφημα (Sparse Subgraph)

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και ακέραιος $k \geq 1$.

Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $S \subseteq V$ με τουλάχιστον k κορυφές τέτοιο ώστε το επαγόμενο υπογράφημα $G[S]$ του G, που ορίζεται από τις κορυφές του S, να περιέχει το πολύ k ακμές;

Συνάθροιση Προτιμήσεων (Preference Aggregation)

Είσοδος: Σύνολο $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, σύνολο $C \subset A \times A$ με m διατεταγμένα ζεύγη της μορφής (a_i, a_j), με $a_i \neq a_j$, και ακέραιος $k \geq 1$.

Ερώτηση: Υπάρχει μετάθεση π του A (δηλ. $\pi : [n] \to [n]$) που "διαφωνεί" με το πολύ k διατεταγμένα ζεύγη στο C; Μια μετάθεση π του A "διαφωνεί" με ένα ζεύγος $(a_i, a_j) \in C$, αν $\pi(i) > \pi(j)$.

Συντομότερο Μονοπάτι με Περιορισμούς (Constrained Shortest Path)

Είσοδος: Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w, c)$, όπου κάθε ακμή e έχει ακέραιο μήκος $w(e) \geq 0$ και ακέραιο κόστος $c(e) \geq 0$, κορυφές s, t και ακέραιοι $W, C \geq 0$.

Ερώτηση: Υπάρχει $s - t$ μονοπάτι στο G με συνολικό μήκος μικρότερο ή ίσο του W και συνολικό κόστος μικρότερο ή ίσο του C;

Άσκηση 6: Αλγόριθμος Borůvka (bonus)

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με n κορυφές, m ακμές και θετικό βάρος $w(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$, όπου τα βάρη των ακμών είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους.

1. Να δώσετε μια πλήρη (και αναλυτική) απόδειξη ορθότητας για τον αλγόριθμο Borůvka. Ειδικότερα, να δείξετε ότι (i) ο αλγόριθμος Borůvka καταλήγει πάντα σε ένα συνδετικό δέντρο T, και (ii) ότι το συνδετικό δέντρο T στο οποίο καταλήγει ο αλγόριθμος είναι πράγματι ελάχιστου βάρους.

2. Να περιγράψετε λεπτομερώς μια υλοποίηση του αλγόριθμου με χρόνο εκτέλεσης $O(m \log n)$.
3. Να εξηγήσετε πως μπορούμε να συνδυάσουμε την παραπάνω υλοποίηση του αλγόριθμου Borůvka με την υλοποίηση του αλγόριθμου Prim με σωρό Fibonnaci ώστε να επιτύχουμε χρόνο εκτέλεσης $O(m \log \log n)$ για το πρόβλημα του Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου.
4. Καλούμε *σύμπτυξη* (contraction) μια ακμής $e = \{u, v\}$ ενός (απλού μη κατευθυνόμενου) γραφήματος G τη διαδικασία κατά την οποία προσθέτουμε στο G μια νέα κορυφή uv, "μετακινούμε" κάθε ακμή που προσπίπτει στην u ή στην v (εκτός από την e) ώστε να προσπίπτει στη νέα κορυφή uv, διαγράφουμε τις κορυφές u και v και την ακμή e, και καθιστούμε το γράφημα που προκύπτει απλό (αν δεν είναι ήδη).

   Λέμε ότι μια κλάση $\mathcal{C}$ απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων είναι *βολική* αν (i) η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς τη σύμπτυξη ακμής (δηλ. για κάθε $G \in \mathcal{C}$, το γράφημα που προκύπτει από την σύμπτυξη μιας οποιασδήποτε ακμής του G ανήκει επίσης στην $\mathcal{C}$), και (ii) το πλήθος ακμών κάθε $G(V, E) \in \mathcal{C}$ είναι $O(|V|)$. Π.χ., η κλάση των απλών επίπεδων γραφημάτων είναι βολική.

   Να δείξετε ότι ο αλγόριθμος Borůvka χρειάζεται χρόνο $O(|V|)$ για τον υπολογισμό του Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου ενός απλού μη κατευθυνόμενο γραφήματος $G(V, E, w)$ που ανήκει σε μια βολική κλάση γραφημάτων (π.χ., αν το G είναι απλό επίπεδο γράφημα).

Άσκηση 7: Μονοπάτια Ελάχιστου Bottleneck Κόστους για όλα τα Ζεύγη Κορυφών (bonus)

Θεωρούμε ένα απλό συνεκτικό *μη κατευθυνόμενο* γράφημα $G(V, E, \ell)$, με n κορυφές, m ακμές και θετικό μήκος $\ell(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$. Αξιολογούμε τα μονοπάτια μεταξύ δύο κορυφών u, v με βάση το μήκος της βαρύτερης ακμής τους. Το (bottleneck) *κόστος* $c(p)$ ενός $u - v$ μονοπατιού p είναι $c(p) = \max_{e \in p}\{\ell(e)\}$. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε ένα (όσο το δυνατόν πιο αραιό) συνδετικό υπογράφημα του G που για κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών $u, v \in V$, περιέχει ένα $u - v$ μονοπάτι ελάχιστου κόστους.

1. Έστω T^* ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G. Να δείξετε ότι για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, το μοναδικό $u - v$ μονοπάτι στο T^* αποτελεί ένα $u - v$ μονοπάτι ελάχιστου κόστους.
2. Για κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών $u, v \in V$, συμβολίζουμε με p^*_{uv} ένα $u - v$ μονοπάτι ελάχιστου κόστους. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το συνολικό κόστος των μονοπατιών ελάχιστου κόστους για όλα τα ζευγάρια διαφορετικών κορυφών του G. Δηλαδή, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει την ποσότητα $\sum_{u,v \in V, u \neq v} c(p^*_{uv})$. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Υπόδειξη:* Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε το ελάχιστο κόστος $c(p^*_{uv})$ για όλα τα ζεύγη κορυφών στο G!

Άσκηση 8: Επιβεβαίωση και Αναπροσαρμογή Μέγιστης Ροής (bonus)

Θεωρούμε (κατευθυνόμενο) $s - t$ δίκτυο $G(V, E, c)$ με n κορυφές, m ακμές, και (θετικές) ακέραιες χωρητικότητες c στις ακμές.

1. Δίνεται ροή f που (υποτίθεται ότι) αποτελεί μια μέγιστη ροή στο G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν η f αποτελεί πράγματι μια μέγιστη ροή στο G. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.
2. Έστω ότι η f αποτελεί μια μέγιστη ροή στο G, αλλά ανακαλύπτουμε ότι η πραγματική χωρητικότητα μια ακμής e είναι μικρότερη κατά k μονάδες, $1 \leq k \leq c_e$, από τη χωρητικότητα c_e που είχαμε θεωρήσει αρχικά. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που (εφόσον χρειάζεται) τροποποιεί την f σε μία μέγιστη ροή f' για το δίκτυο G' που προκύπτει από το G θέτοντας $c'_e = c_e - k$. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού μιας μέγιστης ροής εξ' αρχής.

3. Λόγω μιας φυσικής καταστροφής στο t, πρέπει να διακόψουμε τη λειτουργία του δικτύου. Επειδή όμως η πλήρης διακοπή της ροής από το s στο t για σημαντικό χρονικό διάστημα θα προκαλούσε την καταστροφή των αγωγών - ακμών του δικτύου, πρέπει να διατηρήσουμε μια ελάχιστη ροή ℓ_e σε κάθε ακμή e. Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε την ελάχιστη ροή g για την οποία ισχύει ότι $c_e \geq g_e \geq \ell_e$ σε κάθε ακμή e. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο ένα $s-t$ δίκτυο $G(V, E, c, \ell)$, όπου c_e είναι η μέγιστη και ℓ_e είναι η ελάχιστη ροή που επιτρέπουμε σε κάθε ακμή, υπολογίζει μια ελάχιστη $s-t$ ροή g. Αν σας διευκολύνει, μπορείτε να θεωρήσετε ως δεδομένη τη μέγιστη ροή f στο αρχικό δίκτυο $G(V, E, c)$ και ότι $f_e \geq \ell_e$ σε κάθε ακμή e. Να προσπαθήσετε να βελτιστοποιήσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Να διατυπώσετε συνοπτικά το επιχείρημα που εξασφαλίζει ότι ο αλγόριθμός σας υπολογίζει πράγματι μια ελάχιστη $s-t$ ροή.