Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 30/5/2022

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1 μον.). Θεωρούμε μια ακολουθία N θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς n διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \geq 2^n$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ., στην ακολουθία $7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7$, όπου $n = 3$ και $N = 2^3$, το γινόμενο των έξι τελευταίων διαδοχικών θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέμα 2 (Γραφήματα - Βασικές Έννοιες, 2.4 μον.). Θεωρούμε το γράφημα $G(n, m) = C_n * K_m$ που προκύπτει από τη σύνδεση (join) του κύκλου με $n \geq 3$ κορυφές με το πλήρες γράφημα με $m \geq 1$ κορυφές.

1. Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το γράφημα $G(n, m)$ (ως συνάρτηση των n και m);
2. Για ποιες τιμές των n και m το το γράφημα $G(n, m)$ έχει κύκλο Euler;
3. Για ποιες τιμές των n και m το το γράφημα $G(n, m)$ έχει κύκλο Hamilton;
4. Ποιος είναι ο χρωματικός αριθμός του $G(n, m)$;

Θέμα 3 (Διμερή Γραφήματα, 1 μον.). Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V, E)$, υπάρχει μια μοναδική διαμέριση των κορυφών του V σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το G έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

Θέμα 4 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 2.3 μον.). (α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G ώστε για κάθε κορυφή u, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της u να διαφέρουν το πολύ κατά 1.

(β) Θεωρούμε την κλάση των απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων με $n \geq 4$ κορυφές που έχουν κύκλο Hamilton και διατηρούν αυτή την ιδιότητα αν αφαιρεθεί οποιαδήποτε ακμή τους.

1. Έστω G αυθαίρετα επιλεγμένο γράφημα αυτής της κλάσης με $n \geq 4$ κορυφές. Να δείξετε ότι το G έχει τουλάχιστον $3n/2$ ακμές.
2. Να δείξετε ότι για κάθε άρτιο $n \geq 6$, υπάρχει διμερές γράφημα με n κορυφές και $3n/2$ ακμές που ανήκει σε αυτή την κλάση γραφημάτων.

Θέμα 5 (Επιπεδότητα, 2.3 μον.). (α) Για κάθε φυσικό $n \geq 2$, ορίζουμε το απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα H_n με σύνολο κορυφών $V_n = \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ και σύνολο ακμών

$$E_n = \big\{\{i, i+1\} : i \in \{0, 1, \ldots, 2n-2\}\big\} \cup \big\{\{2n-1, 0\}\big\} \cup \big\{\{i, i+n\} : i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\big\}$$

(i) Να δείξετε ότι το H_n είναι επίπεδο αν και μόνο αν $n = 2$. (ii) Να προσδιορίσετε τον χρωματικό αριθμό του H_n για κάθε τιμή του $n \geq 2$.

(β) Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα προκύπτει ως ένωση το πολύ πέντε ακυκλικών γραφημάτων. Υπενθυμίζεται ότι η ένωση δύο γραφημάτων $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ είναι το γράφημα $G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Θέμα 6 (Επαγωγή και Δέντρα, 1 μον.). Θεωρούμε συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και σύνολο $T \subseteq V$, με $|T| = 2\ell \leq n$ κορυφές, για κάποιο $\ell \geq 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ℓ μονοπάτια $p_1, \ldots, p_\ell$ στο G, χωρίς κοινές ακμές μεταξύ τους, στα οποία κάθε κορυφή του T εμφανίζεται ως άκρο ενός από αυτά. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να δείξετε το ζητούμενο με επαγωγή στο n, θεωρώντας την ειδική περίπτωση που το G είναι δέντρο, και έπειτα να εξηγήσετε γιατί το ζητούμενο ισχύει για κάθε συνεκτικό γράφημα G.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=23366` μέχρι τα μεσάνυχτα της Δευτέρας 30/5.

Καλή Επιτυχία!