

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1. Έστω τα διανύσματα  $\vec{a} = (1, 0, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1, 3)$ ,  $\vec{c} = (2, 1, -2)$ ,  $\vec{d} = (3, 0, 6)$  και  $\vec{e} = (2, 1, -1)$ . Υπολογίστε τα ακόλουθα:

α.  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle$  και  $\langle -4\vec{a}, \vec{c} + 3\vec{b} \rangle$ .

β.  $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ ,  $\widehat{(-4\vec{a}, \vec{c} + 3\vec{b})}$ .

γ.  $\vec{a} \times \vec{c}$ ,  $\vec{a} \times \vec{d}$ ,  $\vec{c} \times \vec{a}$  και  $\vec{a} \times (\vec{c} + \vec{d})$ .

δ.  $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ ,  $pr_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$ ,  $pr_{\vec{d}}\vec{a}$  και  $pr_{\vec{a}}\vec{e}$ .

ε.  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

στ. Το εμβαδόν  $E$  του παραλληλογράμμου με πλευρές  $\vec{b}, \vec{c}$  και τον όγκο  $V$  του τετραέδρου με ακμές  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{e}$ .

2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

α.  $(\varepsilon_1)$  παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{u} = (-3, 1, 2)$  και διέρχεται από το σημείο  $P_0(4, 6, 3)$ .

β.  $(\varepsilon_2)$  διέρχεται από τα σημεία  $P_1(3, -5, 2)$  και  $P_2(1, 0, -1)$ .

γ.  $(\varepsilon_3)$  είναι η τομή των επιπέδων  $(\Pi_1) : 3x - y + 2z = 1$  και  $(\Pi_2) : x - 4y + 3z - 2 = 0$ .

δ.  $(\varepsilon_4)$  είναι η τομή των επιπέδων  $(\Pi_3) : 3x - y + z = 1$  και  $(\Pi_4) : x - y = 0$ .

3. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου  $(\Pi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

α.  $(\Pi_1)$  κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{u} = (3, -1, 2)$  και περιέχει το σημείο  $P_0(1, 1, 0)$ .

β.  $(\Pi_2)$  παράλληλο στα διανύσματα  $\vec{u}_1 = (-2, 1, 0)$  και  $\vec{u}_2 = (3, -2, 2)$  και περιέχει το σημείο  $P_0(6, 6, 1)$ .

γ.  $(\Pi_3)$  περιέχει τα σημεία  $A(0, 1, 1)$ ,  $B(2, -1, 1)$  και  $\Gamma(4, 5, 3)$ .

δ.  $(\Pi_4)$  περιέχει τις ευθείες  $(\varepsilon_1) : x = y - 1 = z$  και  $(\varepsilon_2) : 2 - x = y - 1 = z$

4. Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1) : 3x - y - z = 1, x - y = 0$  και  $(\varepsilon_2) : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}$ . Να αποδείξετε ότι είναι παράλληλες και να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.

5. Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1) : x - y + 2z = 4, x + 2y - z = 10$  και  $(\varepsilon_2) : x - 1 = y - 2 = z - 2$ . Να αποδειχθεί ότι είναι ασύμβατες και να βρείτε τα ίχνη της κοινής κάθετης.

6. Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1) : \frac{3-x}{2} = 1 - y = z$  και  $(\varepsilon_2) : \frac{x}{a} = 1 - y = z, a \neq 0$ . Να βρείτε τις τιμές του  $a$  για τις οποίες οι ευθείες

α. είναι παράλληλες

β. τέμνονται

γ. είναι ασύμβατες

δ. ορίζουν επίπεδο και να βρεθεί η εξίσωσή του.

7. Δίνεται η σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  και το επίπεδο  $(\Pi) : y + z = 1$ . Να δειχθεί ότι τέμνονται και να βρεθεί ο κύκλος  $(\Gamma)$  που είναι η τομή τους. Επιπλέον να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που έχει μέγιστο κύκλο τον  $(\Gamma)$ .