



# Γραμμική Άλγεβρα

## 1α. Πίνακες και Βασικές Πράξεις

Κάλλια Παυλοπούλου

2021-2022

# ΠΙΝΑΚΕΣ

Ένα σύστημα δύο εξισώσεων α' βαθμού με δύο αγνώστους, π.χ.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

χαρακτηρίζεται από τους έξι αριθμούς: 2, 3, 1, 3, -1, και 7. Ο καθένας έχει συγκεκριμένο «ρόλο» στο σύστημα:

- είναι ή *συντελεστής του x* ή *συντελεστής του y* ή *σταθερός όρος*, και
- ανήκει ή στην *πρώτη* ή στη *δεύτερη εξίσωση*.

Το σύστημα θα μπορούσε να οριστεί πλήρως από τους 6 παραπάνω αριθμούς, γραμμένους με ορθογώνια διάταξη σε 2 γραμμές και 3 στήλες, ώστε να δηλώνεται η θέση που κατέχουν στο σύστημα:

Συντελεστής x	Συντελεστής y	Σταθερός όρος		
↓	↓	↓		
2	3	1	←	Της α' εξίσωσης
3	-1	7	←	Της β' εξίσωσης

- Μια τέτοια διάταξη αριθμών λέγεται πίνακας 2 γραμμών και 3 στηλών ή απλά πίνακας 2 × 3.
- Γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \text{ ή } \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{array} \right\|$$

# Ορισμός Πίνακα

- Γενικά κάθε ορθογώνια διάταξη  $\mu \cdot \nu$  αριθμών ( $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ) σε  $\mu$  γραμμές και  $\nu$  στήλες λέγεται **πίνακας  $\mu \times \nu$**  (matrix) και συμβολίζεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} = [a_{ij}], 1 \leq i \leq \mu, 1 \leq j \leq \nu.$$

- Οι αριθμοί που ορίζουν έναν πίνακα λέγονται **στοιχεία** του πίνακα (elements of a matrix) .
- Το στοιχείο που ανήκει στην  $i$  -γραμμή ( $1 \leq i \leq \mu$ ) και  $j$  -στήλη ( $1 \leq j \leq \nu$ ) συμβολίζεται συνήθως  $a_{ij}$ .
- Οι θετικοί ακέραιοι  $\mu, \nu$  ονομάζονται **διαστάσεις** του πίνακα.
- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης  $\mu \times \nu$  συμβολίζεται με  $\Pi_{\mu \times \nu}$ .
- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης  $\nu \times \nu$  συμβολίζεται με  $\Pi_{\nu}$ .

## Παράδειγμα:

Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ .

Το στοιχείο  $a_{32}$  του πίνακα  $A$  είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην 3<sup>η</sup> γραμμή και τη 2<sup>η</sup> στήλη, δηλαδή ο αριθμός 8.

## Σημείωση:

Όταν πρόκειται για πίνακες μεγάλων διαστάσεων, μπορούμε να διαχωρίσουμε τον αριθμό που προσδιορίζει τη γραμμή από τη στήλη με ένα κόμμα.

- Σε έναν πίνακα  $100 \times 50$  το στοιχείο  $a_{84,3}$  ανήκει στην 84<sup>η</sup> γραμμή και την 3<sup>η</sup> στήλη ενώ το  $a_{8,43}$  ανήκει στην 8<sup>η</sup> γραμμή και την 43<sup>η</sup> στήλη.

## Η σχέση της ισότητας στο σύνολο $\Pi_{\mu \times \nu}$

Δύο πίνακες  $A = [a_{ij}]$  και  $B = [\beta_{ij}]$  ίδιου τύπου  $\mu \times \nu$  είναι **ίσοι** (equal) αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ταυτίζονται. Δηλαδή:

$$A = B \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu, a_{ij} = \beta_{ij}.$$

Για κάθε ( $\forall$ ), για όλες τις τιμές του  $i$  και για όλες τις τιμές του  $j$  τα στοιχεία του πίνακα  $A$  να είναι ίσα με τα αντίστοιχα στοιχεία του  $B$ .

# Χρήση Πινάκων

1) Το μαθητικό δυναμικό ενός σχολείου κατά φύλο και κατά τάξη μπορεί να παρασταθεί με πίνακα  $2 \times 3$ . Π.χ.

$$\begin{bmatrix} 125 & 82 & 60 \\ 101 & 85 & 57 \end{bmatrix}$$

το οποίο δίνει ένα πλήθος πληροφοριών: στην Α τάξη φοιτούν 125 αγόρια και 101 κορίτσια, τα κορίτσια της Γ τάξης είναι 57, κτλ.

A	B	Γ	
125	82	60	Αγόρια
101	85	57	Κορίτσια

2) Το προσωπικό ενός εργοστασίου κατανεμημένο σε 3 κατηγορίες και σε 5 τμήματα μπορεί να παρασταθεί με πίνακα π.χ.  $3 \times 5$ :

$$\begin{bmatrix} 128 & 205 & 316 & 107 & 156 \\ 250 & 318 & 354 & 285 & 204 \\ 400 & 389 & 425 & 376 & 158 \end{bmatrix}$$

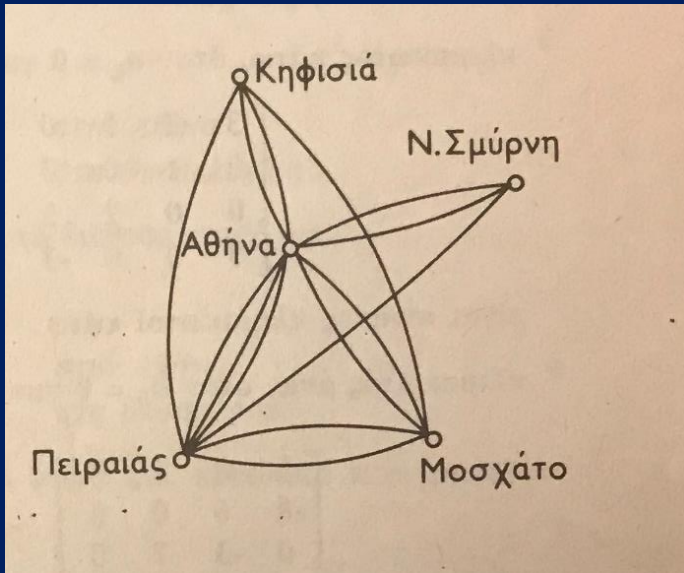
που μας πληροφορεί ότι

στο 4<sup>ο</sup> τμήμα της 2<sup>ης</sup> κατηγορίας απασχολούνται 285 εργάτες,

στο 3<sup>ο</sup> τμήμα της 3<sup>ης</sup> κατηγορίας 425 εργάτες κ.τ.λ.



3) Στο επόμενο σχήμα έχουμε ένα μέρος του συγκοινωνιακού δικτύου της περιοχής της πρωτεύουσας:



Οι πληροφορίες αυτές θα μπορούσαν να δοθούν και στην μορφή του επόμενου πίνακα. Σε κάθε κουτάκι σημειώνεται το πλήθος των συγκοινωνιακών συνδέσεων μεταξύ των αντίστοιχων περιοχών της πρωτεύουσας:

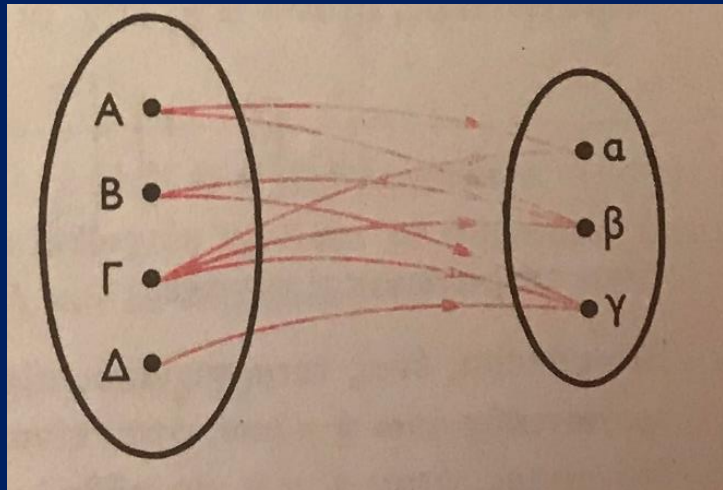
	ΑΘΗΝΑ	ΠΕΙΡΑΙΑΣ	ΜΟΣΧΑΤΟ	Ν. ΣΜΥΡΝΗ	ΚΗΦΙΣΙΑ
ΑΘΗΝΑ	0	3	2	2	2
ΠΕΙΡΑΙΑΣ	3	0	2	1	1
ΜΟΣΧΑΤΟ	2	2	0	0	1
Ν. ΣΜΥΡΝΗ	2	1	0	0	0
ΚΗΦΙΣΙΑ	2	1	1	0	0

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα  $5 \times 5$  :

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Μια διμελής σχέση με την οποία συνδέονται τα στοιχεία δύο πεπερασμένων συνόλων μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι 1 ή 0, για την περίπτωση σχετιζόμενων ή όχι στοιχείων των συνόλων.

Π.χ. η διμελής σχέση που δίνεται με το βελοδιάγραμμα



Μπορεί να αναπαρασταθεί με τον πίνακα

	α	β	γ
A	1	1	0
B	0	1	1
Γ	1	1	1
Δ	0	0	1

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα  $4 \times 3$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Είδη Πινάκων $\mu \times \nu$

- Πίνακας-**γραμμή**, όταν  $\mu=1$ , (τύπου  $1 \times \nu$ )

$$\text{π.χ. } A = [3 \quad -6 \quad 7] \in \Pi_{1 \times 3}, B = [0 \quad 1] \in \Pi_{1 \times 2}.$$

- Πίνακας-**στήλη**, όταν  $\nu=1$ , (τύπου  $\mu \times 1$ )

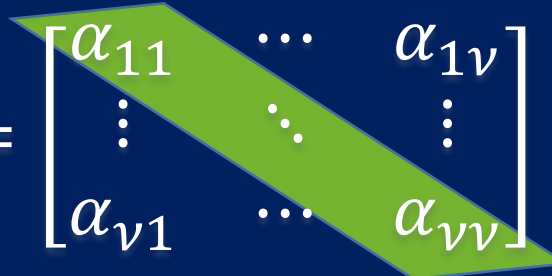
$$\text{π.χ. } \Gamma = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \Pi_{2 \times 1}, \Delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi_{3 \times 1}.$$

- Πίνακας-**στοιχείο**, όταν  $\mu=\nu=1$ , (τύπου  $1 \times 1$ )

$$\text{π.χ. } E=[-5], Z=[7], H=[0].$$

- **Τετραγωνικός (square matrix)** , όταν  $\mu=\nu$  , π.χ.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Γενική μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$


- Τα στοιχεία  $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$  λέγονται στοιχεία της **κύριας ή πρωτεύουσας διαγωνίου**
- Τα στοιχεία  $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2(\nu-1)}, \dots, \alpha_{\nu 1}$  λέγονται στοιχεία της **δευτερεύουσας διαγωνίου**
- Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου λέγεται **ίχνος** του πίνακα  $A$

$$\mathit{tr}A = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{\nu\nu}$$

**Σημείωση:** Σε μη τετραγωνικό πίνακα  $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$ , τα στοιχεία  $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{kk}$  όπου  $k = \min\{\mu, \nu\}$  καλούνται στοιχεία **της κυρίας διαγωνίου** του πίνακα  $A$ .

- Για παράδειγμα στους πίνακες  $A = [2 \ 0 \ 3]$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ ,
- το στοιχείο  $\alpha_{11} = 2$  είναι το μόνο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του  $A$ ,
- ενώ τα στοιχεία  $\beta_{11} = 1, \beta_{22} = 5, \beta_{33} = 9$  είναι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του  $B$ .

- **Τριγωνικός κάτω** όταν είναι τετραγωνικός  $[a_{ij}]$  τύπου  $n \times n$  και όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\forall i < j, a_{ij} = 0$$

π.χ.  $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

- **Τριγωνικός άνω** όταν είναι τετραγωνικός  $[a_{ij}]$  τύπου  $n \times n$  και όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\forall i > j, a_{ij} = 0$$

π.χ.  $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

Μπορεί να έχει 0 σε άλλες θέσεις, δεν είναι απαγορευτικό

Κύρια διαγώνιος

- **Διαγώνιος** (diagonal matrix), όταν είναι τετραγωνικός  $[a_{ij}]$  τύπου  $n \times n$  και ισχύει

$$\forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = 0$$

Δηλαδή τετραγωνικός όπου όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι όλα μηδέν.

π.χ.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Συμβολίζεται:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ή } \Delta = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

- Παρατήρηση:

Αν ένας πίνακας  $[a_{ij}]$  τύπου  $n \times n$  είναι ταυτόχρονα **τριγωνικός άνω και τριγωνικός κάτω**, τότε θα είναι **διαγώνιος** πίνακας και αντίστροφα.



# Πράξεις Πινάκων: Πρόσθεση Πινάκων

- Μία βιομηχανία ηλεκτρικών ειδών διαθέτει σε ένα μήνα:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
18	35	21	Στην Αθήνα
13	29	22	Στη Θεσσαλονίκη

- Και τον επόμενο μήνα:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
22	19	12	Στην Αθήνα
25	18	31	Στη Θεσσαλονίκη

- Τότε τους δύο αυτούς μήνες η βιομηχανία διέθεσε συνολικά:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
18+22	35+19	21+12	Στην Αθήνα
13+25	29+18	22+31	Στη Θεσσαλονίκη

- Η **κίνηση της βιομηχανίας κάθε μήνα** αλλά και **συνολικά** περιγράφεται αντίστοιχα με τους επόμενους πίνακες 2x3:

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 35 & 21 \\ 13 & 29 & 22 \end{bmatrix} \text{ η κίνηση της βιομηχανίας τον 1}^\circ \text{ μήνα}$$

$$B = \begin{bmatrix} 22 & 19 & 12 \\ 25 & 18 & 31 \end{bmatrix} \text{ η κίνηση της βιομηχανίας τον 2}^\circ \text{ μήνα}$$

Η **κίνηση της βιομηχανίας συνολικά** τους δύο μήνες:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 18 + 22 & 35 + 19 & 21 + 12 \\ 13 + 25 & 29 + 18 & 22 + 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 54 & 33 \\ 38 & 47 & 53 \end{bmatrix} = A + B$$

- Ο πίνακας  $\Gamma$  λέγεται **άθροισμα των πινάκων**  $A$  και  $B$ . Γενικά ορίζουμε:

Άθροισμα των  $\mu \times \nu$  πινάκων  $A = [\alpha_{ij}]$ ,  $B = [\beta_{ij}]$  λέγεται ο πίνακας  $\Gamma = A + B = [\gamma_{ij}]$ , διάστασης  $\mu \times \nu$ , του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των  $A$  και  $B$ , δηλαδή:

$$\forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu \quad \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{τότε } A + B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο σύνολο  $\Pi_{\mu \times \nu}$  η πρόσθεση είναι μια **εσωτερική πράξη** που ορίζεται ως εξής:

$$+: \Pi_{\mu \times \nu} \times \Pi_{\mu \times \nu} \rightarrow \Pi_{\mu \times \nu}, (A, B) \rightarrow A + B := [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$$

# Ιδιότητες Πρόσθεσης Πινάκων

**Αντιμεταθετική:**  $\forall A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}, A + B = B + A$

**Προσεταιριστική:**  $\forall A, B, \Gamma \in \Pi_{\mu \times \nu}, (A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$

**Ουδέτερο στοιχείο:**  $\forall A \in \Pi_{\mu \times \nu}, \exists \mathbf{O} \in \Pi_{\mu \times \nu}, A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$

Το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση είναι ο μηδενικός πίνακας  $\mathbf{O} = (0)_{\mu \times \nu}$ , που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με 0.

**Αντίθετος Πίνακας (opposite):**

$$\forall A \in \Pi_{\mu \times \nu}, \exists -A \in \Pi_{\mu \times \nu}, A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{O}.$$

Ο αντίθετος πίνακας είναι ο  $-A = [-a_{ij}]$ , που στη θέση  $(i, j)$  έχει το στοιχείο  $-a_{ij}$ .

## Παράδειγμα αντίθετου πίνακα:

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\bullet -A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bullet A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 3}$$

## Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα ή βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Αν ο πίνακας  $A = [a_{ij}]$  είναι τύπου  $\mu \times \nu$ , ονομάζουμε **βαθμωτό γινόμενο του πραγματικού (ή μιγαδικού) αριθμού  $\lambda$  με τον πίνακα  $A$  ή πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα** τον πίνακα τύπου  $\mu \times \nu$  τον οποίο λαμβάνουμε αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του  $A$  με  $\lambda$ . Το γινόμενο αυτό συμβολίζεται με  $\lambda \cdot A$  και ισχύει ότι:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot [a_{ij}] = [\lambda \cdot a_{ij}]$$

Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } 4 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 0 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot (-1) & 4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 12 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

# Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}$ , ισχύουν:

i)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

ii)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

iii)  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

iv)  $1A = A$ , όπου 1 είναι η μονάδα των πραγματικών αριθμών

v)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = (A\lambda)B = A(\lambda B)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$ ,  $B \in \Pi_{\nu \times \rho}$

Παρατήρηση: Θα δούμε αργότερα πως το σύνολο  $\Pi_{\mu \times \nu}$  εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα, αποκτά τη δομή διανυσματικού χώρου.