ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 1/9/2021
ΟΜΑΔΑ Α (Ο ΑΜ λήγει σε 0, 2, 4, 6, 8)

Οι απαντήσεις των θεμάτων να υποβληθούν *σκαναρισμένες*, με *ονοματεπώνυμο και ΑΜ.*

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1 h και 20 min

I. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές είναι λάθος. Να δικαιολογηθούν οι τρείς από τις έξι απαντήσεις σας*:

(1) (*0,5 μον*) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f^{''}(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(x)\geq f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x.$$

Απάντηση: *Η πρόταση είναι* ***σωστή***. *Πράγματι, αν $x=0$ η ανισότητα ισχύει τετριμμένα ενώ αν $x\neq 0$ τότε από τον Τύπο Taylor υπάρχει ξ μεταξύ των x και 0 τέτοιο ώστε*

$$f(x)=T_1(x)+R_1(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\geq f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x$$

αφού από την υπόθεση $f''(x)\geq 0$ έπεται ότι $f''(\xi)\geq 0$.

(2) (*0,5 μον*) Για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\arccos(\cos x)=x$.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι* ***λάθος*** *(ισχύει μόνο για τα $x\in[0,\pi]$). Πράγματι, η $\arccos x$ είναι η αντίστροφη του περιορισμού της $\cos x$ στο $[0,\pi]$ και άρα το πεδίο τιμών της είναι το $[0,\pi]$ και όχι όλο το $\mathbb{R}$. Πχ. αν $x=2\pi$ τότε $\arccos(\cos(2\pi))=\arccos(1)=0\neq 2\pi$.*

(3) (*0,5 μον*) Αν $0\leq n^2a_n\leq 1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι* ***σωστή***. *Πράγματι, $0\leq n^2a_n\leq 1\Rightarrow 0\leq a_n\leq\frac{1}{n^2}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.*

(4) (*0,5 μον*) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο μηδέν. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι* ***λάθος***, *πχ. η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει αλλά $\lim\frac{1}{n}=0$.*

(5) (*0,5 μον*) Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ συγκλίνει στο $x=2$ τότε συγκλίνει και στο $x=-1$.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι* ***σωστή***. *Πράγματι αφού η η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ συγκλίνει στο $x=2$ και έχει κέντρο το $x_0=0$ έπεται ότι η ακτίνα σύγκλισης R είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι τουλάχιστον το $(-2,2)$ που περιέχει το $x=-1$.*

(6) (*0,5 μον*) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ένα κρίσιμο σημείο της f. Αν $f_{xx}(x_0,y_0)=0$ και $f_{xy}(x_0,y_0)\neq 0$ τότε το (x_0,y_0) είναι σαγματικό σημείο της f.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι* ***σωστή***. *Πράγματι, από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου έχουμε ότι $\Delta(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-(f_{xy}(x_0,y_0))^2=-(f_{xy}(x_0,y_0))^2<0$.*

ΙΙ. *Να γράψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων* :

ΑΣΚΗΣΗ 1. (α) (*0,5 μον.*) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n}(x-2)^n$.

(β)(*1,5 μον*) Σε ποια $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και σε ποιά αποκλίνει;

ΛΥΣΗ: (α) Είναι $a_n = \frac{1}{3^n n} \Rightarrow \rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3}$ (αφού $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Άρα $R = 1/\rho = 3$.

(β) Αφού το κέντρο είναι $x_0 = 2$ και η ακτίνα σύγκλισης $R = 3$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow x \in (-1, 5)$ και αποκλίνει για $x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$. Στο $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n}(-1-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει ως εναλλάσσουσα αρμονική. Αντίστοιχα στο $x = 5$ η δυναμοσειρά γίνεται η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και άρα αποκλίνει.

Συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει ακριβώς στα $x \in [-1, 5)$ και αποκλίνει στα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2. (α) (*1 μον.*) Βρείτε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x, y) = x^y$ με $x, y > 0$.

(β) (*1,5 μον.*) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 + 5$$

ΛΥΣΗ: (α) (α) Έχουμε $f(x, y) = x^y = \left(e^{\ln x}\right)^y = e^{y \ln x}$. Άρα παραγωγίζοντας ως προς x θεωρώντας το y ως σταθερά παίρνουμε

$$f_x(x, y) = e^{y\ln x} \cdot \frac{d(y \ln x)}{dx} = x^y \cdot \frac{y}{x} = yx^{y-1}$$

και αντίστοιχα παραγωγίζοντας ως προς y θεωρώντας το x ως σταθερά έχουμε

$$f_y(x, y) = e^{y\ln x} \cdot \frac{d(y \ln x)}{dy} = (\ln x) \cdot x^y.$$

(β) Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = -4x + 4y$. Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ -x + x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^3 \\ x = 0 \text{ ή } x = \pm 1 \end{cases}$$

και άρα παίρνουμε τρία κρίσιμα σημεία τα $(0, 0)$, $(1, 1)$ και $(-1, -1)$.

Επειδή $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{yy}(x, y) = 4$, $f_{xy}(x, y) = -4$ έπεται ότι $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = 48x^2 - 16$. Για το $(0, 0)$ έχουμε $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ οπότε το $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) > 0$ και άρα η f στα $(1, 1)$ και $(-1, -1)$ έχει τοπικά ελάχιστα.

ΑΣΚΗΣΗ 3. (α) (*1 μον.*) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_5^6 \frac{x}{x^2-10x+26}\,dx.$

(β) (*1,5 μον.*) Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$ συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν $\int_0^1 f(x)\,dx = 1/3$ υπολογίστε το $\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$, όπου με f^{-1} συμβολίζουμε την αντίστροφη της f.

ΛΥΣΗ: (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_5^6 \frac{x}{x^2-10x+26}\,dx &= \int_5^6 \frac{x}{(x-5)^2+1}\,dx \\
&\overset{y=x-5}{=} \int_0^1 \frac{y+5}{y^2+1}\,dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{y^2+1}\,dy + \int_0^1 \frac{5}{y^2+1}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(y^2+1)'}{y^2+1}\,dy + 5\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\,\Big|_0^1 + 5\arctan y\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + 5\arctan 1 = \ln\left(\sqrt{2}\right) + \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(β) Κάνοντας την αντικατάσταση $y=f(x) \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$ και με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy = \int_0^1 f^{-1}(f(x))f'(x)/dx = \int_0^1 xf'(x)\,dx = xf(x)\,|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$