ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 1/9/2021
ΟΜΑΔΑ Β (Ο ΑΜ λήγει σε 1, 3, 5, 7, 9)

Οι απαντήσεις των θεμάτων να υποβληθούν *σκαναρισμένες*, με *ονοματεπώνυμο και ΑΜ.*

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1 h και 20 min

I. *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές είναι λάθος. Να δικαιολογηθούν οι τρείς από τις έξι απαντήσεις σας*:

(1) (*0,5 μον*) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f^{''}(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(x) \leq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x.$$

Απάντηση: *Η πρόταση είναι **σωστή**. Πράγματι, αν $x = 0$ η ανισότητα ισχύει τετριμμένα ενώ αν $x \neq 0$ τότε από τον Τύπο Taylor υπάρχει ξ μεταξύ των x και 0 τέτοιο ώστε*

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \leq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x$$

αφού από την υπόθεση $f''(x) \leq 0$ έπεται ότι $f''(\xi) \leq 0$.

(2) (*0,5 μον*) Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\arcsin(\sin x) = x$.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι **λάθος** (ισχύει μόνο για τα $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$). Πράγματι, η $\arcsin x$ είναι η αντίστροφη του περιορισμού της $\sin x$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και άρα το πεδίο τιμών της είναι το $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και όχι όλο το $\mathbb{R}$. Πχ. αν $x = \pi$ τότε $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi$.*

(3) (*0,5 μον*) Αν $na_n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι **σωστή**. Πράγματι, $na_n \geq 1 \Rightarrow a_n \geq \frac{1}{n}$. Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*

(4) (*0,5 μον*) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο μηδέν. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι **λάθος**, πχ. η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει αλλά $\lim \frac{1}{n} = 0$.*

(5) (*0,5 μον*) Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει στο $x = 2$ τότε αποκλίνει και στο $x = -3$.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι **σωστή**. Πράγματι αφού η η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει στο $x = 2$ και έχει κέντρο το $x_0 = 0$ έπεται ότι η ακτίνα σύγκλισης R είναι μικρότερη ή ίση του 2. Άρα η δυναμοσειρά αποκλίνει για όλα τα $x < -2$.*

(6) (*0,5 μον*) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ένα κρίσιμο σημείο της f. Αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ και $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f.

Απάντηση: *Η πρόταση είναι **σωστή**. Πράγματι, από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου έχουμε ότι $\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0$.*

ΙΙ. ***Να γράψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων*** :

ΑΣΚΗΣΗ 1. (α) (*0,5 μον.*) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(x-1)^n$.

(β)(*1,5 μον*) Σε ποια $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και σε ποιά αποκλίνει;

ΛΥΣΗ: (α) Είναι $a_n = \dfrac{1}{2^n n} \Rightarrow \rho = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$ (αφού $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Άρα $R = 1/\rho = 2$.

(β) Αφού το κέντρο είναι $x_0 = 1$ και η ακτίνα σύγκλισης $R = 2$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow x \in (-1, 3)$ και αποκλίνει για $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Στο $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(-1-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει ως εναλλάσσουσα αρμονική. Αντίστοιχα στο $x = 3$ η δυναμοσειρά γίνεται η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και άρα αποκλίνει.

Συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει ακριβώς στα $x \in [-1, 3)$ και αποκλίνει στα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2. (α) (*1 μον.*) Βρείτε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x,y) = y^x$ με $x, y > 0$.

(β) (*1,5 μον.*) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - 2y^2 + 1$$

ΛΥΣΗ: (α) Έχουμε $f(x,y) = y^x = \left(e^{\ln y}\right)^x = e^{x\ln y}$. Άρα παραγωγίζοντας ως προς x θεωρώντας το y ως σταθερά παίρνουμε

$$f_x(x,y) = e^{x\ln y} \cdot \frac{d(x\ln y)}{dx} = y^x \cdot \ln y$$

και αντίστοιχα παραγωγίζοντας ως προς y θεωρώντας το x ως σταθερά έχουμε

$$f_y(x,y) = e^{x\ln y} \cdot \frac{d(x\ln y)}{dy} = y^x \cdot \frac{x}{y} = x \cdot y^{x-1}.$$

(β) Έχουμε $f_x(x,y) = 4y - 4x^3$, $f_y(x,y) = 4x - 4y$. Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 4y - 4x^3 = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x - x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(1 - x^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^3 \\ x = 0 \text{ ή } x = \pm 1 \end{cases}$$

και άρα παίρνουμε τρία κρίσιμα σημεία τα $(0,0)$, $(1,1)$ και $(-1,-1)$.

Επειδή $f_{xx}(x,y) = -12x^2$, $f_{yy}(x,y) = -4$, $f_{xy}(x,y) = 4$ έπεται ότι $\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = 48x^2 - 16$. Για το $(0,0)$ έχουμε $\Delta(0,0) = -16 < 0$ οπότε το $(0,0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(1,1) = \Delta(-1,-1) > 0$ και $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) < 0$ και άρα η f στα $(1,1)$ και $(-1,-1)$ έχει τοπικά μέγιστα.

ΑΣΚΗΣΗ 3. (α) (*1 μον.*) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_6^7 \frac{x}{x^2-12x+37}\,dx$.

(β) (*1,5 μον.*) Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$ γνησίως αύξουσα συνεχής με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν $\int_0^1 f(x)\,dx = 2/3$ υπολογίστε το $\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$, όπου με f^{-1} συμβολίζουμε την αντίστροφη της f.

ΛΥΣΗ: (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_6^7 \frac{x}{x^2-12x+37}\,dx &= \int_6^7 \frac{x}{(x-6)^2+1}\,dx \\
&\overset{y=x-6}{=} \int_0^1 \frac{y+6}{y^2+1}\,dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{y^2+1}\,dy + \int_0^1 \frac{6}{y^2+1}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(y^2+1)'}{y^2+1}\,dy + 6\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\,\Big|_0^1 + 6\arctan y\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + 5\arctan 1 = \ln\left(\sqrt{2}\right) + \frac{6\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(β) Κάνοντας την αντικατάσταση $y=f(x) \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$ και με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy = \int_0^1 f^{-1}(f(x))f'(x)/dx = \int_0^1 xf'(x)\,dx = xf(x)\,\big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$