ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 1/2/2021
ΟΜΑΔΑ Α (Ο ΑΜ λήγει σε 0, 2, 4, 6, 8)

Ονοματεπώνυμο και ΑΜ :

Α.(3 μον) ***Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές είναι λάθος***:

(**Α1**) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, n-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το $x_0=1$ δίνεται από τον τύπο $T_n(x)=f(1)+\dfrac{f'(1)}{1!}x+\dfrac{f''(1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}x^n$. **Σ**□ **Λ**■

(*Η σωστή απάντηση είναι:* $T_n(x)=f(1)+\dfrac{f'(1)}{1!}(x-1)+\dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$.)

(**Α2**) Ισχύει ότι $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)=\dfrac{4}{5}$. **Σ**■ **Λ**□

(*Πράγματι, έστω* $\theta=\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)$. *Τότε* $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$. *Επιπλέον* $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ *και άρα* $\cos\theta\geq 0$. *Οπότε* $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=4/5$*)*

(**Α3**) Η ακολουθία $a_n=\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$ συγκλίνει στο 1. **Σ**□ **Λ**■

(*Η σωστή απάντηση είναι:* $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\to e$)

(**Α4**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Αν $0<a_n<n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ τότε η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ δεν συγκλίνει. **Σ**■ **Λ**□

(*Πράγματι,* $0<a_n<n\Rightarrow\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{1}{n}$ *και άρα* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

(**Α5**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ με $a_n>0$. Αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ δεν συγκλίνει. **Σ**■ **Λ**□

(*Πράγματι,* $a_{n+1}>a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. *Ειδικότερα* $a_n\geq a_1>0$ *οπότε* $s_n=a_1+\cdots+a_n\geq na_1\to+\infty$)

(**Α6**) Έστω ότι η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ συγκλίνει για κάποιο $x=x_0>0$. Τότε συγκλίνει για όλα τα $x\in(-x_0,x_0)$. **Σ**■ **Λ**□

(*Πράγματι, έστω* R *η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Επειδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για* $x=x_0>0$ *θα πρέπει* $x_0\leq R$. *Οπότε* $x\in(-x_0,x_0)\Rightarrow x\in(-R,R)$ *και άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε* $x\in(-x_0,x_0)$.)

(**Α7**) Έστω η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Τότε υπάρχει $k\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{k^n}$ συγκλίνει. **Σ**■ **Λ**□

(*Πράγματι, αρκεί να επιλέξουμε* $k\in\mathbb{N}$ *αρκετά μεγάλο ώστε* $\dfrac{1}{k}<R$. *Τότε για* $x=1/k$ *η δυναμοσειρά συγκλίνει, με άλλα λόγια η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{k}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{k^n}$ *συγκλίνει.*)

Β. Να γράψετε και να επισυνάψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων :

Β1. (1 μον) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x \cosh x$ τάξης $n = 2$ με κέντρο το $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ: Έχουμε $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x \cosh x + e^x \sinh x = e^x(\cosh x + \sinh x) = e^x \cdot e^x = e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 2$. Άρα

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + x + x^2.$$

Β2. (α)(1 μον) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x-1)^n$.

(β)(1 μον) Για ποια $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει;

ΛΥΣΗ: (α) Είναι $a_n = \dfrac{3^n}{n} \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}} = 3$ (αφού $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Άρα $R = 1/3$.

(β) Αφού το κέντρο είναι $x_0 = 1$ και η ακτίνα σύγκλισης $R = 1/3$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-1| < 1/3 \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ και αποκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-1| > 1/3 \Leftrightarrow x < 2/3$ ή $x > 4/3$. Για $x = 2/3$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{2}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει ως εναλλάσσουσα αρμονική. Αντίστοιχα για $x = 4/3$ η δυναμοσειρά γίνεται η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και άρα αποκλίνει. Συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

Β3. (1 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x}{x^2+6x+10}\, dx$.

ΛΥΣΗ:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{-2} \frac{x}{x^2+6x+10}\, dx &= \int_{-3}^{-2} \frac{x}{(x+3)^2+1}\, dx \\
&\overset{y=x+3}{=} \int_0^1 \frac{y-3}{y^2+1}\, dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{y^2+1}\, dy - \int_0^1 \frac{3}{y^2+1}\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(y^2+1)'}{y^2+1}\, dy - 3\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\, dy \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\,\Big|_0^1 - 3\arctan y\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - 3\arctan 1 = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

B4. (1,5 μον) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = 8x^3 - 12xy + y^3$.

ΛΥΣΗ: Έχουμε $f_x(x,y) = 24x^2 - 12y$, $f_y(x,y) = -12x + 3y^2$. Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 24x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ -4x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ -4x + (2x^2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 4x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases}$$

και άρα παίρνουμε δύο κρίσιμα σημεία τα $(0,0)$ και $(1,2)$. Επειδή $f_{xx}(x,y) = 48x$, $f_{yy}(x,y) = 6y$, $f_{xy}(x,y) = -12$ και $\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$, για το $(0,0)$ έχουμε $\Delta(0,0) < 0$ οπότε το $(0,0)$ είναι σαγματικό. Αντίστοιχα $\Delta(1,2) > 0$ και $f_{xx}(1,2) > 0$ και άρα η f στο $(1,2)$ έχει τοπικό ελάχιστο.

B5. (α) (0,5 μον) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει ή όχι;

(β) (1 μον) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

ΛΥΣΗ: (α) Όπως έχουμε αναφέρει και στα προηγούμενα θέματα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

(β) Επειδή

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης ορίου λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ δεν συγκλίνει.