ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 1/2/2021
ΟΜΑΔΑ Β (Ο ΑΜ λήγει σε 1, 3, 5, 7, 9)

Ονοματεπώνυμο και ΑΜ :

Α.(3,5 μον) ***Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές είναι λάθος***:

(**Α1**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το $x_0 = 2$ δίνεται από τον τύπο $T_n(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$. **Σ**■ **Λ**□

(**Α2**) Ισχύει ότι $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = -\frac{4}{5}$. **Σ**□ **Λ**■

(*Έστω* $\theta = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. *Τότε* $\cos\theta = -\frac{3}{5}$. *Επιπλέον* $\theta \in [0, \pi]$ *και άρα* $\sin\theta \geq 0$. *Οπότε* $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = 4/5$*)*

(**Α3**) Η ακολουθία $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^n}$ συγκλίνει στο $+\infty$. **Σ**□ **Λ**■

(*Η σωστή απάντηση είναι:* $\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$*)*

(**Α4**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Αν $0 < n^2 < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ δεν συγκλίνει. **Σ**□ **Λ**■

(*Πράγματι,* $0 < n^2 < a_n \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \frac{1}{n^2}$ *και άρα* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ *και άρα η* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *συγκλίνει.)*

(**Α5**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$. Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. **Σ**□ **Λ**■

(*Αν* $a_n = 1/n$ *τότε η* (a_n) *είναι γνησίως φθίνουσα και άρα* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *αλλά η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *δεν συγκλίνει.)*

(**Α6**) Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για κάποιο $x = x_0 > 0$. Τότε αποκλίνει για όλα τα $x > x_0$. **Σ**■ **Λ**□

(*Πράγματι, έστω* R *η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Επειδή η δυναμοσειρά αποκλίνει για* $x = x_0 > 0$ *θα πρέπει* $x_0 > R$. *Οπότε* $x > x_0 \Rightarrow x > R$ *και άρα η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε* $x > x_0$.*)*

(**Α7**) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ με ακτίνα σύγκλισης R. Αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{k^n}$ αποκλίνει τότε $R = 0$. **Σ**■ **Λ**□

(*Πράγματι, αν* $R > 0$ *τότε επιλέγοντας* $k \in \mathbb{N}$ *αρκετά μεγάλο ώστε* $0 < \frac{1}{k} < R$ *θα είχαμε ότι για* $x = 1/k$ *η δυναμοσειρά συγκλίνει, με άλλα λόγια η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{k}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{k^n}$ *συγκλίνει. Άτοπο.)*

Β. *Να γράψετε και να επισυνάψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων* :

Β1. (1 μον) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x \sinh x$ τάξης $n = 2$ με κέντρο το $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ: Έχουμε $f(0) = 0$, $f'(x) = e^x \sinh x + e^x \cosh x = e^x(\sinh x + \cosh x) = e^x \cdot e^x = e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 2$. Άρα

$$T_2(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = x + x^2.$$

Β2. (α)(1 μον) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x-3)^n$.

(β)(1 μον) Για ποια $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει;

ΛΥΣΗ: (α) Είναι $a_n = \dfrac{2^n}{n} \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 3$ (αφού $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Άρα $R = 1/2$.

(β) Αφού το κέντρο είναι $x_0 = 3$ και η ακτίνα σύγκλισης $R = 1/2$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-3| < 1/2 \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ και αποκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-3| > 1/2 \Leftrightarrow x < 5/2$ ή $x > 7/2$. Για $x = 5/2$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{5}{2}-3\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει ως εναλλάσσουσα αρμονική. Αντίστοιχα για $x = 7/2$ η δυναμοσειρά γίνεται η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και άρα αποκλίνει. Συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left[\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

Β3. (1 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_4^5 \frac{x}{x^2 - 8x + 17}\, dx$.

ΛΥΣΗ:

$$\begin{aligned}
\int_4^5 \frac{x}{x^2-8x+17}\, dx &= \int_4^5 \frac{x}{(x-4)^2+1}\, dx \\
&\overset{y=x-4}{=} \int_0^1 \frac{y+4}{y^2+1}\, dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{y^2+1}\, dy + \int_0^1 \frac{4}{y^2+1}\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(y^2+1)'}{y^2+1}\, dy + 4\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\, dy \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\,\Big|_0^1 + 4\arctan y\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + 4\arctan 1 = \ln\sqrt{2} + \pi.
\end{aligned}$$

B4. (1 μον) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - xy + y^3$.

ΛΥΣΗ: Έχουμε $f_x(x,y) = 2x - y$, $f_y(x,y) = -x + 3y^2$. Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -x + 3(2x)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x(12x - 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \text{ ή } x = 1/12 \end{cases}$$

και άρα παίρνουμε δύο κρίσιμα σημεία τα $(0,0)$ και $(1/12, 1/6)$. Επειδή $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = 6y$, $f_{xy}(x,y) = -1$ και $\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$, για το $(0,0)$ έχουμε $\Delta(0,0) = -1 < 0$ οπότε το $(0,0)$ είναι σαγματικό. Αντίστοιχα $\Delta(1/12, 1/6) = 1 > 0$ και $f_{xx}(1/12, 1/6) > 0$ και άρα η f στο $(1/12, 1/6)$ έχει τοπικό ελάχιστο.

B5. (α) (0,5 μον) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει ή όχι;

(β) (1 μον) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

ΛΥΣΗ: (α) Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο θέμα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

(β) Επειδή

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\frac{\sqrt[n]{n}}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης ορίου λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.