

Μαθηματική Ανάλυση
ΣΑΤΜ 28/01/ 2016

Θέμα 1. (α) Διατυπώστε τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας (a_n) πραγματικών αριθμών σε ένα $a \in \mathbb{R}$ και δώστε έναν ορισμό του αριθμού ϵ με ακολουθίες.

(β) Δείξτε ότι $n^2 \leq n^2 + n + 1 \leq 3n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατόπιν εφαρμόστε το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών και δείξτε ότι $\sqrt[n]{n^2 + n + 1} \rightarrow 1$.

Θέμα 2. (α) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

(β) Δίνεται μια ακολουθία (a_n) για την οποία γνωρίζουμε ότι $a_n > 1/2$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$. Συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και γιατί;

Θέμα 3. (α) Γράψτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor $T_5(x)$ βαθμού $n = 5$ της $\sin x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ καθώς και τον τύπο του υπολοίπου $\sin x - T_5(x)$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|\sin x - T_5(x)| \leq \frac{|x|^6}{6!}$$

(β) Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$, με $x \in (-1, 1)$.

Υπολογίστε την $f'(x)$ και $f(x)$.

Θέμα 4. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{x^2 + 4x + 8} dx.$$

(β) Υπολογίστε το μήκος της επίπεδης καμπύλης με παραμετρική εξίσωση $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, \pi/4]$.

Θέμα 5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = xy - x^2y - xy^2.$$

(α) Βρείτε τα στάσιμα σημεία της f .

(β) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f . Έχει η f ολικά ακρότατα; (Δίνεται ότι $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$).