

Μαθηματική Ανάλυση
ΣΑΤΜ 7/7/ 2016

Θέμα 1. (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + 10^n}$. (0,5 μον.)

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (0,5 μον.) (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{e^{2n}}$ (0,5 μον.)

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^6 + 1}$ (0,5 μον.) (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ (0,5 μον.)

Θέμα 2. (α) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ και στη συνέχεια κάντε το ίδιο για τις συναρτήσεις $g(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$ και $h(x) = \ln \frac{1}{1-x}$. (1,5 μον.)

(β) Γράψτε τον τύπο του Taylor για την συνάρτηση e^x , $x \in \mathbb{R}$ με κέντρο το $x_0 = 0$ (πολυώνυμο βαθμού n και υπόλοιπο) και δείξτε ότι

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (1 μον.)

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$. (1 μον.)

(β) Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης του επιπέδου με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (1 \text{ μον.}).$$

(Δίνεται ότι $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ και $\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \dots$). (1,5 μον.)

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2.$$

(α) Βρείτε τα στάσιμα σημεία της f . (1,25 μον.)

(β) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f . Έχει η f ολικά ακρότατα; (Δίνεται ότι $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$). (1,25 μον.)