Μαθηματική Ανάλυση, ΣΑΤΜ, 27/01/ 2017

Θέμα 1. (α) (i) Διατυπώστε τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας (a_n) πραγματικών αριθμών σε ένα $a \in \mathbb{R}$. **(0,3 μον)**

(ii) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt[n]{1 + n + n^2 + \cdots + n^{100}}$. **(0,5 μον)**

(β) Δίνεται μια ακολουθία (a_n) με θετικούς όρους για την οποία γνωρίζουμε ότι $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και γιατί; **(0,5 μον)**

(γ) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\ (a > 0), \textbf{(0,3 μον)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n, \textbf{(0,3 μον)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}, \textbf{(0,3 μον)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{e^n} \textbf{(0,3 μον)}$$

Απάντηση. (α) (i) Λέμε ότι η (a_n) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

(ii) Έχουμε $n^{100} \leq 1 + n + n^2 + \cdots + n^{100} \leq 101 \cdot n^{100}$ και άρα

$$\sqrt[n]{n^{100}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{101 \cdot n^{100}}.$$

Επειδή $\sqrt[n]{n^{100}} = (\sqrt[n]{n})^{100} \to 1^{100} = 1$ και $\sqrt[n]{101 \cdot n^{100}} = \sqrt[n]{101} \cdot \sqrt[n]{n^{100}} \to 1 \cdot 1 = 1$, απο το θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε ότι $a_n \to 1$.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει. Πράγματι, επειδή $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ και $a_n > 0$ έχουμε ότι $a_{n+1} > a_n$ δηλαδή η (a_n) είναι (γνησίως) αύξουσα. Αν τώρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συνέκλινε θα έπρεπε $a_n \to 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι οι όποι της (a_n) θα γίνονται όσο μικροί θέλουμε αρκεί η τάξη τους να είναι μεγάλη. Ειδικότερα, για $\epsilon = a_1 > 0$ θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n = |a_n - 0| < a_1$ για όλα $n \geq n_0$. Όμως αφού η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι $a_1 < a_2 < \ldots$ και άρα $a_n \geq a_1$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, άτοπο.

(γ) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1$$

και άρα απο το κριτήριο Λόγου η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ συγκλίνει.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n} = \frac{3n}{5n+4} = \frac{3}{5+4/n} \to 3/5 < 1$$

και άρα απο το κριτήριο Ρίζας η $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$ συγκλίνει.

Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ δεν συγκλίνει. Πράγματι, η ακολουθία των όρων της σειράς δεν είναι μηδενική, αφού

$$\frac{n}{n+5} = \frac{1}{1+5/n} \to 1 \neq 0.$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{e^n}$ συγκλίνει. Πράγματι πρόκειται για εναλλάσσουσα σειρά και συνεπώς απο κριτήριο Leibniz αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $(\frac{n}{e^n})$ είναι φθίνουσα και μηδενική: Για $x \geq 1$ η συνάρτηση $\frac{x}{e^x}$ έχει μη θετική παράγωγο αφού

$$(\frac{x}{e^x})' = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x} \leq 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

(Ένας άλλος τρόπος για να δείξουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{e^n}$ συγκλίνει είναι να δείξουμε ότι συγκλίνει απολύτως, δηλαδή ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ συγκλίνει που προκύπτει πχ με το κριτήριο Ρίζας,

$$\sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{e} \to 1/e < 1.$$

Θέμα 2. (α) Γράψτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor $T_5(x)$ βαθμού $n = 5$ της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, με κέντρο το $x_0 = 0$. Με τη βοήθεια του τύπου του υπολοίπου $R(x) = e^x - T_5(x)$, δείξτε ότι (για $x = 1$) έχουμε

$$0 < e - T_5(1) < \frac{3}{6!}$$

(0,8 μον)

(β) Με βάση τον τύπο $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, $x \in (-1,1)$, γράψτε σε μορφή δυναμοσειράς τη συναρτηση $\dfrac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1,1)$. Στην συνέχεια βρείτε το άθροισμα $1 + 2(\frac{3}{4}) + 3(\frac{3}{4})^2 + 4(\frac{3}{4})^3 + \ldots$. **(0,7 μον)**

(γ) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $t \in (-1,1)$ και (με ολοκλήρωση) αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $\ln(1+x)$, $x \in (-1,1)$. **(1 μον)**

Απάντηση. (α) Γενικά για μια συνάρτηση $f(x)$ $x \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο Taylor τάξης 5 γύρω απο κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ δίνεται απο τον τύπο

$$T_5(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x - x_0)^5.$$

Επίσης το υπόλοιπο Taylor είναι

$$R_5(x) := f(x) - T_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x - x_0)^6$$

για κάποιο ξ μεταξύ του x_0 και x.

Άρα αν $f(x) = e^x$ και $x_0 = 0$, επειδή $f^{(n)}(x) = e^x$ και άρα $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$T_5(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^5}{5!}.$$

Επίσης αν $x = 1$ τότε

$$R_5(1) = f(x) - T_5(1) = e - T_5(1) = \frac{e^\xi}{6!}(1 - 0)^6 = \frac{e^\xi}{6!}$$

για κάποιο $0 < \xi < 1$. Αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $e^\xi > 0$ και άρα $e - T_5(1) > 0$. Τέλος αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα, $\xi < 1 \Rightarrow e^\xi < e < 3$, οπότε $e - T_5(1) < 3/6!$.

(β) Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} = \big(\frac{1}{1-x}\big)' &= (1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)' \\
&= (1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + (x^4)' + \dots \\
&= 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots,
\end{aligned}
$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

Ειδικότερα για $x = 3/4$,

$$
1 + 2\big(\frac{3}{4}\big) + 3\big(\frac{3}{4}\big)^2 + 4\big(\frac{3}{4}\big)^3 + \dots = \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = 16.
$$

(γ) Έχουμε

$$
\begin{aligned}
f(t) = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} &= 1 + (-t) + (-t)^2 + (-t)^3 + (-t)^4 + \dots \\
&= 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots,
\end{aligned}
$$

για κάθε $t \in (-1,1)$.

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt &= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots)\, dt \\
&= \int_0^x 1\, dt - \int_0^x t\, dt + \int_0^x t^2\, dt - \int_0^x t^3 dt + \int_0^x t^4 dt - \dots \\
&= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots,
\end{aligned}
$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx (\textbf{0,8 μον}) \qquad \text{(ii)} \int \frac{1}{\sin x}\, dx (\textbf{0,9 μον})$$

(*Υπόδειξη*: Το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορείτε να το γράψετε $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x)^2} \sin x\, dx$ και κατόπιν να θέσετε $t = \cos x$)

(β) Υπολογίστε το μήκος $L = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt$, της επίπεδης καμπύλης με παραμετρική εξίσωση $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, \pi/4]$. (**0,8 μον**)

Απάντηση. (α) (i) Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\, dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\, dx.$$

Θέτουμε $y = x+2$ και άρα $x = y-2$ και $dx = dy$. Οπότε,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \int \frac{y-2}{y^2+1}\, dy = \int \frac{y}{y^2+1}\, dy - 2\int \frac{1}{y^2+1}\, dy$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $z = y^2+1$ και άρα $dz = 2ydy \Rightarrow ydy = dz/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{y}{y^2+1}\, dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2}\ln z = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}(\ln(x+2)^2) = \ln|x+2|.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan y = \arctan(x+2).$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \ln|x+2| + \frac{\arctan(x+2)}{2}.$$

(ii) Θέτουμε $t = \cos x$. Τότε $dt = -\sin x \cdot dx$ και $(\sin x)^2 = 1-t^2$. Άρα

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{(\sin x)^2} \sin x\, dx = -\int \frac{1}{1-t^2}\, dt.$$

Με διάσπαση σε απλά κλάσματα, έχουμε

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)\cdot(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A - At + B + Bt}{1-t^2} = \frac{(B-A)t + (A+B)}{1-t^2}.$$

Συνεπώς θα πρέπει $B - A = 0$ και $A + B = 1$ οπότε $A = B = 1/2$. Άρα

$$\int \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\Big(\int \frac{1}{1+t}\, dt - \int \frac{1}{1-t}\, dt\Big) = \frac{1}{2}\big(\ln|1+t| - \ln|1-t|\big) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+t|}{|1-t|}.$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|.$$

(γ) Το μήκος της καμπύλης δίνεται απο το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{(3\ cos^2 t\ (-sint))^2\ +\ (3\ sin^2 t\ cost)^2}\ dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{9\ cos^4 t\ sin^2 t\ +\ 9\ sin^4 t\ cos^2 t}\ dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{9\ cos^2 t\ sin^2 t\ (cos^2 t + sin^2 t)}\ dt \\ &= \int_0^{\pi/4} 3\ |cost \cdot sint|\ dt = 3 \int_0^{\pi/4} cost \cdot sint\ dt \end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/4$). Επειδή τώρα,

$$\int_0^{\pi/4} cost \cdot sint\ dt = \int_0^{\pi/4} (sint)' \cdot sint\ dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\sin^2 t)'\ dt = \frac{1}{2}(\sin^2(\pi/4) - \sin^2(0)) = 1/4$$

παίρνουμε ότι $L = 3/4$.

Θέμα 4. (α) (i) Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διατυπώστε τον ορισμό των μερικών παραγώγων της f σε ένα σημειο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. (**0,3 μον**)

(ii) Βρείτε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ στο σημείο $(0,0)$. (**0,4 μον**)

(iii) Δείξτε ότι η $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. (**0,6 μον**)

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$ πρώτης και δεύτερης τάξης της f και κατόπιν μελετήστε την f ως προς τα τοπικά ακρότατα (Θυμίζουμε ότι $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$). (**1,2 μον**)

Απάντηση. (α) (i) Η μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (x_0, y_0) ορίζεται να είναι το όριο

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

εφόσον υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Αντίστοιχα, η μερική παράγωγος της f ως προς y στο σημείο (x_0, y_0) ορίζεται να είναι το όριο

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

εφόσον υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

(ii) Εφαρμόζοντας τους τύπους των μερικών παραγώγων έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x \cdot 0} - \sqrt{0 \cdot 0}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{0 \cdot y} - \sqrt{0 \cdot 0}}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$

(iii) Για να είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη σε ένα σημείο (x_0, y_0) θα πρέπει να υπάρχουν οι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ και επιπλέον

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Άρα για να είναι η $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0)$ θα πρέπει

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)(x - 0) - f_y(0,0)(y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = 0$$

ή ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{|x \cdot y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Όμως αν $(x,y) \to (0,0)$ με $y = x$ (δηλαδή το $(x,y) \to (0,0)$ κινούμενο επί της διχοτόμου $y = x$) τότε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x \cdot x|}}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{2}|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ενώ αν $(x,y) \to (0,0)$ με $y = 0$ (δηλαδή το $(x,y) \to (0,0)$ κινούμενο στον x-άξονα $y = 0$),

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|}}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{|x|} = 0.$$

Άρα το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x \cdot y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δεν υπάρχει και συνεπώς η $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$.

(β) Για την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ έχουμε

$$\begin{gathered} f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x \\ f_y(x,y) = 6xy - 6y \\ f_{xx}(x,y) = 6x - 6 \\ f_{yy}(x,y) = 6x - 6 \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6y \end{gathered}$$

Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \text{ και } f_y(x,y) = 6xy - 6y = 0.$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x-1) = 0$ και άρα

$$y = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Για $y = 0$ απο την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς έχουμε τα σημεία

$$(0,0) \quad \text{και} \quad (2,0).$$

Αντίστοιχα για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3 + 3y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y+1) = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα

$$(1,1) \quad \text{και} \quad (1,-1).$$

Συνολικά δηλαδή έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα, τα $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ και $(1,-1)$. Τώρα για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = (6x-6)\cdot(6x-6) - 36y^2$$

(0,0): $\Delta(0,0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι τοπικό μέγιστο.

(0,2): $\Delta(2,0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2,0) = 6 > 0$ και άρα το $(0,2)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

(1,1): $\Delta(1,1) = -36 < 0$ και άρα το $(1,1)$ είναι σαγματικό.

(1,-1): $\Delta(1,-1) = -36 < 0$ και άρα το $(1,-1)$ είναι σαγματικό.