

Μαθηματική Ανάλυση
ΣΑΤΜ 6/9/ 2017

Θέμα 1. (α) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + 10^n}$. (0,5 μον.)
(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις επόμενες σειρές

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \quad (iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

(2 μον.)

Θέμα 2. (α) Γράψτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, με κέντρο το $x_0 = 0$, και στη συνέχεια βρείτε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\ln 2)^n}{n!}$. (1 μον.)

(β) Με βάση το ανάπτυγμα της συνάρτησης $\frac{1}{1-t}$ αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις επόμενες συναρτήσεις (i) $\frac{1}{(1-t)^2}$, $t \in (-1, 1)$, (ii) $\frac{1}{1+t^2}$, $t \in (-1, 1)$ και (iii) $\arctan x$, $x \in (-1, 1)$.
(1,5 μον.)

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x + 3}{e^x + 2} dx$. (1 μον.)

(β) Υπολογίστε το μήκος $L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ της καμπύλης $y(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t} dt$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. (1,5 μον.)

Θέμα 4. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. (i) Βρείτε τις μερικές παραγώγους της f στο σημείο $(0, 0)$. (ii) Βρείτε την κατά κατεύθυνση μερική παράγωγο στο σημείο $(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cdot \mathbf{u}) - f(0, 0)}{t}$, ως προς ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. (1 μον.)

(γ) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά ακρότατα της f . (Δίνεται ότι $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$). (1,5 μον.)

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 30'

Κ α λ ή Ε π ι τ υ χ ί α!