Μαθηματική Ανάλυση
ΣΑΤΜ 19/01/ 2018
ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1. (α) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n}$. (0,5 μον.)

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις επόμενες σειρές

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n}) \quad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{e}{2}\big)^n \quad \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

(2 μον.)

Λύση: (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$3^n \leq 1^n + 2^n + 3^n \leq 3 \cdot 3^n \Rightarrow 3 \leq \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 3^n}.$$

οπότε

$$3 \leq a_n \leq \sqrt[n]{3} \cdot 3. \tag{1}$$

Επειδή $\forall a > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, είναι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ και άρα $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3} \cdot 3) = 3$. Συνεπώς απο την (1) και το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών, $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

(β) (i) Γνωρίζουμε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{1}{n}) = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \neq 0,$$

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n})$ δεν συγκλίνει. (ii) Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

από κριτήριο Λόγου η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει.

(iii) Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\big(\frac{e}{2}\big)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} > 1,$$

από κριτήριο Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^n$ δεν συγκλίνει.

(iv) Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = 1$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots = +\infty,$$

απο το κριτήριο ορίου λόγου, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ αποκλίνει.

Θέμα 2. (α) Γράψτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, με κέντρο το $x_0 = 0$, και στη συνέχεια βρείτε το άθροισμα της σειράς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2018)^n}{n!}$. (1 μον.)

(β) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ όπου η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει. (1 μ)

(γ) Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ αν

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + ...$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. (0,5 μον.)

Λύση: (α) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε η σειρά Taylor με κέντρο το $x_0 \in \mathbb{R}$ της f δίνεται απο τον τύπο

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Για την συνάρτηση $f(x) = e^x$ και για το $x_0 = 0$ έχουμε $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, οπότε η σειρά Taylor της $f(x) = e^x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

θέτοντας $x = \ln 2018$ παίρνουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2018)^n}{n!} = e^{\ln 2018} = 2018.$$

(β) Οι συντελεστές της δυναμοσειράς είναι οι $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Άρα,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

και συνεπώς η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1/\rho = 1$. Άρα , αφού το κέντρο της δυναμοσειράς είναι το $x_0 = 0$, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$. Για $x = 1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ και άρα αποκλίνει, ενώ για $x = -1$ έχουμε την εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία, απο κριτήριο Leibniz, συγκλίνει. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-1, 1)$ και αποκλίνει για $x < -1$ και $x \geq 1$.

(γ) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Άρα απο το θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών,

$$\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \Big(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\Big)' = (1)' + (x)' + +(x^2)' + (x^3)' + \cdots = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

Συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f(x) = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα (i) $\int \arctan x\ dx$, (ii) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\ dx$. (1 μον.)

(β) Υπολογίστε το μήκος της επίπεδης καμπύλης με παραμετρική εξίσωση $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, \pi/2]$. (1 μον.)

(γ) Υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$. (0,5 μον.)

Λύση: (α) Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned}\int \arctan x\ dx = \int (x)' \arctan x\ dx &= x\arctan x - \int x(\arctan x)'\ dx \\ &= x\arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\ dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \big(\ln(1+x^2)\big)'\ dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = x\arctan x - \sqrt{\ln(1+x^2)}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο κάνουμε την αντικατάσταση $t = e^x$ και άρα $dt = e^x dx = t dx$, οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\ dx = \int \frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\ dt = \int \frac{t+1}{t(t^2+1)}\ dt &= \int \frac{t}{t(t^2+1)}\ dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\ dt \\ &= \int \frac{1}{t^2+1}\ dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\ dt \\ &= \arctan t + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\ dt.\end{aligned}$$

Με απλά κλάσματα βλέπουμε ότι

$$\int \frac{1}{t(t^2+1)}\ dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)\ dt = \int \frac{1}{t}\ dt - \int \frac{t}{t^2+1}\ dt = \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1).$$

Απο τα παραπάνω και αφού $e^x = t$, παίρνουμε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\ dx = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1).$$

(β) Το μήκος δίνεται απο τον τύπο

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\ dt.$$

Είναι

$$x'(t) = (\cos^3 t)' = 3\cos^2 t(-\sin t) \Rightarrow \big(x'(t)\big)^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t$$

και

$$y'(t) = (\sin^3 t)' = 3\sin^2 t \cos t \Rightarrow \big(y'(t)\big)^2 = 9\sin^4 t \cos^2 t.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} &= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} \\ &= 3|\cos t \sin t| \\ &= 3\cos t \sin t,\end{aligned}$$

επειδή $\cos t, \sin t \geq 0$ αφού $t \in [0, \pi/2]$. Άρα,

$$L = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t\ dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \Big(\sin^2 t\Big)'\ dt = \frac{3}{2}\Big(\sin^2(\pi/2) - sin^2 0\Big) = \frac{3}{2}.$$

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}{n^3} = \Big(\frac{1}{n}\Big)^2 \cdot \frac{1}{n} + \Big(\frac{2}{n}\Big)^2 \cdot \frac{1}{n} + \Big(\frac{3}{n}\Big)^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \Big(\frac{n}{n}\Big)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, $x_i = i/n$ για κάθε $i = 0, 1, \dots n$ και $\xi_i = \frac{i}{n}$, $\forall i = 1, \dots, n$. Άρα το κλάσμα $\dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}{n^3}$ είναι το άθροισμα Riemann της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ για την διαμέριση $\mathcal{P}_n = \{0 < 1/n < 2/n < \cdots < 1\}$ και ενδιάμεσα σημεία τα $1/n, 2/n, \dots, 1$. Επειδή το πλάτος της $\mathcal{P}_n$ είναι $1/n \to 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_0^1 x^2\ dx = 1/3.$$

Θέμα 4. (α) Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ γράψτε τον ορισμό των μερικών παραγώγων (πρώτης τάξης) της f σε ένα σημειο (x_0, y_0). Στην συνέχεια με βάση τον ορισμό που δώσατε εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ έχει μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$. (1 μον.)

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy.$$

Βρείτε και ταξινομείστε τα τοπικά ακρότατα της f. (1,5 μον.)

Λύση: (α) Η μερική ως προς x παράγωγος της f στο (x_0, y_0) δίνεται απο τον τύπο

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

και αντίστοιξα η μερική ως προς y παράγωγος της f στο (x_0, y_0),

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Η $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ δεν έχει μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$. Πράγματι,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 0} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

αλλά το όριο αυτό δεν υπάρχει αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \text{ ενώ } \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1.$$

Ομοίως για την μερική ως προς y στο $(0, 0)$.

(β) Η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 18y, \; f_y(x, y) = 3y^2 - 18x$$
$$f_{xx}(x, y) = 6x, \; f_{yy}(x, y) = 6y,$$
$$f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) = -18, \; f_{yx}(x, y) = (f_y)_x(x, y) = -18$$

Βρίσκουμε πρώτα τα κρίσημα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$3x^2 - 18y = 0 \text{ και } 3y^2 - 18x = 0$$

Απο την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$3x^2 - 18y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{6}.$$

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$3\Big(\frac{x^2}{6}\Big)^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{6^2} - 6x = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6^3 x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 6^3) = 0$$

Άρα $x = 0$ ή $x = 6$. Αν $x = 0$ τότε $y = \frac{x^2}{6} = 0$ και αν $x = 6$ $y = \frac{x^2}{6} = 6$. Άρα τα κρίσημα σημεία είναι δύο, τα

$$(0, 0) \quad \text{και } (6, 6).$$

Έχουμε

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

Άρα για το $(0, 0)$, $\Delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = -18^2 < 0$ και συνεπώς το $(0, 0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

Για το $(6, 6)$, $\Delta(6, 6) = f_{xx}(6, 6) \cdot f_{yy}(6, 6) - f_{xy}^2(6, 6) = 36^2 - 18^2 > 0$ και συνεπώς είναι τοπικό ακρότατο. Επειδή $f_{xx}(6, 6) = 36 > 0$ το $(6, 6)$ είναι τοπικό ελάχιστο. Άρα η f έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο το $(6, 6)$ που είναι τοπικό ελάχιστο.