

Μαθηματική Ανάλυση
ΣΑΤΜ 4/9/ 2019

Θέμα 1. (α) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} = 1 + \frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots \quad (0,5 \text{ μον.})$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (0,5 \text{ μον.})$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \quad (0,5 \text{ μον.}) \quad (iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} \quad (0,5 \text{ μον.})$$

(β) Να υπολογισθούν τα αθροίσματα των συγκλινουσών σειρών του παραπάνω ερωτήματος (0,5 μον.)

Θέμα 2. (α) (i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{cx}$, όπου $c \neq 0$ σταθερά. Βρείτε τον τύπο για την n -οστή παράγωγο της $f^{(n)}(x)$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ και $x \in \mathbb{R}$. (ii) Γράψτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{e^x}$ με κέντρο το $x_0 = 0$. (1 μον.)

(β) Με βάση το ανάπτυγμα της $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots$, για κάθε $u \in (-1, 1)$ αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις συναρτήσεις (i) $\frac{1}{1+t^2}$, $t \in (-1, 1)$ και (ii) $\arctan x$, $x \in (-1, 1)$. (Θυμίζουμε ότι $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$). (1,5 μ)

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε σταθερές A, B, Γ τέτοιες ώστε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+9}$$

και στη συνέχεια βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} dx$. (1,5 μον.)

(β) Αν $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ διατυπώστε τον ορισμό των μερικών παραγώγων $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ της f σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Στην συνέχεια βρείτε τις μερικές παραγώγους της $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ στο σημείο $(0, 0)$. (1 μον.)

Θέμα 4. (α) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4$. (1,5 μον.)

(β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \int_D \frac{y}{1+x^2} dx dy$, όπου $D = [0, 1] \times [0, 1]$. (1 μον.)

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 30'
Κ α λ ή Ε π ι τ υ χ ί α!