Απαντήσεις θεμάτων Μαθηματικής Ανάλυσης (ΣΑΤΜ) 27/1/ 2020

Θέμα 1. (α) Έστω η ακολουθία $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $n = 0, 1, 2, ...$ Υπολογίστε τα μερικά αθροίσματα $s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_0 + \cdots + a_n$, για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ και βρείτε το $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. (1 μον.)

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (0,75 \text{ μον.}) \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad (0,75 \text{ μον.})$$

ΛΥΣΗ: (α) Παρατηρούμε ότι

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Έχουμε

$$s_0 = \sqrt{1}-\sqrt{0} = 1, s_1 = a_0 + a_1 = (\sqrt{1}-\sqrt{0}) + (\sqrt{2}-\sqrt{1}) = \sqrt{2},$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2 = \sqrt{2} + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{3}$$

και γενικά

$$s_n = \sqrt{n+1},$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Συνεπώς,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty.$$

(β) (i) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο Λόγου. Έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\cdot(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1/e < 1$$

και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει.

(ii) Θα συγκρίνουμε με την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που ως γνωστόν αποκλίνει. Έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει ομοίως.

Θέμα 2. Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης. (0,5 μον.)

(ii) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει. (0,5 μον.)

(iii) Δείξτε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1, 1)$. (0,5 μον.)

(iv) Δείξτε ότι $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, για κάθε $x \in (-1, 1)$. (0,5 μον.)

(v) Δείξτε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2$. (0,5 μον.).

ΛΥΣΗ: (i) Έχουμε $R = 1/\rho$ με $\rho = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Άρα $R = 1$.

(ii) Επειδή $R = 1$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$ και αποκλίνει για $x < -1$ ή $x > 1$. Μένει να εξετάσουμε τα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Στο $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική η οποία συγκλίνει ενώ για $x = 1$ παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική η οποία αποκλίνει. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [-1, 1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(iii) Είναι $f'(x) = \displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(iv) Επειδή $\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)' = (-\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x}$, οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ έχουν την ίδια παράγωγο για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + c$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επειδή $f(0) = 0 = \ln\left(\frac{1}{1-0}\right)$ έχουμε $c = 0$, δηλαδή $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt \\ = -\int_1^{1-x} \frac{1}{u}\, du = -[\ln u]_1^{1-x} = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(v) Παρατηρούμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = f(1/2)$. Επειδή $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, έπεται ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \ln 2$.

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε το μήκος $L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\ dx$ της επίπεδης καμπύλης με παραμετρική εξίσωση $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, \pi/2]$. (1 μον.)

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx \qquad (1,5 \text{ μον.})$$

ΛΥΣΗ: (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\ cos^2 t\ (-sin t))^2\ +\ (3\ sin^2 t\ cos t)^2}\ dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ cos^4 t\ sin^2 t\ +\ 9\ sin^4 t\ cos^2 t}\ dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ cos^2 t\ sin^2 t\ (cos^2 t + sin^2 t)}\ dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 3\ |cos t \cdot sin t|\ dt = 3 \int_0^{\pi/2} cos t \cdot sin t\ dt \end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή τώρα,

$$\int_0^{\pi/2} cos t \cdot sin t\ dt = \int_0^{\pi/2} (sin t)' \cdot sin t\ dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)'\ dt = \frac{1}{2} \big(\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)\big) = 1/2$$

παίρνουμε ότι $L = 3/2$.

(β) Θέτουμε $u = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Τότε $x = u^2$ οπότε $dx = 2udu$ και άρα

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx &= 2 \int_0^1 \frac{u \arctan u}{u(1+u^2)}\ du \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\arctan u}{1+u^2}\ du \\ &= 2 \int_0^1 \arctan u (\arctan u)'\ du \\ &= \int_0^1 \big((\arctan u)^2\big)'\ du \\ &= [(\arctan u)^2]_0^1 = (\arctan 1)^2 - (\arctan 0)^2 = \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

Θέμα 4. Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. (2,5 μον.)

ΛΥΣΗ: Η F είναι C^2. Πράγματι, $F_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) = 4x^3 - 4x + 4y$, $F_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y) = 4y^3 + 4x - 4y$, $F_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$, $F_{yy}(x, y) = 4y^2 - 4$ και $F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y) = 4$ όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία. Το σύστημα $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$ δίνει ότι $x^3 = -y^3 = (-y)^3$ ισοδύναμα $x = -y$ (αφού η $f(t) = t^3$ ως γνησίως αύξουσα είναι 1-1). Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Τώρα έχουμε $\Delta(0, 0) = 0$ ($\Delta = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2$) και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε απο αυτό για το αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε τα εξής:
(α) $F(0, 0) = 0$,
(β) $F(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ αν $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, και
(γ) $F(x, x) = 2x^4 > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

Απο τα παραπάνω έχουμε ότι *όσο κοντά θέλουμε* στο $(0, 0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία τέτοια ώστε η τιμή της F στο ένα απο αυτά να είναι αρνητική και άρα μικρότερη του $F(0, 0)$ ενώ η τιμή στο άλλο θετική και άρα μεγαλύτερη του $F(0, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι η F δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0, 0)$ (δηλ. το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο). Τέλος όπως εύκολα ελέγχουμε $\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ και $F_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = F_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε και τα δύο αυτά σημεία είναι τοπικά ελάχιστα για την F.

Άρα η F έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο τοπικά ελάχιστα.