Μαθηματική Ανάλυση
ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΑΤΜ 19/9/ 2020

Ονοματεπώνυμο και ΑΜ :

Α. Επιλέξτε την σωστή απάντηση στις επόμενες ερωτήσεις :

Α1. (0,5 μον) Η ακολουθία $\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^n$ ***(γ) συγκλίνει στο*** e^2 διότι ως γνωστόν

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

και

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^n = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to e^2$$

Α2. (0,5 μον) Αν $a_n > 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $s \in \mathbb{R}$ τότε ***(β)*** $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty$, διότι αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό έχουμε ότι $a_n \to 0$ και άρα $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Α3. (0,5 μον) Αν μια δυναμοσειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = 1$ τότε ***(α) αποκλίνει για όλα τα*** $x > 1$. Πράγματι, έστω $x_0 > 1$ και έστω R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $x < -R$ ή $x > R$ (στα άκρα $-R$ και $+R$ μπορεί να συγκλίνει ή όχι). Αφού λοιπόν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = 1$ θα πρέπει αναγκαστικά $R \leq 1$. Άρα $R < x_0$ και συνεπώς η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x_0.

Α4. (0,5 μον) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} = -\frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dots$ ***(β) συγκλίνει στο*** $\frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

και συνεπώς

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η δοθείσα σειρά προκύπτει από την παραπάνω για $x = -\frac{1}{2}$ και συνεπώς το άθροισμά της είναι το $e^{-1/2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 = \frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$.

A5. (0,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) < 0$. Τότε στο (x_0, y_0) η f έχει ***σαγματικό σημείο αφού*** $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$.

B. Γράψτε την απάντηση στις επόμενες ασκήσεις :

B1. (2,5 μον) Έστω $a_n = \dfrac{4^n n!}{n^n}$. (α) Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. (β) Είναι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουσα;

Απάντηση: (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{4^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{4^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot n^n}{(n+1)^n} \\ &= 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \\ &= 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{4}{e}.\end{aligned}$$

(β) Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{4}{e} > 1$, απο το κριτήριο Λόγου έπεται ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

B2. (2,5 μον) Δίνεται η δυναμοσειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n} \cdot (x-2)^n$ με κέντρο το $x_0 = 2$. Υπολογίστε (α) την ακτίνα σύγκλισης και (β) όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει και όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά αποκλίνει.

Απάντηση: (α) Η δυναμοσειρά είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-2)^n$ με $a_n = \dfrac{1}{n \cdot 3^n}$. Έχουμε $R = 1/\rho$ όπου

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}.$$

Συνεπώς $R = 3$.

(β) Έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (2-R, 2+R) = (-1, 5)$ και αποκλίνει για όλα τα $x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$. Για $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει ως εναλλάσσουσα αρμονική.

Για $x = 5$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που αποκλίνει (αρμονική). Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει στα $x \in [-1, 5)$ και αποκλίνει στα $x \in (-\infty, -1) \cup [5, +\infty)$.

B3. (2,5 μον) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 5$.

Απάντηση: Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = 4y^3 - 4x$. Άρα $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y$ και $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^3 = x$. Συνεπώς

$$x^9 = x \Leftrightarrow x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς αφού $y = x^3$ έχουμε τα εξής τρία κρίσιμα σημεία

$$(0, 0),\ (1, 1) \text{ και } (-1, -1)$$

Είναι $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = -4$ και $f_{yy}(x, y) = 12y^2$. Άρα $\Delta(x, y) = 144x^2y^2 - 16$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επειδή $\Delta(1, 1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$ στο $(1, 1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Ομοίως στο $(-1, -1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.