Μαθηματική Ανάλυση
ΣΑΤΜ 2/9/ 2020

Θέμα 1. (α) Είναι σωστές ή όχι οι επόμενες προτάσεις; (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)

(i) Η ακολουθία $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ συγκλίνει στο 1. (0,5 μον.)

(ii) Αν $\lim_{m\to+\infty} a_n = 0$ τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. (0,5 μον.)

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. (1,5 μον.)

Απάντηση : (α) (i) Λάθος, αφού

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

(ii) Λάθος αφού $\dfrac{1}{n} \to 0$ αλλά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(β) Θέτουμε $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{2^n\cdot n!\cdot(n+1)^{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n} \\
&= 2\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= 2\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= 2\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1
\end{aligned}$$

και άρα απο το Κριτήριο Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ συγκλίνει.

Θέμα 2. (α) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$. Για ποια $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει; (1,5 μον.)

(β) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και έστω $0 < x_1 < x_2$. Είναι δυνατόν η δυναμοσειρά να αποκλίνει στο x_1 και να συγκλίνει στο x_2 ? (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας) (1 μον.)

Απάντηση : (α) Έχουμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ με $a_n = \dfrac{2^n}{n}$. Η ακτίνα σύγκλισης τηω δυναμοσειράς δίνεται απο τον τύπο $R = 1/\rho$, όπου

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = 2\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2$$

και άρα $R = 1/2$.

Γνωρίζουμε (Θεώρημα Cauchy–Hadamard) οτι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και αποκλίνει για $x < -\frac{1}{2}$ και $x > \frac{1}{2}$. Μένει να εξετάσουμε τη σύγκλιση στα σημεία $x = -\frac{1}{2}$ και $x = \frac{1}{2}$.

Για $x = -\frac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν (Κριτήριο Leibnitz) συγκλίνει.

Για $x = \frac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική που ως γνωστόν αποκλίνει.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(β) Όχι, αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = x_1$ τότε αποκλίνει για όλα τα $x > x_1$. Πράγματι, έστω $x_2 > x_1$ και έστω R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $x < -R$ ή $x > R$ (στα άκρα $-R$ και $+R$ μπορεί να συγκλίνει ή όχι). Αφού λοιπόν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = x_1$ θα πρέπει αναγκαστικά $R \leq x_1$. Άρα και $R < x_2$ και συνεπώς η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x_2.

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 + x}\, dx$. (2 μον.)

(β) Είναι σωστό ή όχι ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ υπάρχει $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$? (0,5 μον.)

Απάντηση: (α)

$$\int \frac{1}{x^3 + x}\, dx = \int \frac{1}{x(x^2 + 1)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$$

(β) Ναί, αφού απο το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ έχει την ιδιότητα $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Θέμα 4. Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$. (2,5 μον.)

Απάντηση: Έχουμε $f_x(x, y) = 6x^2 - 6x$, $f_y(x, y) = 6y^2 + 6y$. Άρα $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ και $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = -1$. Συνεπώς έχουμε τα εξής τέσσερα κρίσιμα σημεία

$$(0, 0),\ (0, -1),\ (1, 0) \text{ και } (1, -1)$$

Είναι $f_{xx}(x, y) = 12x - 6$, $f_{xy}(x, y) = 0$ και $f_{yy}(x, y) = 12y + 6$. Άρα $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = (12x - 6)(12y + 6)$.
Επειδή $\Delta(0, 0) = -36 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.
Επειδή $\Delta(0, -1) = 36 > 0$ και $f_{xx}(0. - 1) = -6 < 0$ στο $(0, -1)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.
Επειδή $\Delta(1, 0) = 36 > 0$ και $f_{xx}(1.0) = 6 > 0$ στο $(1, 0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.
Επειδή $\Delta(1, -1) = -36 < 0$ και $f_{xx}(0. - 1) = -6 < 0$ το $(1, -1)$ είναι σαγματικό σημείο.
Άρα η f έχει ακριβώς ένα τοπικό μέγιστο στο σημείο $(0, -1)$ και ακριβώς ένα τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(1, 0)$.