

ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
3 Ιουνίου 2020

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ 5 ΖΗΤΗΜΑΤΑ

1. Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(1) Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) = 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f = 0$.

3. Έστω $f : (0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in (0, 1)$ και $f(x) = 2$ αν $x \in (1, 2)$.

(1) Είναι η f συνεχής?

(2) Είναι η f παραγωγίσιμη?

4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με f'' συνεχή και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) \right|$$

συγκλίνει.

5. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + x^2} dx.$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 1,5 ΩΡΕΣ
ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ (2 μον. το καθένα)