

**ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ**  
**9 Ιουνίου 2021**

**ΟΜΑΔΑ Α**

**ΘΕΜΑ 1.** Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) Έστω  $X \subseteq \mathbb{R}$  μη κενό και  $s \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε (α)  $X \cap (s, +\infty) = \emptyset$  και (β)  $X \cap (s', +\infty) \neq \emptyset$ , για κάθε  $s' < s$ . Τότε  $s = \sup X$ .

(β) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής μη σταθερή. Τότε υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$  με  $f(x)$  ρητό.

(γ) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη με  $f'$  μη σταθερή. Τότε υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$  με  $f'(x)$  άρρητο.

(δ) Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής. Τότε υπάρχει  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $F'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in [a, b]$ .

**Απάντηση:** (α) Αφού  $X \cap (s, +\infty) = \emptyset$  έχουμε ότι  $x \leq s$  για όλα τα  $x \in X$  και άρα το  $s$  είναι άνω φράγμα του  $X$ . Επειδή επιπλέον  $X \cap (s', +\infty) \neq \emptyset$ , για κάθε  $s' < s$ , έπεται ότι για κάθε  $s' < s$  υπάρχει  $x \in X$  με  $s' < x$  και άρα κάθε  $s' < s$  δεν είναι άνω φράγμα του  $X$ . Συνεπώς το  $s$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του  $X$ , με άλλα λόγια  $s = \sup X$ . Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

(β) Αφού η  $f$  είναι μη σταθερή υπάρχουν  $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Έστω  $a = f(x_1)$  και  $b = f(x_2)$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών δηλαδή η  $f$  λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των  $a$  και  $b$ . Από την πυκνότητα των ρητών στο  $\mathbb{R}$  μεταξύ των  $a$  και  $b$  υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρα η  $f$  λαμβάνει άπειρες ρητές τιμές. Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

(γ) Ομοίως με το (β) αφού η  $f'$  είναι μη σταθερή υπάρχουν  $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f'(x_1) \neq f'(x_2)$ . Έστω  $a = f'(x_1)$  και  $b = f'(x_2)$ . Από Θεώρημα Darboux η  $f'$  έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, δηλαδή η  $f'$  λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των  $a$  και  $b$ . Από την πυκνότητα των αρρήτων στο  $\mathbb{R}$  μεταξύ των  $a$  και  $b$  υπάρχουν άπειροι άρρητοι και άρα η  $f'$  λαμβάνει άπειρες άρρητες τιμές. Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

(δ) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η συνάρτηση  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  είναι καλά ορισμένη και  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

**ΘΕΜΑ 2.** (α) Δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan x}{x} \right) = 1$ . (β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left( \frac{1}{n} \right)$ .

**Απάντηση:** (α) Επειδή  $\arctan 0 = 0$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} \right)$$

που σημαίνει ότι το ζητούμενο όριο  $\ell$  είναι η παράγωγος της  $\arctan x$  στο  $x = 0$ .

Επειδή  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$  έπεται ότι το ζητούμενο όριο είναι το  $\ell = 1$ .

(β) Έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{(a)}{=} 1$$

Επειδή η αρμονική σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  αποκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left( \frac{1}{n} \right)$  αποκλίνει.

**ΘΕΜΑ 3.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε  $f(q) = q^3$  για κάθε  $q \in \mathbb{Q}$ . Δείξτε ότι  $f(x) = x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Απάντηση:** Έστω  $x \in \mathbb{R}$ . Από την πυκνότητα των ρητών στο  $\mathbb{R}$  υπάρχει ακολουθία  $(q_n)$  ρητών με  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = x$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x$ , από Αρχή Μεταφοράς, έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(q_n) = f(x).$$

Ομοίως, από Αρχή Μεταφοράς για την συνεχή συνάρτηση  $g(x) = x^3$ , έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(q_n) = g(x)$$

Από υπόθεση  $f(q_n) = g(q_n)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και άρα από μοναδικότητα του ορίου,  $f(x) = g(x) = x^3$ .

**ΘΕΜΑ 4.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και  $f(0) = 0$ . Δείξτε ότι υπάρχει  $a \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f \left( \frac{1}{n} \right) - \frac{a}{n} \right|$$

συγκλίνει.

**Απάντηση:** Από τον τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $x \neq 0$  υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$  μεταξύ των  $x$  και  $0$  τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot x^2$$

Άρα για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και για  $x = \frac{1}{n}$  θα υπάρχει  $\xi_n \in \mathbb{R}$  με

$$0 < \xi_n < \frac{1}{n}$$

τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{1}{n} + \frac{f''(\xi_n)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(\xi_n)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = 0$$

και

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{f'(0)}{n} \right| = \frac{|f''(\xi_n)|}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Αφού η  $f''$  είναι συνεχής έπεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f''(\xi_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} f''(\xi_n) = |f''(0)|$$

και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{f'(0)}{n} \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{f''(0)}{2} \in \mathbb{R}$$

Από Οριακό κριτήριο σύγκλισης και επειδή η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  συγκλίνει, έπεται ότι η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{f'(0)}{n} \right|$  συγκλίνει. Άρα για  $a = f'(0)$  έχουμε το ζητούμενο.

**ΘΕΜΑ 5.** Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  γνησίως αύξουσα παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $f(a) = a$  και  $f(b) = b$ . Έστω  $g = f^{-1}$  η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  (δηλαδή  $g(f(t)) = t$  για κάθε  $t \in [a, b]$ ). Δείξτε την σχέση

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = b^2 - a^2$$

Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική εξήγηση για το αποτέλεσμα που βρήκατε κάνοντας ένα σχήμα;

**Απάντηση:** Χρησιμοποιώντας την αντικατάστασης  $x = f(t)$ ,  $t \in [a, b]$  και ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b g(f(t))f'(t) dt = \int_a^b t f'(t) dt \\ &= [t f(t)]_a^b - \int_a^b t' f(t) dt \\ &= b^2 - a^2 - \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

και άρα

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = b^2 - a^2$$

Για ένα σχήμα κάντε την  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$ . Τότε  $g(x) = \sqrt{x}$  και  $\int_0^1 (f(x) + g(x)) dx = 1$  που είναι ίσο με το εμβαδό του τετραγώνου με πλευρά το  $[0, 1]$ .

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 1,5 ΩΡΕΣ**

**ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ (2 μον. το καθένα)**