# ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
## 06/02/2019

**Θέμα 1.** (α) Ισχύουν ή όχι οι εξής προτάσεις και γιατί:
(1) Αν $\lim a_n = a > 0$ τότε η $(a_n)$ είναι τελικά θετική.
(2) Κάθε φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.
(3) Αν $(a_n)$ φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)$ στοιχείων του $A$ με $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

**Θέμα 2.** (α) Βρείτε τα σημεία συνέχειας της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x$ αν $x$ ρητός και $f(x) = 1$ αν $x$ άρρητος.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $y_0 \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει μια φραγμένη ακολουθία $(x_n)$ με $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y_0$ δείξτε ότι υπάρχει και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = y_0$.

(γ) Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ δείξτε ότι $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

**Θέμα 3.** (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η $f'$ παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών τι συμπέρασμα βγάζετε για την $f$;

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''$ συνεχή.

(i) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Με χρήση του τύπου Taylor δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_n \in [0, 1/n]$ και $\xi_n' \in [-1/n, 0]$ τέτοια ώστε

$$f(\frac{1}{n}) + f(-\frac{1}{n}) = 2f(0) + \frac{f''(\xi_n) + f''(\xi_n')}{2n^2}.$$

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f(\frac{1}{n}) + f(-\frac{1}{n}) - 2f(0)\right|$.

**Θέμα 4.** (α) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Με βάση το ολοκλήρωμα Riemann κατάλληλης συνάρτησης υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

(β) Με χρήση του γενικού θεωρήματος Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού υπολογίστε το

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{1 + x^{2019}}}{1 + x^2}\, dx.$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2.5 ΩΡΕΣ

# ΛΥΣΕΙΣ

1 (α1) **ΣΩΣΤΟ**: $\alpha_n \to \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$.
Άρα για $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ και $n_0 = n_0(\alpha/2)$ έχουμε $|\alpha_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2} \ \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow \alpha_n > \alpha/2 > 0 \ \forall n \geq n_0$.

(α2) **ΛΑΘΟΣ**: $\alpha_n = (-1)^n$. (α3) **ΛΑΘΟΣ**: $\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

(β) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sup A - \frac{1}{n} < \sup A$ και άρα $\sup A - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του $A$. Αυτό σημαίνει ότι $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \alpha_n \in A$ με $\sup A - \frac{1}{n} < \alpha_n \leq \sup A$.
Από Θεωρ. Ισοσυγκλ. $\alpha_n \to \sup A$.

2 (α) Η $f$ είναι συνεχής μόνο για $x_0 = 1$. Πράγματι· έστω $x \neq 1$ και ας υποθέσουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι η $f$ ήταν συνεχής στο $x$. Επιλέγουμε $(q_n)$ με $\lim q_n = x$, $q_n \in \mathbb{Q} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim f(q_n) = \lim q_n = x = f(x)$. Από την άλλη μεριά όμως αν $(\alpha_n)$ ακολουθία άρρητων με $\alpha_n \to x$ θα έπρεπε $\lim f(\alpha_n) = \lim 1 = 1 = f(x)$. Άρα $f(x) = x = 1$, άτοπο. Αν τώρα $x_0 = 1$ τότε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ ώστε αν $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$ $(1 = f(1))$. Πράγματι αρκεί να θέσουμε $\delta = \varepsilon$ και να διακρίνουμε περιπτώσεις $x \in \mathbb{Q}$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2(β) Η $(x_n)$ από B-W περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n})$. Έστω $x_{k_n} \to x_0$. Η $(f(x_{k_n}))$ είναι υπακολουθία της $(f(x_n))$ άρα έχει το ίδιο όριο με αυτή, δηλ. $f(x_{k_n}) \to y_0$. Επειδή $f$ συνεχής και $x_{k_n} \to x_0$ από αρχή Μεταφοράς $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$. Από μοναδικότητα ορίου $y_0 = f(x_0)$.

2γ) Θέτουμε $h = g - f$. Τότε $h : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $h(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$.
Από γνωστό θεώρημα $\int_a^b h(x)dx > 0 \iff \int_a^b (g(x) - f(x))dx > 0 \iff$
$\int_\alpha^b g(x)dx > \int_\alpha^b f(x)dx$, (γραμμικότητα ολοκλ.)

3 (α) Αν $f'$ λαμβάνει δύο τιμές τότε από Darboux λαμβάνει και όλες τις ενδιάμεσες. Άρα η $f'$ είτε είναι σταθερή ή λαμβάνει άπειρες τιμές. Εφόσον η υπόθεση λέει ότι η $f'$ δεν λαμβάνει άπειρες τιμές έχουμε ότι η $f' = c \Rightarrow f(x) = cx + c_0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(β) (i) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$ για κάποιο $\xi$ μεταξύ 0 και $x$.
Άρα $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \xi_n \in (-\frac{1}{n}, 0)$ και $\xi_n' \in (0, \frac{1}{n})$:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\frac{1}{n} + \frac{f''(\xi_n')}{2!}\frac{1}{n^2}$$

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right) + \frac{f''(\xi_n)}{2!}\frac{1}{n^2}.$$

Με πρόσθεση λαμβάνουμε το ζητούμενο.

(3Bii) Έχουμε $f''(\xi_n) \to f''(0)$ και ομοίως $f''(\xi_n') \to f''(0)$ (λόγω συνέχειας της $f''$ και του ότι $-\frac{1}{n} < \xi_n' < 0 < \xi_n < \frac{1}{n} \Longrightarrow \xi_n \to 0,\ \xi_n' \to 0$.

Άρα η $\left(\frac{f''(\xi_n)+f''(\xi_n')}{2}\right)$ είναι φραγμένη ακολουθία ως συγκλίνουσα. Αν $M$ άνω φράγμα έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(-\frac{1}{n}\right)-2f(0)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f''(\xi_n)+f''(\xi_n')}{2}\right| \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\leq M \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ που συγκλίνει ως αρμονική τάξης $p=2>1$.

Από κριτήριο σύγκρισης έπεται το ζητούμενο.

4.(i) $$\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1^k}{n^k}+\frac{2^k}{n^k}+\dots+\frac{n^k}{n^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$ με $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^k$.

Άρα $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k+\dots+n^k}{n^{k+1}} = \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}.$$

(ii) $\forall n$ $$\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{1+x^{2019}}}{1+x^2}\,dx \overset{(\text{ΙΣΟΝ})}{=} \sqrt[n]{1+\xi_n^{2019}}\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

για κάποιο $\xi_n\in[0,1]$. (Από Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής)

Έχουμε $$1 \leq \sqrt[n]{1+\xi_n^{2019}} \leq \sqrt[n]{1+1} = \sqrt[n]{2}$$ και άρα

$$\lim \sqrt[n]{1+\xi_n^{2019}} = 1 \quad (\sqrt[n]{2}\to 1).$$

Επιπλέον $$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Άρα $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\sqrt[n]{1+x^{2019}}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$