**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ**
**(16/2/2018)**

**ΘΕΜΑ 1.** (α) Έστω η ακολουθία $(a_n)$ με $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$.

(β) Έστω η ακολουθία $(a_n)$ με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \dfrac{1}{3+a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $(a_n)$ συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

**ΛΥΣΗ:** (α) **1ος τρόπος:** Από ανισότητα αρμονικού, γεωμετρικού και αριθμητικού μέσου έχουμε

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Επίσης από Λήμμα Cesaro,

$$\text{(2)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ομοίως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$$

και συνεπώς

$$\text{(3)} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1} = a.$$

Από (1)-(3) και το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών έπεται το ζητούμενο.

**2ος τρόπος:** Έχουμε

$$\ln\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\right) = \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n}$$

και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$$

από Λήμμα Cesaro και συνέχεια της $\ln x$. Ομοίως, απο συνέχεια της $e^x$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})} = e^{\ln a} = a.$$

**3ος τρόπος:** Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το εξής Θεώρημα: Αν $(\gamma_n)$ ακολουθία με $\gamma_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = a$ τότε και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n} = a$. Πράγματι, θέτοντας $\gamma_n = a_1 \cdots a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{a_1 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$$

και άρα $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n} = a$.

(β) Προφανώς $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης $\forall n \geq 2$ έχουμε

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{1}{3+a_n} - \frac{1}{3+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(3+a_n)(3+a_{n-1})} \leq \frac{1}{9} \cdot |a_n - a_{n-1}|.$$

Συνεπώς η ακολουθία $(a_n)$ είναι Cauchy και άρα $a_n \to a$. Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty} a_n} \Rightarrow a = \frac{1}{3+a} \Rightarrow a = \frac{-3+\sqrt{13}}{3}.$$

**ΘΕΜΑ 2.** (α) Θεωρούμε το σύνολο $K = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Βρείτε τα $\inf K$ και $\sup K$.

(β) Έστω $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Εξετάστε αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

**ΛΥΣΗ:** (α) Έχουμε

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{m^2+4n^2}{nm} \geq \frac{4mn}{mn} = 4$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $m = 2n$. Άρα $\inf K = \min K = 4$.

Απο την άλλη μεριά, αν $m = 1$ τότε

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{1}{n} + 4n \geq 4n$$

και άρα $\sup K = +\infty$.

(β) **1ος τρόπος:** Αν η $(a_n)$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{1+M}$$

και άρα απο κριτήριο σύγκρισης η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει. Διαφορετικά, υπάρξει υπακολουθία $(a_{k_n})$ της $(a_n)$ με $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty$. Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{k_n}}{1+a_{k_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{k_n}}+1} = 1.$$

Άρα η ακολουθία $(\frac{a_n}{1+a_n})$ δεν συγκλίνει στο 0 οπότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει.

**2ος τρόπος:** Έστω ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει. Τότε

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1+a_n}\right)$$

και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1+a_n) = 1.$$

Αλλά τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{a_n}{1+a_n}} = \lim_{n\to\infty} (1+a_n) = 1$$

οπότε απο κριτήριο ορίου λόγου, αφού η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, άτοπο. Άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει.

**ΘΕΜΑ 3.** (α) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η $f$ είναι γνησίως μονότονη.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq x_0$. Αν $\lim_{x\to x_0} f'(x) = c \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και $f'(x_0) = c$.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^2+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε τις τιμές $f(0)$, $f'(0)$ και $f''(0)$. (*Υπόδειξη*: Για την $f''(0)$ χρησιμοποιήστε τον τύπο Taylor τάξης $n = 1$ για κέντρο το $x_0 = 0$).

**ΛΥΣΗ:** (α) **1ος τρόπος:** Απο το θεώρημα Darboux (η $f'$ ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών) έχουμε ότι η $f'$ θα διατηρεί πρόσημο. Άρα είτε $f'(x) < 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ οπότε (απο το θεώρημα Μέσης Τιμής) η $f$ είναι γνησίως αύξουσα, ή $f'(x) < 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, οπότε η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

**2ος τρόπος:** Γνωρίζουμε ότι κάθε συνεχής και 1-1 συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, όπου $I$ διάστημα του $\mathbb{R}$, είναι γνησίως μονότονη. Επειδή η $f$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) αρκεί συνεπώς να δειχθεί ότι είναι 1-1. Πράγματι, έστω $x_1 \neq x_2$. Τότε απο το θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi$ μεταξύ τους με $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi)$. Απο υπόθεση, $f'(\xi) \neq 0$ και άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(β) **1ος τρόπος:** Επειδή $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, από Αρχή Μεταφοράς αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)$ με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$ ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = c$. Πράγματι έστω $(x_n)$ μια τέτοια ακολουθία. Τότε απο το θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n$ μεταξύ των $x$ και $x_n$ τέτοιο ώστε $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(\xi_n)$. Επειδή $\xi_n$ μεταξύ των $x_n$ και $x_0$ έχουμε $0 < |\xi_n - x_0| < |x - x_0|$. Άρα αφού $x_n \to x_0$, $\lim_{n\to\infty} |\xi_n - x_0| = \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$ ισοδύναμα $\xi_n \to x_0$. Τώρα από υπόθεση $\lim_{x\to x_0} f'(x) = c$ και άρα (πάλι από Αρχή Μεταφοράς αφού $\xi_n \to x_0$ και $\xi_n \neq x_0$), $\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = c$. Συνεπώς $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n) = c$.

**2ος τρόπος:** (Πολύ γρήγορος!) Εφαρμόζουμε τον κανόνα De L'Hospital:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x)-f(x_0)\big)'}{(x-x_0)'} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0} f'(x) = c.$$

(γ) Η $f$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και άρα από Αρχή Μεταφοράς,

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

Ομοίως απο Αρχή Μεταφοράς (δες και το (β) ερώτημα),

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1} - 0}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

Τέλος, απο τον τύπο Taylor, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi$ μεταξύ των $x$ και 0 τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n \in (0, 1/n)$ με

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{f''(\xi_n)}{2}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} + \frac{f''(\xi_n)}{2}\frac{1}{n^2}$$
$$\Rightarrow f''(\xi_n) = -\frac{2n^2}{n(n^2+1)}.$$

Επειδή $0 < \xi_n < 1/n$ έχουμε ότι $\xi_n \to 0$ και αφού η $f''$ είναι συνεχής, απο Αρχή Μεταφοράς,

$$f''(0) = \lim_{n\to\infty} f''(\xi_n) = 0.$$

**ΘΕΜΑ 4.** (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = -1$ αν $x$ ρητός και $f(x) = 1$ αν $x$ άρρητος (i) είναι παντού ασυνεχής και (ii) δεν είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Βρείτε το $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(γ) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. (i) Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,b)$ με $f(x_0) > 0$, δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ με $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a,b]$ και $f(x) > f(x_0)/2$ για όλα τα $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (ii) Αν η $f$ είναι επιπλέον ολοκληρώσιμη και παίρνει μη αρνητικές τιμές δείξτε ότι $\int_a^b f(x)\, dx \geq f(x_0) \cdot \delta$. (iii) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, δείξτε ότι αν η $f$ είναι συνεχής, παίρνει μη αρνητικές τιμές και δεν είναι η μηδενική συνάρτηση τότε $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.

**ΛΥΣΗ:** (α) (i) Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπήρχε $x_0 \in [0,1]$ με $f$ συνεχή στο $x_0$. Απο πυκνότητα ρητών και αρρήτων υπάρχουν ακολουθίες $(q_n)$ και $(a_n)$ με $q_n \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $a_n \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ με $x_0 = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. Αλλά τότε από Αρχή Μεταφοράς θα έπρεπε

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1 \text{ και } f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

άτοπο.

(ii) Έστω $\mathcal{P} = \{0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}$ διαμέριση του $[0,1]$. Το *κάτω άθροισμα της $f$ ως προς την $\mathcal{P}$* είναι $L(f, \mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$, όπου $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ και $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Επειδή η $f$ παίρνει μόνο τις τιμές $-1$ και $+1$ και $f(q) = -1$ για κάθε $q$ ρητό, απο πυκνότητα των ρητών έχουμε ότι $m_i = -1$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Άρα

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (-1)\Delta x_i = (-1)\sum_{i=1}^n \Delta x_i = -1$$

αφού το άθροισμα των $\Delta x_i$ είναι ίσο με το πλάτος του $[0,1]$, δηλαδή $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1 - 0 = 1$. Ομοίως, απο πυκνότητα των αρρήτων, $\forall 1 \leq i \leq n$ είναι $M_i = sup\{f(x) :$

$x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1$. Συνεπώς, για το *άνω άθροισμα της $f$ ως προς την $\mathcal{P}$* έχουμε

$$U(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

Άρα

$$L(f) = \{L(f,\mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } [0,1]\} = \{-1\},$$

που σημαίνει ότι το κάτω ολοκλήρωμα της $f$ είναι το $\sup L(f) = -1$. Αντίστοιχα,

$$U(f) = \{U(f,\mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } [0,1]\} = \{1\}$$

και άρα το άνω ολοκλήρωμα της $f$ είναι το $\inf U(f) = 1$.

Επειδή το κάτω και άνω ολοκλήρωμα είναι διαφορετικά η $f$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\frac{1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k}{n^{k+1}} = \Big(\frac{1}{n}\Big)^k \cdot \frac{1}{n} + \Big(\frac{2}{n}\Big)^k \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \Big(\frac{n}{n}\Big)^k \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^k$, $x_i = i/n$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots n$ και $\xi_i = \dfrac{i}{n}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Άρα το κλάσμα $\dfrac{1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k}{n^{k+1}}$ είναι το άθροισμα Riemann της συνάρτησης $f(x) = x^k$, $x \in [0,1]$ για την διαμέριση $\mathcal{P}_n = \{0 < 1/n < 2/n < \cdots < 1\}$ και ενδιάμεσα σημεία τα $1/n, 2/n, \ldots, n/n$. Επειδή το πλάτος της $\mathcal{P}_n$ είναι $1/n \to 0$ και η $f$ ως συνεχής είναι ολοκληρώσιμη, θα πρέπει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}.$$

(γ) (i) Έστω $x_0 \in (a,b)$ με $f(x_0) > 0$ και $f$ συνεχής στο $x_0$. Άρα για $\epsilon = f(x_0)/2 > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2$ για όλα τα $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$. Επειδή το $x_0$ είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$, μικραίνοντας το $\delta$ αν χρειάζεται μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a,b]$. Άρα για όλα τα $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} &\Leftrightarrow -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} \\ &\Rightarrow f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \Rightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x). \end{aligned}$$

(ii) Έστω ότι η $f$ είναι επιπλέον ολοκληρώσιμη και παίρνει μη αρνητικές τιμές και έστω $\delta > 0$ όπως στο ερώτημα (i). Τότε

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)\, dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\, dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\, dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\, dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\, dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx = \frac{f(x_0)}{2} \cdot 2\delta = f(x_0) \cdot \delta, \end{aligned}$$

(iii) Επειδή η $f$ είναι συνεχής και δεν είναι η μηδενική συνάρτηση, έχουμε ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο $x_0 \in (a,b)$ με $f(x_0) \neq 0$ (διαφορετικά, αν για όλα τα $x \in (a,b)$ είχαμε ότι $f(x) = 0$ τότε λόγω συνέχειας θα ήταν και $f(a) = f(b) = 0$ και άρα $f = 0$). Επειδή $f \geq 0$ έχουμε $f(x_0) > 0$. Τέλος επειδή η $f$ είναι συνεχής είναι και ολοκληρώσιμη. Άρα ισχύουν όλες οι προυποθέσεις του ερωτήματος (ii) και άρα

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq f(x_0) \cdot \delta > 0.$$