ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗ, ΣΕΜΦΕ, 5/2/2021
ΟΜΑΔΑ Β (Ο ΑΜ λήγει σε 1, 3, 5, 7, 9)

Α. (3 μον) ***Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας***:

(**Α1**) (0,5 μον) Ισχύει ότι $\tan\left(\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right) = -\dfrac{4}{3}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \theta$. Από τον ορισμό της $\arccos x$ έπεται ότι $\theta \in [0,\pi]$. Άρα $\sin\theta \geq 0$, οπότε $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(-3/5)^2} = 4/5$. Οπότε $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta = -4/3$ και συνεπώς η πρόταση είναι αληθής.

(**Α2**) (0,5 μον) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση τότε υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ με $f(x)$ άρρητο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αφού η f είναι μη σταθερή λαμβάνει τουλάχιστον δύο διαφορετικές τιμές και αφού είναι συνεχής λαμβάνει και όλες τις ενδιάμεσες. Από την πυκνότητα των αρρήτων έπεται ότι λαμβάνει και άρρητες τιμές και συνεπώς η πρόταση είναι αληθής.

(**Α3**) (α) (0,5 μον) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη τότε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) (0,5 μον) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Η πρόταση είναι ψευδής. Πχ. αν $f(x) = x^3$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα αλλά $f'(0) = 0$.

(β) Από το Θεώρημα Darboux η f' διατηρεί πρόσημο. Άρα είτε $f' > 0$ ή $f' < 0$. Αν $f' > 0$ από το Θεώρημα Μέσης Τιμής η f είναι γνησίως αύξουσα. Αντίστοιχα αν $f' < 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η πρόταση είναι αληθής.

(**Α4**) (0,5 μον) Έστω η συνάρτηση $f : (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ με $f(x) = x$ αν $x < 0$ και $f(x) = x+1$ αν $x > 0$. Τότε (α) η f είναι συνεχής και (β) η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η f είναι συνεχής αφού είναι συνεχής σε καθένα από τα δύο ξένα διαστήματα που διαμερίζουν το πεδίο ορισμού της. Επίσης δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού για $\epsilon = 1$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x < 0 < y$ με $|y - x| < \delta$ και $|f(y) - f(x)| = y + 1 - x > 1$. Άρα η πρόταση είναι αληθής.

(**Α5**) (0,5) Κάθε $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη είναι συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η πρόταση είναι ψευδής, αφού κάθε μονότονη συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα συνεχής αλλά είναι ολοκληρώσιμη.

Β. (7 μον) ***Να γράψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων :***

Β1. (1 μον) Έστω $A = \left\{ \dfrac{3x^2}{4x^2+5} : x \neq 0 \right\}$. Βρείτε τα $\inf A$ και $\sup A$.

ΛΥΣΗ: Είναι $\inf A = 0$ και $\sup A = 3/4$. Πράγματι,

$$0 < \frac{3x^2}{4x^2+5} < \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}$$

για κάθε $x \neq 0$. Συνεπώς το 0 είναι κάτω φράγμα του A και το $3/4$ άνω φράγμα. Μένει να δειχθεί ότι το 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A και το $3/4$ το ελάχιστο άνω φράγμα του. Επειδή

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{4x^2+5} = 0$$

έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με $\dfrac{3x^2}{4x^2+5} < \epsilon$ όταν $0 < |x| < \delta$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ με $a < \epsilon$, οπότε οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος του 0 δεν είναι κάτω φράγμα του A. Συνεπώς το 0 είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A, δηλαδή $\inf A = 0$.

Αντίστοιχα

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{4x^2+5} = \frac{3}{4}$$

οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ με $\dfrac{3x^2}{4x^2+5} > \dfrac{3}{4} - \epsilon$ όταν $x > M$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ με $a > \dfrac{3}{4} - \epsilon$, οπότε οποιοσδήποτε αριθμός μικρότερος του $3/4$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Αυτό σημαίνει ότι το $3/4$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A, δηλαδή $\sup A = 3/4$.

Β2. (α) (1 μον) Βρείτε το $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

(β) (1 μον) Υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}$.

ΛΥΣΗ: (α) Έχουμε

$$1 < \sqrt[n^2]{n} \leq \sqrt[n]{n}$$

Πράγματι, $1 \leq \sqrt[n^2]{n} \leq \sqrt[n]{n} \Leftrightarrow 1 \leq \left(\sqrt[n^2]{n}\right)^{n^2} \leq \left(\sqrt[n]{n}\right)^{n^2} \Leftrightarrow 1 \leq n \leq n^n$, που ισχύει. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{n} = 1$.

(β) Είναι

$$1 \leq \sqrt[n^2]{1^n + 2^n + \cdots + n^n} \leq \sqrt[n^2]{n \cdot n^n}$$

Επειδή

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{n \cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

πάλι από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{1^n + 2^n + \cdots + n^n} = 1$.

B3. (1 μον) Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε x άρρητο δείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ: Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (a_n) με a_n άρρητο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a_n \to x$. Από την συνέχεια της f και την Αρχή Μεταφοράς έχουμε

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \quad \text{και} \quad g(x) = \lim_{n\to+\infty} g(a_n)$$

Από τις ιδιότητες των ορίων έχουμε

$$f(a_n) \geq g(a_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \geq \lim_{n\to+\infty} g(a_n)$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι $f(x) \geq g(x)$.

B4. (1,5 μον) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $f(x) \leq 1$. Αν για κάθε $\vartheta < 1$ και για κάθε $c, d \in [0,1]$ με $c < d$ υπάρχει $x \in [c,d]$ με $f(x) > \vartheta$ δείξτε ότι $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 1$.

ΛΥΣΗ: Θα δείξουμε ότι κάθε άνω άθροισμα της f είναι ίσο με 1. Αν αυτό ισχύει τότε το σύνολο όλων των άνω αθροισμάτων της f είναι το μονοσύνολο $\{1\}$ και άρα το άνω ολοκλήρωμα της f, ως supremum του συνόλου αυτού είναι και αυτό ίσο με την μονάδα. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη το άνω ολοκλήρωμά της είναι ίσο με το ολοκλήρωμά της και άρα $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 1$.

Έστω λοιπόν $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ μία διαμέριση του $[0,1]$. Έχουμε $U(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ όπου $M_i = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ και $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Έστω $\vartheta < 1$. Από υπόθεση, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, στο διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ υπάρχει x με $f(x) > \vartheta$. Άρα $M_i > \vartheta$ για όλα τα $i = 1, \ldots, n$. Συνεπώς, επειδή $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1$ (το μήκος του $[0,1]$),

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i > \vartheta \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \vartheta$$

Από την άλλη μεριά $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ οπότε $M_i \leq 1$, για όλα τα $i = 1, \ldots, n$ και συνεπώς

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1$$

Από τα παραπάνω έχουμε $\vartheta < U(f,P) \leq 1$ για κάθε $\vartheta < 1$ πράγμα που σημαίνει ότι $U(f,P) = 1$.

B5. (1,5 μον) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $f'(a) < f'(b)$ δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (f'(a), f'(b))$ υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a,b) με $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lambda$.

ΛΥΣΗ: Θα λύσουμε την άσκηση ακολουθώντας την μέθοδο της απόδειξης του Θεωρήματος Darboux. Θέτουμε $g(x) = f(x) - \lambda x$, $x \in [a,b]$. Αφού $f'(a) < \lambda < f'(b)$ έχουμε $g'(a) < 0 < g'(b)$. Παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a,b) με $g(x_1) = g(x_2)$ (αφού τότε $\dfrac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$ και άρα $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \lambda$).

Πράγματι, επειδή $g'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$ έπεται ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0 \Rightarrow g(x) < g(a) \tag{1}$$

Αντίστοιχα, επειδή $g'(b) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0$ έπεται ότι υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < b - x < \delta_2 \Rightarrow \frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0 \Rightarrow g(x) < g(b) \tag{2}$$

Από την συνέχεια της g υπάρχει $\xi \in [a,b]$ με

$$g(\xi) = \min\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

και από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\xi \neq a, b$ και άρα

$$g(\xi) < g(a) \ \text{ και } g(\xi) < g(b)$$

ισοδύναμα $g(\xi) < m$ όπου $m = \min\{g(a), g(b)\}$. Έστω $\eta \in (g(\xi), m)$. Τότε $g(\xi) < \eta < g(a)$ και άρα από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $x_1 \in (a,\xi)$ με $g(x_1) = \eta$. Ομοίως $g(\xi) < \eta < g(b)$ και άρα υπάρχει $x_2 \in (\xi, b)$ με $g(x_2) = \eta$. Άρα υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a,b) με $g(x_1) = g(x_2)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Παρατήρηση για την Άσκηση B5: *Η άσκηση λέει ότι ένα είδος αντίστροφου του Θεωρήματος Μέσης Τιμής ισχύει. Ως γνωστόν, το Θεώρημα Μέσης Τιμής λέει ότι κάθε λόγος μεταβολής* $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ *μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης* f *ισούται με* $f'(\xi)$ *για κάποιο* $\xi \in (x_1, x_2)$*. Ουσιαστικά, επειδή το* λ *της άσκησης είναι ίσο με* $f'(\xi)$ *για κάποιο* $\xi \in (a,b)$ *(θυμηθείτε ότι από το Θεώρημα Darboux το σύνολο τιμών της παραγώγου μιας συνάρτησης είναι διάστημα) το ερώτημα με το οποίο ασχολείται η άσκηση είναι αν ισχύει το αντίστροφο του ΘΜΤ, δηλαδή αν για κάθε* $\xi \in (a,b)$ *η τιμή της παραγώγου* $f'(\xi)$ *πραγματοποιείται και ως λόγος μεταβολής για κάποια* $x_1 < x_2$ *με* $\xi \in (x_1, x_2)$*. Η άσκηση λέει ότι όντως αυτό συμβαίνει αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το* $f'(\xi)$ *είναι* ***εσωτερικό*** *σημείο του διαστήματος των τιμών της παραγώγου. Αν το* $f'(\xi)$ *είναι άκρο του διαστήματος των τιμών της παραγώγου πιθανόν να μην ισχύει. Π.χ. θεωρείστε την* $f(x) = x^3$ *και* $\xi = 0$*. Τότε το διάστημα τιμών της παραγώγου είναι το* $[0, +\infty)$ *με το* $f'(0) = 0$ *να είναι άκρο του και κάθε λόγος μεταβολής της* f *είναι γνήσια θετικός αφού η* f *είναι γνησίως αύξουσα.*