Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

1. Ανάλυση ρητών συναρτήσεων σε απλά κλάσματα

Με τον όρο *ρητή συνάρτηση* εννοούμε μια συνάρτηση της μορφής $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα. Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον βαθμό του $Q(x)$ τότε από την ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων έχουμε ότι υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ (*το πηλίκο*) και $R(x)$ (*το υπόλοιπο*) με τον βαθμό τοψ $R(x)$ να είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$ τέτοια ώστε $P(x) = \pi(x) \cdot Q(x) + R(x)$ και άρα

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{1}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα ενός πολυωνύμου είναι άμεσο, αφού

$$\begin{aligned}\int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\ dx &= a_n \int x^n\ dx + \cdots + a_1 \int x\ dx + a_0 \int dx \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x\end{aligned}$$

από την σχέση (1) βλέπουμε ότι η ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης ανάγεται στην ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι *γνήσια μικρότερος* του βαθμού του παρονομαστή. Τέτοιες ρητές συναρτήσεις τις καλούμε *γνήσιες*.

Θεωρημα 0.1. *Κάθε πολυώνυμο $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με βαθμό $n \geq 1$ και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1} = 1$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στην μορφή γινομένου $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ όπου*

$$Q_1(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \rho_i)^{n_i} \ \text{ και } Q_2(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x^2 + b_j x + c_j)^{k_j} \tag{2}$$

όπου $\rho_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ και $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, \ell$.

Στην (2) οι αριθμοί m, m_i, k, k_j είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $\sum_{i=1}^{m} n_i + \sum_{j=1}^{\ell} k_j = n$.[1]

Την μορφή $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ με $Q_1(x), Q_2(x)$ όπως στην (2) θα την καλούμε *ανάλυση του $Q(x)$*.

[1] Η περίπτωση $m = 0$ σημαίνει ότι $Q_1(x) = 1$ οπότε και $Q(x) = Q_2(x)$. Αντίστοιχα αν $\ell = 0$ τότε $Q_2(x) = 1$ και $Q(x) = Q_1(x)$.

Ορισμος 0.2. *Για κάθε πολυώνυμο της μορφής $(x-\rho)^n$ ορίζουμε την οικογένεια των συναρτήσεων*

$$\mathcal{F}\left((x-\rho)^n\right) = \left\{ \frac{A_1}{x-\rho} + \frac{A_2}{(x-\rho)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\rho)^n} : A_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Ομοίως για κάθε πολυώνυμο της μορφής $(x^2+bx+c)^k$ με $\Delta = b^2-4c<0$ ορίζουμε την οικογένεια των συναρτήσεων

$$\mathcal{G}\left((x^2+bx+c)^k\right) = \left\{ \frac{B_1+C_1x}{x^2+bx+c} + \frac{B_2+C_2x}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k} : B_j, C_j \in \mathbb{R} \right\}$$

Θεωρημα 0.3. *Έστω $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μία γνήσια ρητή συνάρτηση και έστω*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-\rho_i)^{n_i} \cdot \prod_{j=1}^{\ell}(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}$$

η ανάλυση του $Q(x)$.

Τότε υπάρχουν μοναδικές $F_i \in \mathcal{F}\left((x-\rho_i)^{n_i}\right)$ και $G_j \in \mathcal{G}\left((x^2+b_jx+c_j)^{k_j}\right)$ τέτοιες ώστε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} F_i + \sum_{j=1}^{\ell} G_j \tag{3}$$

Παραδειγμα 0.1.

$$\frac{1}{(x-1)^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4}$$

$$\frac{1}{(x^2+2x+5)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+5} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{Ex+Z}{(x^2+2x+5)^3}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^2+5x+1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+5}$$

Από το Θεώρημα 0.3 έχουμε ότι η ολοκλήρωση των γνήσια ρητών συναρτήσεων ανάγεται στην ολοκλήρωση κλασμάτων της μορφής

$$\frac{1}{(x-\rho)^n} \quad \text{και} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} \text{ με } b^2-4c<0$$

Τα κλάσματα των παραπάνω μορφών καλούνται *απλά κλάσματα* και η ανάλυση (3) *ανάλυση της $P(x)/Q(x)$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.*

Ασκηση 1. *Να αναλυθεί η συνάρτηση $\dfrac{10x}{(x+1)(x^2+9)}$ σε απλά κλάσματα.*

Λύση: Έχουμε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \tag{4}$$

Για να βρούμε τις σταθερές A, B, C εργαζόμαστε ως εξής: Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα και εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος της (4) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \\ &= \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C}{(x+1)(x^2+9)}\end{aligned}$$

και άρα

$$(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C = 10x$$

Συνεπώς έχουμε το σύστημα

$$A+B=0, B+C=10, 9A+C=0$$

απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι

$$A=-1, B=1, C=9$$

Άρα

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

2. Ολοκλήρωση απλών κλασμάτων

Ολοκληρώματα της μορφής $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\rho)^n}\, dx$ είναι εύκολο να υπολογισθούν αφού κάνοντας την αντικατάσταση

$$t = x-\rho \text{ (δηλαδή } x=\phi(t)=t+\rho\text{) και } dx = dt$$

έχουμε

$$\int \frac{1}{(x-\rho)^n}\, dx = \int \frac{1}{t^{-n}}\, dt = \begin{cases} \ln t = \ln(x-\rho), & \text{αν } n=1 \\ \dfrac{t^{-n+1}}{-n+1} = -\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{(x-\rho)^{n-1}}, & \text{αν } n\geq 2\end{cases}$$

Ολοκληρώματα της μορφής $\displaystyle\int \frac{Bx+c}{(x^2+bx+c)^k}\, dx$ με κατάλληλη αντικατάσταση $x=\phi(t)$ μετατρέπονται εύκολα (δες Ασκήσεις 2 και 3 παρακάτω) σε ένα γραμμικό συνδυασμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\, dt \text{ και } \int \frac{1}{(t^2+1)^k}\, dt$$

Τα ολοκληρώματα της πρώτης μορφής υπολογίζονται ως εξής: Θέτουμε

$$u = t^2+1 \quad du = 2tdt$$

οπότε

$$\int \frac{t}{(t^2+1)}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \ln\sqrt{t^2+1}$$

και για $k \geq 2$,

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^k} = \frac{1}{2}\frac{u^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{u^{k-1}} = -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{(t^2+1)^{k-1}}$$

Τα ολοκληρώματα της δεύτερης μορφής υπολογίζονται αναδρομικά. Συγκεκριμένα έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 0.4. *(α)* $\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \arctan t$.
(β) Αν θέσουμε $I_k = \frac{1}{(t^2+1)^k}\, dt$ *τότε*

$$I_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^k}.$$

Απόδειξη. (α) Άμεσο, αφού $(\arctan t)' = \frac{1}{t^2+1}$.
(β) Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{(t^2+1)^k}\right)' = -\frac{k(t^2+1)^{k-1}2t}{(t^2+1)^{2k}} = -2k \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{k+1}} \tag{5}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt &= \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^{k+1}} \\
&= \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt \\
&= \int \frac{1}{(t^2+1)^{k}}\, dt - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt \\
&= I_k - \int t \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt \\
&\overset{(5)}{=} I_k + \frac{1}{2k}\int t \cdot \left(\frac{1}{(t^2+1)^k}\right)' dt \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(t \cdot \frac{1}{(t^2+1)^k} - \int (t)' \cdot \frac{1}{(t^2+1)^k}\, dt\right) \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(\frac{t}{(t^2+1)^k} - I_k\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^k}.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 2. *Να βρεθεί το ολοκλήρωμα* $\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\, dx$.

Λύση: Από την Άσκηση 1 έχουμε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

Άρα

$$\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\ dx = -\int \frac{1}{x+1}\ dx + \int \frac{x+9}{x^2+9}\ dx \tag{6}$$

Έχουμε

$$\int \frac{1}{x+1}\ dx = \ln|x+1|.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+9}{x^2+9}\ dx &= \frac{1}{9}\int \frac{x+9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\ dx \\
&\overset{t=x/3, dx=3dt}{=} \frac{1}{9}\int \frac{3t+9}{t^2+1}\, 3\ dt \\
&= \int \frac{t+3}{t^2+1}\ dt \\
&= \int \frac{t}{t^2+1}\ dt + \int \frac{3}{t^2+1}\ dt \\
&\overset{u=t^2+1, du=2t\ dt}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{1}{t^2+1}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + 3\arctan t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 3\arctan t \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{9}+1\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= -\ln|x+1| + \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}}{|x+1|}\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. *Βρείτε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx.$

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+5} \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\ dx \\
&\overset{t=\frac{x+1}{2},\ dt=dx/2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\ dt = \frac{1}{2}\arctan t \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Άσκηση 4. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{x^3+x}\, dx$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x}\, dx &= \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx\\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\, dx\\ &= \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx\\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$

Άσκηση 5. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx$$

Λύση: Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\, dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\, dx.$$

Θέτουμε $y = x+2$ και άρα $x = y-2$ και $dx = dy$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \int \frac{y-2}{y^2+1}\, dy = \int \frac{y}{y^2+1}\, dy - 2\int \frac{1}{y^2+1}\, dy$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $z = y^2+1$ και άρα $dz = 2ydy \Rightarrow ydy = dz/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{y}{y^2+1}\, dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2}\ln z = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}(\ln(x+2)^2) = \ln|x+2|.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan y = \arctan(x+2).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \ln|x+2| + \frac{\arctan(x+2)}{2}.$$

3. Μερικές εφαρμογέσ-Ολοκληρώματα που ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

Άσκηση 6. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$$

Λύση: Θέτουμε $u = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Τότε $x = u^2$ οπότε $dx = 2udu$ και άρα

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx &= 2\int_0^1 \frac{u \arctan u}{u(1+u^2)}\, du \\ &= 2\int_0^1 \frac{\arctan u}{1+u^2}\, du \\ &= 2\int_0^1 \arctan u(\arctan u)'\, du \\ &= \int_0^1 \left((\arctan u)^2\right)'\, du \\ &= [(\arctan u)^2]_0^1 = (\arctan 1)^2 - (\arctan 0)^2 = \frac{\pi^2}{16}.\end{aligned}$$

Άσκηση 7. *Υπολογίστε το ολκλήρωμα* $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx$.

Λύση: Κάνουμε την αντικατάσταση $t = e^x$ και άρα $dt = e^x dx = t dx$, οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t+1}{t(t^2+1)}\, dt &= \int \frac{t}{t(t^2+1)}\, dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt \\ &= \int \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt \\ &= \arctan t + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt.\end{aligned}$$

Με απλά κλάσματα βλέπουμε ότι

$$\int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt = \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{t}{t^2+1}\, dt = \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1).$$

Από τα παραπάνω και αφού $e^x = t$, παίρνουμε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1).$$

Άσκηση 8. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx$$

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\sin x\, dx &\overset{t=\cos x}{=} \int \frac{1}{1-t^2}\, dt \\ &= \int \frac{1}{(1+t)\cdot(1-t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int \frac{1}{1+t}\, dt + \int \frac{1}{1-t}\, dt\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\ln|1+t| - \ln|1-t|\big) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+t|}{|1-t|} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|.\end{aligned}$$

Ένας άλλος πιο συνήθης τρόπος που εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων για να τα μετατρέψουμε σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων είναι με την χρήση της αντικατάστασης

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

ή ισοδύναμα

$$x = 2 \arctan t$$

και άρα

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$$

Επίσης από γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{και} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Άσκηση 9. *Βρείτε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\ dx.$

Λύση : Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = \ln 2.$$