ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
11/9/2019

Θέμα 1. (α) Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $0 \leq b - a < \epsilon$. (1 μον.)

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5 + n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n})$$

(1,5 μον.)

Θέμα 2. (α) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{x \to 0} \cos(1/x)$. (1 μον.)

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) = q^2$ για κάθε ρητό q και $f(a) = 1$ για κάθε άρρητο a. Βρείτε τα σημεία συνέχειας της f. (1,5 μον.)

Θέμα 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. (i) Είναι δυνατόν να υπάρχουν $x_1 < x_2 < x_3 \in \mathbb{R}$ με $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$; (ii) Τι συμπέρασμα βγάζετε για την f; (1 μον.)

(β) Για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$ γράψτε το πολυώνυμο Taylor, $T_n(x)$, τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{e^x}$. Κατόπιν βρείτε το $T_n(1)$ και δείξτε (με βάση τον τύπο του υπολοίπου Taylor ότι $\lim\limits_{n \to \infty} T_n(1) = \sqrt{e}$. (1,5 μον.)

Θέμα 4. (α) Διατυπώστε το γενικό θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{1+x}}{1+x^2}\, dx.$$

(1 μον.)

(β) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$.
(*Υπόδειξη*: Βρείτε πρώτα το όριο $\lim_{n \to \infty} \ln a_n$). (1,5 μον.)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ **2,5** ΩΡΕΣ