ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ 19/9/2020

Α. Απαντήστε αν είναι Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ) οι επόμενες προτάσεις :

Α1. Αν $0 < a_n < 1$ τότε $a_n^n \to 0$. ***Λάθος, πχ. η ακολουθία*** $a_n = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$.

Α2. Έστω $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(-1) < 0 < f(1)$. Τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{Q}$ με $-1 < \xi < 1$ και $f(\xi) = 0$. ***Λάθος, πχ. η συνάρτηση*** $f(x) = x - a$, $x \in \mathbb{Q}$ ***με*** $0 < a < 1$ ***άρρητο.***

Α3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $|f'(x)| = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(a) = 1$ τότε $f'(x) = 1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. ***Σωστό. Πράγματι, απο το Θεώρημα Darboux έχουμε ότι η*** f' ***ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών. Άρα αν υπήρχε κάποιο*** $b \in \mathbb{R}$ ***με*** $f'(b) = -1$ ***τότε θα έπρεπε να υπήρχε και*** ξ ***μεταξύ των*** a, b ***με*** $f'(\xi) = 0$***, άτοπο αφού*** $|f'(x)| = 1$ ***για όλα τα*** $x \in \mathbb{R}$***.***

Β. Επιλέξτε την σωστή απάντηση στις επόμενες ερωτήσεις :

Β1. Η ακολουθία $a_n = \left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^{2n^3}$ ... ***συγκλίνει στο*** e^2***, ως υπακολουθία της*** $b_n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2$***.***

Β2. Αν (a_n) ακολουθία με $a_0 = 0$ και $a_n \to 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$... ***συγκλίνει στο*** 1***, αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων*** $s_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n$ ***ταυτίζεται με την*** (a_n) ***για όλα τα*** $n \geq 1$***.***

Γ. Γράψτε την απάντηση στις επόμενες ασκήσεις :

Γ1. Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$. ***Απάντηση: Έχουμε*** $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ ***και άρα*** $f^{(n)}(x) = \frac{1}{3^n} f(x)$ ***για κάθε*** $n \in \mathbb{N}$***. Ειδικότερα,*** $f^{(n)}(0) = \frac{1}{3^n}$ ***και άρα***

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{3 \cdot 1!} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{x^n}{3^n \cdot n!}$$

Γ2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^3 + x}\, dx$. ***Απάντηση:***

$$\int \frac{1}{x^3 + x}\ dx = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\ dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx - \int \frac{x}{x^2+1}\ dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$
$$= \ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

Γ3. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

Απάντηση:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

Άρα αν $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ***και*** $x_i = \frac{i}{n}$***,*** $i = 0, \ldots, n$ ***τότε από τα αθροίσματα Riemann***

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Γ4. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt$, $x \in \mathbb{R}$. ***Απάντηση: Παρατηρούμε ότι***

$$G(x) = \int_0^{4x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt - \int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt$$

Άρα θέτοντας $H_2(x) = \displaystyle\int_0^{4x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt$ ***και*** $H_1(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}\ dt$***, έχουμε***

$$G(x) = H_2(x) - H_1(x) \Rightarrow G'(x) = H_2'(x) - H_1'(x) = 8xe^{2|x|} - 2xe^{|x|}$$

(Είναι $H_2(x) = F(\phi(x))$***, με*** $F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\ dt$ ***και*** $\phi(x) = 4x^2$ ***και άρα απο θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού και τον κανόνα Αλυσίδας***

$$H_2'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = e^{\sqrt{\phi(x)}}\phi'(x) = e^{2|x|}8x$$

Ομοίως για την $H_1(x)$***.)***