ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΟΜΑΔΑ: Α

17 Φεβρουαρίου, 2017

Θ1. (α′) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{n + n^2 + \cdots + n^{100}}$. (0,5 μον.)

(β′) Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $a > b$ δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > b_m$ για όλα τα $n, m \geq n_0$. (0,5 μον.)

(γ′) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο και έστω $a \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A. Δείξτε ότι $a = \sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που συγκλίνει στο a. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Έχουμε

$$n^{100} \leq n + n^2 + \cdots + n^{100} \leq 100 \cdot n^{100} \Leftrightarrow \sqrt[n]{n^{100}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{100 \cdot n^{100}}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt[n]{n})^{100} \leq a_n \leq \sqrt[n]{100} \cdot (\sqrt[n]{n})^{100}$$

Επειδή $\sqrt[n]{100} \to 1$ και $\sqrt[n]{n} \to 1 \Rightarrow (\sqrt[n]{n})^{100} \to 1$, απο το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε ότι $a_n \to 1$.

(β′) Έστω $a > b$. Θέτουμε $\epsilon = \frac{a-b}{2}$. Αφού η (a_n) συγκλίνει στο a υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με $|a_n - a| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_1$. Ομοίως αφού η (b_n) συγκλίνει στο b υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με $|b_n - b| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_2$. Ισχυριζόμαστε ότι ο $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ ικανοποιεί το ζητούμενο. Πράγματι, έστω $n, m \geq n_0$. Τότε $n \geq n_1$ και άρα $|a_n - a| < \epsilon$. Ειδικότερα,

$$a_n > a - \epsilon = \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

Ομοίως $m \geq n_0 \geq n_2$ και άρα $|b_m - b| < \epsilon$, οπότε

$$b_m < b + \epsilon = \frac{a+b}{2} \tag{2}$$

Άπό τις (1), (2), προκύπτει ότι $a_n > \frac{a+b}{2} > b_m$ και άρα $a_n > b_m$.

(γ′) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο και $a \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A. Έστω ότι $a = \sup A$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $a_n \in A$ με $a_n > a - \dfrac{1}{n}$. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει διότι αφού το $a - \frac{1}{n}$ είναι γνήσια μικρότερο απο το $a = \sup A$, το $a - \dfrac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του A οπότε υπάρχει στοιχείο του A γνήσια μεγαλύτερό του. Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο a. Πράγματι, απο την επιλογή της (a_n) έχουμε $a - \dfrac{1}{n} < a_n$. Απο την άλλη μεριά $a_n \leq a$ αφού $a_n \in A$ και $a = \sup A$. Συνεπώς $a - \dfrac{1}{n} < a_n \leq a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και απο το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε ότι $a_n \to a$.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που συγκλίνει στο a. Από υπόθεση το a είναι άνω φράγμα του A και συνεπώς $\sup A \leq a$. Αρκεί συνεπώς να αποκλείσουμε την περίπτωση $\sup A < a$. Πράγματι αν αυτό ισχύει τότε θα είχαμε $a_n \leq \sup A < a$, αφού $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $\epsilon = a - \sup A$, έχουμε $\epsilon > 0$, $a - \epsilon = \sup A$ και $a_n \leq a - \epsilon$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Όμως $a_n \to a$ και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ για όλα τα $n \geq n_0$. Ειδικότερα, $a_{n_0} > a - \epsilon$, άτοπο.

■

Θ2. (α′) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \geq 1$ με $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \lambda$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε τα εξής: (i) $a_n \geq a_1 \lambda^{n-1}$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$ και (ii) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει. (0,5 μον.)

(β′) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n+2}$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α′) (i) Για $n = 1$ έχουμε $a_1 \geq a_1 \lambda^0 = a_1$ και συνεπώς η σχέση $a_n \geq a_1 \lambda^{n-1}$ ισχύει τετριμμένα για $n = 1$. Έστω ότι $a_n \geq a_1 \lambda^{n-1}$ για κάποιο $n \geq 1$. Η σχέση $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \lambda$ δίνει ότι $a_{n+1} \geq a_n \lambda$ (αφού $a_n > 0$). Απο επαγωγική υπόθεση $a_n \geq a_1 \lambda^{n-1}$ και άρα $a_{n+1} \geq a_n \lambda \geq a_1 \lambda^{n-1} \lambda = a_1 \lambda^n$. Συνεπώς με επαγωγή έχουμε ότι $a_n \geq a_1 \lambda^{n-1}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \lambda^{n-1} = a_1 + a_1 \lambda + a_1 \lambda^2 + \ldots$ είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο $\lambda \geq 1$ και συνεπώς δεν συγκλίνει. Απο το (i) και το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

(β′) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ έχει θετικούς όρους αφού $0 < 1/n < \pi/2$ γιά όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ορίου λόγου συγκρίνοντας με την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Επειδή

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$$

έχουμε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

και άρα από κριτήριο ορίου λόγου έχουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$, αφου ως γνωστόν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Για τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

και άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ συγκλίνει.

Για τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n+2}$ θα εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο. Θέτουμε $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+2}$. Εύκολα βλέπουμε ότι $f \geq 0$ (ως πηλίκο θετικών) και f συνεχής (ως πηλίκο συνεχών). Επίσης η f είναι φθίνουσα αφού

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+2} \cdot (x+2) - \ln(x+2) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{1 - \ln(x+2)}{(x+2)^2} < 0$$

επειδή $\ln(x+2) \geq \ln 3 > 1$ αν $x \geq 1$.

Έχουμε

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^n \frac{\ln(x+2)}{x+2}\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\ln 3}^{\ln n} y dy = \lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^2 - (\ln 3)^2}{2} = +\infty$$

και άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n+2}$ δεν συγκλίνει.

■

Θ3. Έστω $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) := f(x) - \lambda x$.

(α′) Δείξτε ότι

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta_1 > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \quad \forall x > \delta_1 \Rightarrow |g'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{$*$}$$

(0,5 μον.)

(β′) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[\delta_1, x]$, δείξτε ότι

$$\forall x > \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|g(\delta_1)|}{x}\,.$$

(1,2 μον.)

(γ′) Δείξτε ότι υπάρχει $\delta_2 \geq \delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x > \delta_2 \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{x}\right| < \varepsilon\,.$$

Να συμπεράνετε ότι $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$. (0,5 μον.)

(δ′) Έστω $\varphi(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$ και εξετάστε αν $\lim_{x\to\infty} \varphi'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$. (0,8 μον.)

Λύση.

(α′) Επειδή $g'(x) := f'(x) - \lambda$, για κάθε $x > 0$, από την υπόθεση είναι $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$ και επομένως

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta_1 > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \quad \forall x > \delta_1 \Rightarrow |g'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{$*$}$$

(β′) Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\delta_1,\, x)$ τέτοιο ώστε $g(x) - g(\delta_1) = g'(\xi)(x - \delta_1)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(x)}{x}\right| &= \left|\frac{(g(x) - g(\delta_1)) + g(\delta_1)}{x}\right| \\
&\leq \left|\frac{g(x) - g(\delta_1)}{x}\right| + \left|\frac{g(\delta_1)}{x}\right| \\
&= \frac{x - \delta_1}{x}|g'(\xi)| + \frac{|g(\delta_1)|}{x} \\
&\leq |g'(\xi)| + \frac{|g(\delta_1)|}{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|g(\delta_1)|}{x}\,. && \text{(από την $(*)$)}
\end{aligned}$$

(γ′) Επειδή $\lim_{x\to\infty} \frac{|g(\delta_1)|}{x} = 0$, υπάρχει $\delta_2 \geq \delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x > \delta_2 \Rightarrow \frac{|g(\delta_1)|}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

και επομένως

$$\forall x > \delta_2 \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Άρα, $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ και ισοδύναμα $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

(δ′) Είναι $\frac{\varphi(x)}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$. Όμως $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ και επομένως $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$. Επειδή $\varphi'(x) = 1 + \cos x$ και ως γνωστόν το όριο $\lim_{x\to\infty} \cos x$ δεν υπάρχει, τότε και το όριο $\lim_{x\to\infty} \varphi'(x)$ δεν υπάρχει. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$ υπάρχει και ισούται με 1 ενώ το όριο $\lim_{x\to\infty} \varphi'(x)$ δεν υπάρχει. Επομένως, $\lim_{x\to\infty} \varphi'(x) \neq \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$.

■

Θ4. Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor για τη συνάρτηση $f(x) = \arctan x$ μέχρι τον όρο δεύτερης τάξης και κέντρο το $x_0 = 1$, δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$

$$\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq \arctan x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}(x-1)\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Από τον τύπο Taylor με κέντρο το $x_0 = 1$ έχουμε

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-1)^2\,,$$

για κάποιο ξ_x μεταξύ 1 και x. Επειδή $\arctan 1 = \pi/4$,

$$(\arctan x)'|_{x=1} = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad (\arctan x)''|_{x=\xi_x} = -\left.\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=\xi_x} = -\frac{2\xi_x}{(1+\xi_x^2)^2}\,,$$

είναι

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{\xi_x}{(1+\xi_x^2)^2}(x-1)^2$$

και ισοδύναμα

$$\arctan x - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{\xi_x}{(1+\xi_x^2)^2}(x-1)^2\,,$$

για κάποιο ξ_x μεταξύ 1 και x. Επειδή για κάθε $x \geq 0$ είναι $\xi_x > 0$, από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι

$$\arctan x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

και

$$\left|\arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1)\right| = \frac{\xi_x}{(1+\xi_x^2)^2}(x-1)^2 \leq \frac{1}{2}(x-1)^2\,. \qquad \left(\tfrac{2\xi_x}{1+\xi_x^2} < 1\right)$$

Επομένως,

$$-\frac{1}{2}(x-1)^2 \leq \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq \arctan x - \frac{\pi}{4}$$

και άρα

$$\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq \arctan x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}(x-1)\,.$$

■

Θ5. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k+2n}{\sqrt{n^2+4kn-4k^2}} = \int_0^1 \frac{4x+2}{\sqrt{1+4x-4x^2}}\,dx = \pi\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k+2n}{\sqrt{n^2+4kn-4k^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{4(k/n)+2}{\sqrt{1+4(k/n)-4(k/n)^2}}$$
$$= \int_0^1 \frac{4x+2}{\sqrt{1+4x-4x^2}}\,dx\,,$$

όπου η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{1+4x-4x^2}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{4x+2}{\sqrt{1+4x-4x^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{4x+2}{\sqrt{2-(2x-1)^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2(t+1)+2}{\sqrt{2-t^2}}\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t=2x-1\text{)} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{t+2}{\sqrt{2-t^2}}\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,dt + 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-t^2}}\,dt \\
&= -\sqrt{2-t^2}\Big|_{t=-1}^{t=1} + 2\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{t=-1}^{t=1} \\
&= -1+1+4\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\frac{\pi}{4} = \pi\,.
\end{aligned}$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες