Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

6ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση:

Θεώρημα Αναδρομής. Έστω $(\mathbb{N}, 0, S)$ ένα σύστημα φυσικών αριθμών, E ένα σύνολο, $a \in E$ και μια συνάρτηση $h : E \to E$.

Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} f(0) &= a \\ f(Sn) &= h(f(n)) \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Θεώρημα Αναδρομής με παραμέτρους (Πόρισμα 5.12). Έστω $(\mathbb{N}, 0, S)$ ένα σύστημα φυσικών αριθμών, E, Y σύνολα και συναρτήσεις $g : Y \to E$, $h : E \times \mathbb{N} \times Y \to E$.

Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) \\ f(Sn, y) &= h(f(n, y), n, y) \quad n \in \mathbb{N},\ y \in Y. \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$, ένα σύνολο X, ένα στοιχείο $x_0 \in X$ και μια συνάρτηση $g : X \to X$. Δείξτε τα εξής:

(i) Υπάρχει μια ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες $A_0 = \{x_0\}$ και $A_{Sn} = g[A_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Υπάρχει ένα **αριθμήσιμο** σύνολο B με την ιδιότητες $x_0 \in B$ και αν $x \in B$ τότε $g(x) \in B$.

Άσκηση 2. Αποδείξτε τη μοναδικότητα της συνάρτησης f στο Θεώρημα Αναδρομής (χωρίς παραμέτρους).

Άσκηση 3. Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ και μια συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n) \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

(i) Δείξτε ότι η π είναι επί.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $X = \{m \in \mathbb{N}_2 \mid (\exists n \in \mathbb{N}_1)[m = \pi(n)]\}$.

(ii) Δείξτε ότι η π είναι 1-1.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $Y = \{n \in \mathbb{N}_1 \mid (\forall m \in \mathbb{N}_1)[\pi(n) = \pi(m)] \implies n = m\}$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, ένα σύνολο $\mathbb{N}_2$ και μια 1-1 και επί συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail \mathbb{N}_2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $0_2 \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ έτσι ώστε η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ να είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Άσκηση 5. Αποδείξτε το Θεώρημα Αναδρομής (χωρίς παραμέτρους) με τη βοήθεια του Θεωρήματος Αναδρομής με παραμέτρους.