Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις: Σταθεροποιούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και θέτουμε $1 = S0$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού: $n \cdot 0 = 0$ και $n \cdot Sm = (n \cdot m) + n$, για $n, m \in \mathbb{N}$.

Ακολουθούμε τη συνηθισμένη προτεραιότητα των πράξεων δίνοντας προτεραιότητα στον πολλαπλασιασμό έναντι της πρόσθεσης. Επομένως η παράσταση $(n \cdot m) + n$ θα συμβολίζεται και πιο απλά με $n \cdot m + n$.

Άσκηση 1. Δείξτε ότι

$$Sn = n + 1 \quad \text{και} \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x5.1)**.** Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική πράξη, δηλαδή για κάθε n, m, k έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k).$$

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x5.2)**.** Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή για κάθε n, m έχουμε

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x5.3)**.** Η πράξη της ύψωσης σε δύναμη ορίζεται με αναδρομή στο m,

$$n^0 = 1,$$
$$n^{Sm} = n^m \cdot n,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$.

Δείξτε ότι για κάθε n, m, k έχουμε

$$n^{m+k} = n^m \cdot n^k,$$
$$n^{m \cdot k} = (n^m)^k.$$

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x5.4)**.** Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, και τη μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με

$$\pi(0_1) = 0_2$$
$$\pi(S_1 n) = S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Σε κάθε σύστημα φυσικών αριθμών ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού: $+_1, \cdot_1$ και $+_2, \cdot_2$.

Δείξτε ότι η π είναι ομοιομορφισμός ως προς αυτές τις πράξεις, δηλαδή για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_1$ έχουμε

$$\pi(n +_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(m)$$
$$\pi(n \cdot_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m).$$