

# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις  
Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων  
Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών



## 8ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:  
B. Γρηγοριάδης

**Υπενθύμιση:** Σταθεροποιούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών  $(\mathbb{N}, 0, S)$  και ορίζουμε τις σχέσεις  $\leq$ , και  $<$  ως εξής:

$$n \leq m \iff (\exists k \in \mathbb{N})[n + k = m]$$

$$n < m \iff n \leq m \ \& \ n \neq m,$$

όπου  $n, m \in \mathbb{N}$ .

### Άσκηση 1.

- (i) Δείξτε ότι  $n < Sn$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Δείξτε ότι για κάθε  $k, n \in \mathbb{N}$ , αν  $k < n$  τότε  $Sk \leq n$ .

### Άσκηση 2.

- Δείξτε τα εξής:
- (i) Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και κάθε  $A \subseteq [0, n)$  το  $A$  είναι πεπερασμένο.
  - (ii) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο  $B$  και κάθε  $A \subseteq B$  το  $A$  είναι πεπερασμένο σύνολο.

**Άσκηση 3.** Θεωρούμε δύο ξένα πεπερασμένα σύνολα  $A, B$  και  $m, n \in \mathbb{N}$  με  $A =_c [0, m)$  και  $B =_c [0, n)$ . Δείξτε με επαγωγή στο  $\mathbb{N}$  ότι  $[0, m + n) =_c A \cup B$ .

**Άσκηση 4** (Ισοδύναμες Διατυπώσεις της Αρχής του Περιστερώνα). Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (i) Η Αρχή του Περιστερώνα: Αν το  $A$  είναι πεπερασμένο σύνολο και η συνάρτηση  $f : A \rightarrow A$  είναι 1-1 τότε  $f[A] = A$ .
- (ii) Για κάθε φυσικούς αριθμούς  $m < n$  δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση  $f : [0, n) \rightarrow [0, m)$ .
- (iii) Για κάθε δύο πεπερασμένα σύνολα  $A, B$  και για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}$  με  $A =_c [0, m)$  και  $B =_c [0, n)$ , αν  $m < n$  τότε  $A <_c B$ .
- (iv) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο  $A$  υπάρχει μοναδικό  $n \in \mathbb{N}$  με  $A =_c [0, n)$ .

**Υπόδειξη.** Μπορείτε να αποδείξετε τις ισοδυναμίες κυκλικά (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (i). Στην τελευταία κατεύθυνση θεωρήστε τα ξένα σύνολα  $f[A]$  και  $A \setminus f[A]$  και εφαρμόστε την Άσκηση 3.

**Σχόλιο:** Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης και της Αρχής του Περιστερώνα ορίζουμε στην κλάση των πεπερασμένων συνόλων τον τελεστή,

$$A: \text{ πεπερασμένο} \mapsto \#A = \text{ο μοναδικός } n \in \mathbb{N} \text{ με } A =_c [0, n).$$

**Άσκηση 5.** Επαληθεύστε τις ιδιότητες του ισχυρού τελεστή πληθικότητας για τον  $A \mapsto [0, \#A)$ , όπου το  $A$  είναι πεπερασμένο σύνολο.

Δείξτε επίσης ότι για πεπερασμένα σύνολα  $A, B$  έχουμε

$$A \leq_c B \iff \#A \leq \#B$$

**Άσκηση 6.** Δείξτε ότι η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων  $A$  και  $B$  είναι πεπερασμένο σύνολο και πως

$$\#(A \cup B) \leq \#A + \#B.$$