

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις
Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



9ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. Αν \leq είναι μερική διάταξη στο P τότε το **αυστηρό μέρος** ή **αυστηρό κομμάτι** (strict part) της \leq είναι η σχέση $< \subseteq P \times P$,

$$x < y \iff x \leq y \ \& \ x \neq y$$

για $x, y \in P$.

Άσκηση 1 (Προφανής). Έστω (P, \leq) ένας μερικά διατεταγμένος χώρος και $\emptyset \neq P' \subseteq P$. Θεωρούμε τη σχέση \leq' που ορίζεται ως εξής:

$$x \leq' y \iff x \leq y$$

για x, y που ανήκουν στο υποσύνολο P' .

Δείξτε ότι η \leq' είναι μερική διάταξη στο P' και πως το αυστηρό μέρος $<'$ δίνεται από

$$x <' y \iff x < y$$

για $x, y \in P'$.

Σημείωση: Η σχέση \leq' ονομάζεται **ο περιορισμός της \leq** στο σύνολο P' .

Άσκηση 2. Έστω (P, \leq) μερικά διατεταγμένος χώρος. Επαληθεύστε τις ακόλουθες ιδιότητες για το αυστηρό μέρος $<$ της διάταξης \leq :

$$x \not< x$$

$$x \leq y \implies y \not< x$$

$$\text{(ισοδύναμα: } y < x \implies x \not\leq y)$$

$$x < y \ \& \ y \leq z \implies x < z$$

$$x \leq y \ \& \ y < z \implies x < z$$

όπου $x, y, z \in P$.

Άσκηση 3. Έστω (P, \leq) ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Ορίζουμε τη διμελή σχέση \trianglelefteq στο P ως εξής:

$$x \trianglelefteq y \iff y \leq x, \quad x, y \in P.$$

(i) Δείξτε ότι το ζεύγος (P, \trianglelefteq) είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Θεωρούμε $S \subseteq P$ και $a \in P$. Αν το a είναι α) μέγιστο, β) μεγιστικό, γ) άνω φράγμα του S ως προς τη διάταξη \leq τότε τι είναι το a ως προς τη διάταξη \trianglelefteq ;

Σημείωση: Η σχέση \trianglelefteq είναι η **αντίστροφη διάταξη** της \leq .

Άσκηση 4. Θεωρούμε το σύνολο

$$P = \{(0, 0), (0, 1)\} \cup \{(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = 1\}$$

όπου $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών και $1 = S0$. Στο P ορίζουμε τη διμελή σχέση \leq ως εξής:

$$(i, x) \leq (j, y) \iff i = j \ \& \ x \leq_{\mathbb{N}} y$$

όπου $\leq_{\mathbb{N}}$ είναι γνωστή διάταξη των φυσικών αριθμών.

- (i) Δείξτε ότι ο (P, \leq) είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.
- (ii) Αναπαραστήστε τον χώρο (P, \leq) με ένα σχήμα στο επίπεδο.
- (iii) Βρείτε τα ελαχιστικά στοιχεία του (P, \leq) .
- (iv) Δείξτε ότι το $(0, 1)$ είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του (P, \leq) .
- (v) Εξηγήστε γιατί ο (P, \leq) δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

Σχόλιο: Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος μπορεί να έχει μοναδικό μεγιστικό στοιχείο χωρίς όμως να έχει μέγιστο. Στις επόμενες δύο ασκήσεις δείχνουμε ότι αν ο χώρος είναι πεπερασμένο σύνολο τότε το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο είναι απαραίτητα και μέγιστο.

Άσκηση 5 (Απαιτητική). Δείξτε με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του P , ότι κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος (P, \leq) με το P πεπερασμένο (και μη κενό), έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο.

Άσκηση 6 (Απαιτητική). Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο (P, \leq) και ένα πεπερασμένο $S \subseteq P$. Αν το $a \in P$ είναι μεγιστικό του S αλλά όχι μέγιστο του S , δείξτε ότι υπάρχει $a' \in S$ με $a' \neq a$ που είναι επίσης μεγιστικό του S .

Συμπεράνετε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μερικά διατεταγμένου χώρου που έχει **μοναδικό μεγιστικό** στοιχείο έχει επίσης μέγιστο (που είναι αναγκαστικά το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο).

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5.

Άσκηση 7.

- (i) Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο (P, \leq) και το σύνολο

$$\text{Chains}(P) = \{S \subseteq P \mid \text{το } S \text{ είναι αλυσίδα στον } (P, \leq)\}.$$

Στον $\text{Chains}(P)$ ορίζουμε τη διμελή σχέση \trianglelefteq ως εξής:

$$S \trianglelefteq T \iff S \subseteq T$$

όπου τα S, T είναι αλυσίδες στον (P, \leq) . Δείξτε ότι ο χώρος $(\text{Chains}(P), \trianglelefteq)$ είναι επαγωγικός.

- (ii) Με βάση τις γνωστές ιδιότητες του \mathbb{R} εξηγήστε γιατί το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ με τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών είναι επαγωγικός χώρος.
- (iii) Εξηγήστε γιατί τα διαστήματα $(0, 1]$ και $[0, 1)$ με τη συνήθη διάταξη του \mathbb{R} **δεν** είναι επαγωγικοί χώροι.