Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

9ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. Αν $\leq$ είναι μερική διάταξη στο P τότε το **αυστηρό μέρος** ή **αυστηρό κομμάτι** (strict part) της $\leq$ είναι η σχέση $< \subseteq P \times P$,

$$x < y \iff x \leq y \;\&\; x \neq y$$

για $x, y \in P$.

Άσκηση 1 (Προφανής)**.** Έστω $(P, \leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος και $\varnothing \neq P' \subseteq P$. Θεωρούμε τη σχέση $\leq'$ που ορίζεται ως εξής:

$$x \leq' y \iff x \leq y$$

για x, y **που ανήκουν στο υποσύνολο** P'.

Δείξτε ότι η $\leq'$ είναι μερική διάταξη στο P' και πως το αυστηρό μέρος $<'$ δίνεται από

$$x <' y \iff x < y$$

για $x, y \in P'$.

Σημείωση: Η σχέση $\leq'$ ονομάζεται **ο περιορισμός της** $\leq$ στο σύνολο P'.

Λύση.

Οι ιδιότητες της μεταβατικότητας, αντισυμμετρικότητας και μεταβατικότητας για την $\leq'$ είναι προφανείς από τις αντίστοιχες ιδιότητες της μερικής διάταξης στο P. Σχετικά με το αυστηρό μέρος παρατηρούμε

$$x <' y \iff x \leq' y \;\&\; x \neq y \iff x \leq y \;\&\; x \neq y \iff x < y$$

για $x, y \in P'$.

Άσκηση 2. Έστω $(P, \leq)$ μερικά διατεταγμένος χώρος. Επαληθεύστε τις ακόλουθες ιδιότητες για το αυστηρό μέρος $<$ της διάταξης $\leq$:

$$\begin{aligned} x &\not< x \\ x \leq y &\implies y \not< x \\ (\text{ισοδύναμα: } y < x &\implies x \not\leq y) \\ x < y \;\&\; y \leq z &\implies x < z \\ x \leq y \;\&\; y < z &\implies x < z \end{aligned}$$

όπου $x, y, z \in P$.

Λύση.

Θεωρούμε τυχαία $x, y, z \in P$.

Αν είχαμε $x < x$ θα είχαμε ειδικότερα και $x \neq x$ που είναι άτοπο. Για το επόμενο, έστω $x \leq y$ και υποθέτουμε προς άτοπο ότι $y < x$. Τότε έχουμε και $y \leq x$. Από την αντισυμμετρική ιδιότητα προκύπτει $x = y$ που είναι άτοπο γιατί $y < x$.

Στην επόμενη ιδιότητα έστω $x < y$ και $y \leq z$. Από τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε $x \leq z$. Αν είχαμε $x = z$, αφού $y \leq z$ θα είχαμε και $y \leq x$. Άρα θα ίσχυε $x < y$ και $y \leq x$ που έρχεται σε αντίθεση με το προηγούμενο. Επομένως $x \neq z$ και $x < z$.

Τέλος έστω $x \leq y$ και $y < z$. Από τη μεταβατική ιδιότητα προκύπτει $x \leq z$. Αν είχαμε $x = z$, αφού $x \leq y$ θα είχαμε $z \leq y$. Άρα θα ίσχυε $z \leq y$ και $y < z$ που είναι άτοπο. Άρα $x \neq z$ και $x < z$.

Άσκηση 3. Έστω $(P,\leq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\trianglelefteq$ στο P ως εξής:

$$x \trianglelefteq y \iff y \leq x, \quad x,y \in P.$$

(i) Δείξτε ότι το ζεύγος $(P,\trianglelefteq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Θεωρούμε $S \subseteq P$ και $a \in P$. Αν το a είναι α) μέγιστο, β) μεγιστικό, γ) άνω φράγμα του S ως προς τη διάταξη $\leq$ τότε τι είναι το a ως προς τη διάταξη $\trianglelefteq$;

Σημείωση: Η σχέση $\trianglelefteq$ είναι η **αντίστροφη διάταξη** της $\leq$.

Λύση.

(i) Αφού $x \leq x$ έχουμε και $x \trianglelefteq x$. Έστω $x \trianglelefteq y$ και $y \trianglelefteq x$, τότε $y \leq x$ και $x \leq y$. Από την αντισυμμετρική ιδιότητα της $\leq$ έχουμε $x = y$. Τέλος επαληθεύουμε την μεταβατική ιδιότητα για την $\trianglelefteq$. Έστω $x \trianglelefteq y$ και $y \trianglelefteq z$. Τότε $z \leq y$ και $y \leq x$. Από τη μεταβατική ιδιότητα της $\leq$ έχουμε $z \leq x$, άρα $x \trianglelefteq z$.

(ii) Αν το a είναι $\leq$-μέγιστο του S τότε $a \in S$ και για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \leq a$, ισοδύναμα $a \trianglelefteq x$. Επομένως το a είναι $\trianglelefteq$-ελάχιστο του S.

Αν το a είναι $\leq$-μεγιστικό του S τότε $a \in S$ και δεν υπάρχει $x \in S$ με $a < x$. Αν υπήρχε $x \in S$ με $x \triangleleft a$ (δηλαδή $x \trianglelefteq a$ και $x \neq a$), τότε $a \leq x$ και $x \neq a$, ισοδύναμα $a < x$ που είναι άτοπο. Άρα $a \in S$ και δεν υπάρχει $x \in S$ με $x \triangleleft a$ που σημαίνει ότι το a είναι $\trianglelefteq$-ελαχιστικό του S.

Τέλος αν το a είναι άνω φράγμα του S ως προς $\leq$ τότε για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \leq a$, ισοδύναμα $a \trianglelefteq x$. Άρα το a είναι κάτω φράγμα του S ως προς $\trianglelefteq$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε το σύνολο

$$P = \{(0,0),(0,1)\} \cup \{(i,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = 1\}$$

όπου $(\mathbb{N},0,S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών και $1 = S0$. Στο P ορίζουμε τη διμελή σχέση $\leq$ ως εξής:

$$(i,x) \leq (j,y) \iff i = j \ \&\ x \leq_{\mathbb{N}} y$$

όπου $\leq_{\mathbb{N}}$ είναι γνωστή διάταξη των φυσικών αριθμών.

(i) Δείξτε ότι ο $(P,\leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Αναπαραστήστε τον χώρο $(P,\leq)$ με ένα σχήμα στο επίπεδο.

(iii) Βρείτε τα ελαχιστικά στοιχεία του $(P,\leq)$.

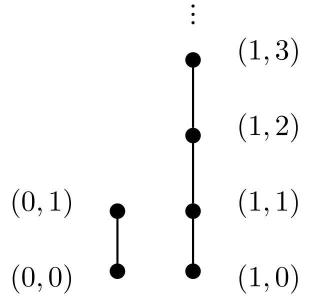
(iv) Δείξτε ότι το $(0,1)$ είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του $(P,\leq)$.

(v) Εξηγείστε γιατί ο $(P,\leq)$ δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

Λύση.

(i) Είναι προφανές ότι $(i,x) \leq (i,x)$ για κάθε i,x. Αν $(i,x) \leq (j,y)$ και $(j,y) \leq (i,x)$ τότε $i = j$ και $x \leq_{\mathbb{N}} y \leq_{\mathbb{N}} y$. Από την αντισυμμετρική ιδιότητα της $\leq_{\mathbb{N}}$ έχουμε $x = y$. Για τη μεταβατική ιδιότητα υποθέτουμε ότι $(i,x) \leq (j,y) \leq (k,z)$. Τότε $i = j = k$ και $x \leq_{\mathbb{N}} y \leq_{\mathbb{N}} z$ και από τη μεταβατική ιδιότητα της $\leq_{\mathbb{N}}$ έχουμε $x \leq_{\mathbb{N}} z$. Άρα $(i,x) \leq (k,z)$.

(ii) Το P δίνεται ήδη ως υποσύνολο του επιπέδου, επομένως είναι άμεση η αναπαράστασή του στο επίπεδο. (Φυσικά η αναπαράσταση μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους.) Συνδέουμε με γραμμές τα σημεία που συγκρίνονται.



(iii) Πρώτα δείχνουμε ότι τα $(0,0)$ και $(1,0)$ είναι ελαχιστικά. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $(i,x) < (0,0)$. Τότε $(i,x) \le (0,0)$ επομένως $i = 0$ και $x \le_{\mathbb{N}} 0$. Επομένως $x = 0$ και $(i,x) = (0,0)$ που είναι άτοπο. Όμοια δείχνουμε ότι δεν υπάρχει (i,x) με $(i,x) < (1,0)$.

Μετά δείχνουμε ότι δεν υπάρχει άλλο ελαχιστικό στοιχείο. Έστω $(i,x) \in P$ με $(i,x) \notin \{(0,0),(1,0)\}$. Θα βρούμε ένα (j,y) με $(j,y) < (i,x)$.

Αν $i = 0$ τότε αναγκαστικά $(i,x) = (0,1)$ το οποίο δεν είναι ελαχιστικό γιατί $(0,0) < (0,1) = (i,x)$. Αν $i = 1$, τότε $x \neq 0$ και επομένως $x = St$ για κάποιο $t \in \mathbb{N}$. Προφανώς $(i,t) < (i,x)$.

(iv) Πρώτα δείχνουμε ότι το $(0,1)$ είναι μεγιστικό στοιχείο. Έστω $(i,x) \in P$ με $(0,1) \le (i,x)$. Τότε $i = 0$ και $1 \le_{\mathbb{N}} x$. Αφού $(i,x) \in P$ έχουμε $x = 1$ και άρα $(i,x) = (0,1)$. Επομένως δεν υπάρχει $(i,x) \in P$ με $(0,1) < (i,x)$.

Θεωρούμε στη συνέχεια ένα $(i,x) \in P \setminus \{(0,1)\}$ και δείχνουμε ότι το (i,x) δεν είναι μεγιστικό. Αν $i = 0$ τότε $x = 0$ οπότε έχουμε $(i,x) = (0,0) < (0,1)$. Αν $i = 1$ τότε $(i,x) = (1,x) < (1,Sx)$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει $(j,y) \in P$ με $(i,x) < (j,y)$ και άρα το (i,x) δεν είναι μεγιστικό.

(v) Ο $(P,\le)$ δεν έχει ελάχιστο γιατί έχει δύο διαφορετικά ελαχιστικά στοιχεία. Επίσης δεν έχει μέγιστο γιατί αν είχε αυτό θα ήταν το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο. Από το (iv) το μέγιστο στοιχείο θα ήταν το $(0,1)$. Αλλά τότε θα είχαμε $(j,y) \le (0,1)$ για κάθε $(j,y) \in P$ που δίνει άτοπο για $j = 0$ (και y τυχαίο φυσικό).

Σχόλιο: Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος μπορεί να έχει μοναδικό μεγιστικό στοιχείο χωρίς όμως να έχει μέγιστο. Στις επόμενες δύο ασκήσεις δείχνουμε ότι αν ο χώρος είναι **πεπερασμένο σύνολο** τότε το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο είναι απαραίτητα και μέγιστο.

Άσκηση 5 (Απαιτητική)**.** Δείξτε με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του P, ότι κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος $(P,\le)$ με το P πεπερασμένο (και μη κενό), έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο.

Λύση.

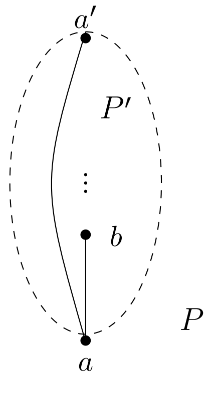
Ασχολούμαστε αρχικά με την ύπαρξη μεγιστικού στοιχείου. Αν το P έχει μόνο ένα στοιχείο τότε αυτό είναι προφανώς μεγιστικό. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής: κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος $(P,\le)$ με το P να έχει **το πολύ** n στοιχεία και να είναι μη κενό, έχει μεγιστικό στοιχείο.

Δείχνουμε την ιδιότητα για το $n+1$. Έστω ένας μερικά διατεταγμένος χώρος $(P,\le)$ που έχει το πολύ $n+1$ στοιχεία με $P \neq \emptyset$. Θεωρούμε k το πλήθος των στοιχείων του P. Αν $k \le n$ τότε έχουμε το ζητούμενο από την Επαγωγική Υπόθεση. Επομένως υποθέτουμε ότι το P έχει ακριβώς $n+1$ στοιχεία.

Θεωρούμε ένα τυχαίο $a \in P$. Αν το a είναι μεγιστικό του P έχουμε το ζητούμενο. Επομένως υποθέτουμε ότι το a δεν είναι μεγιστικό. Τότε υπάρχει $b \in P$ με $a < b$. Ορίζουμε το σύνολο

$$P' = \{x \in P \mid a < x\}.$$

Τότε $b \in P'$ και ειδικότερα $P' \neq \emptyset$. Από την άλλη $a \notin P'$ επομένως το σύνολο P' έχει το πολύ n στοιχεία. Θεωρούμε το P' με τον περιορισμό $\le'$ της σχέσης $\le$ (Άσκηση 1). Από την Επαγωγική Υπόθεση το P' έχει ένα μεγιστικό στοιχείο a' ως προς $\le'$.



Δείχνουμε ότι το a' είναι μεγιστικό στοιχείο του $(P,\le)$. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $x \in P$ με $a' < x$. Επειδή $a' \in P'$ έχουμε $a < a' < x$. Επομένως $a < x$ δηλαδή $x \in P'$. Αφού $a', x \in P'$ και $a' < x$ έχουμε $a' <' x$, όπου $<'$ είναι το αυστηρό μέρος της $\le'$. Άρα υπάρχει $x \in P'$ με $a' <' x$ που είναι άτοπο γιατί το a' είναι μεγιστικό του $(P',\le')$. Συνεπώς το a' είναι μεγιστικό στοιχείο του $(P,\le)$.

Σχετικά με την ύπαρξη ελαχιστικού στοιχείου θεωρούμε την αντίστροφη διάταξη $\trianglelefteq$,

$$x \trianglelefteq y \iff y \leq x,$$

Προφανώς η $\leq$ είναι η αντίστροφη διάταξη της $\trianglelefteq$. Σύμφωνα με την Άσκηση 3 ένα μεγιστικό στοιχείο του $(P, \trianglelefteq)$ είναι ελαχιστικό του $(P, \leq)$. (Φυσικά μπορεί κανείς να δείξει την ύπαρξη ελαχιστικού στοιχείου επαγωγικά όπως και με το μεγιστικό στοιχείο.)

Άσκηση 6 (Απαιτητική). Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο $(P, \leq)$ και ένα **πεπερασμένο** $S \subseteq P$. Αν το $a \in P$ είναι μεγιστικό του S αλλά όχι μέγιστο του S, δείξτε ότι υπάρχει $a' \in S$ με $a' \neq a$ που είναι επίσης μεγιστικό του S.

Συμπεράνετε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μερικά διατεταγμένου χώρου που έχει **μοναδικό μεγιστικό** στοιχείο έχει επίσης μέγιστο (που είναι αναγκαστικά το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο).

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 5.

Λύση.

Παρατηρούμε πρώτα ότι $a \in S$. Αφού το a δεν είναι μέγιστο του S υπάρχει ένα $b \in S$ με $b \nleq a$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$P' = \{x \in S \mid b \leq x\}.$$

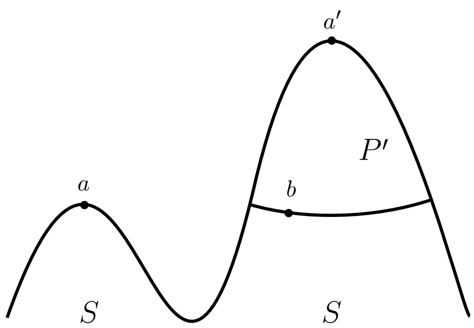
Τότε $b \in P'$ και $a \notin P'$, ειδικότερα $P' \neq \varnothing$. Επίσης το P' είναι πεπερασμένο ως υποσύνολο του P. Από την Άσκηση 5 ο χώρος P' με τον περιορισμό της διάταξης $\leq$ (Άσκηση 1) έχει μεγιστικό στοιχείο $a' \in P'$. Για ευκολία συμβολίζουμε τον περιορισμό της διάταξης $\leq$ στο P' πάλι με $\leq$.

Εφόσον $a' \in P' \subseteq S$ και $a \notin P'$ έχουμε $a' \in S$ και $a' \neq a$. Δείχνουμε ότι το a' είναι μεγιστικό του S.

Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $x \in S$ με $a' < x$. Αφού $a' \in P'$ έχουμε $b \leq a' < x$. Ειδικότερα $x \in S$ και $b \leq x$, δηλαδή $x \in P'$.

Καταλήγουμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο του P' που είναι γνήσια μεγαλύτερο του a' ως προς την $\leq$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το a' είναι μεγιστικό του P'.

Συνεπώς $a' \nless x$ για κάθε $x \in S$ και το $a' \in S$ είναι μεγιστικό του S.



Σημείωση. Τα πιο πάνω στοιχεία a, b δεν είναι συγκρίσιμα. Από την επιλογή του b έχουμε $b \nleq a$. Αν είχαμε $a \leq b$ τότε $a < b$ το οποίο είναι άτοπο γιατί $b \in S$ και το a είναι μεγιστικό του S.

Άσκηση 7.

(i) Θεωρούμε έναν μερικά διατεταγμένο χώρο $(P, \leq)$ και το σύνολο

$$\text{Chains}(P) = \{S \subseteq P \mid \text{το } S \text{ είναι αλυσίδα στον } (P, \leq)\}.$$

Στον Chains(P) ορίζουμε τη διμελή σχέση $\trianglelefteq$ ως εξής:

$$S \trianglelefteq T \iff S \subseteq T$$

όπου τα S, T είναι αλυσίδες στον $(P, \leq)$. Δείξτε ότι ο χώρος (Chains$(P), \trianglelefteq$) είναι επαγωγικός.

(ii) Με βάση τις γνωστές ιδιότητες του $\mathbb{R}$ εξηγείστε γιατί το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ με τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών είναι επαγωγικός χώρος.

(iii) Εξηγήστε γιατί τα διαστήματα $(0,1]$ και $[0,1)$ με τη συνήθη διάταξη του $\mathbb{R}$ **δεν** είναι επαγωγικοί χώροι.

Λύση.

(i) Αρχικά παρατηρούμε ότι ο $(\text{Chains}(P), \trianglelefteq)$ είναι όντως μερικά διατεταγμένος χώρος, γιατί ο $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος και η $\trianglelefteq$ είναι ο περιορισμός της $\subseteq$ στο σύνολο $\text{Chains}(P)$ (Άσκηση 1).

Επαληθεύουμε τη χαρακτηριστική ιδιότητα του επαγωγικού χώρου. Έστω $\mathcal{D} \subseteq \text{Chains}(P)$ μια αλυσίδα ως προς $\trianglelefteq$. Ορίζουμε $E = \bigcup \mathcal{D}$, δηλαδή το E είναι το σύνολο που προκύπτει από την ένωση όλων των στοιχείων του $\mathcal{D}$. Ισχυριζόμαστε ότι $E = \sup \mathcal{D}$. Οι ιδιότητες

(1) $\qquad (\forall S \in \mathcal{D})[S \subseteq E]$

(2) $\qquad (\forall T \in \text{Chains}(P))[\text{αν το } T \text{ είναι } \trianglelefteq\text{-άνω φράγμα του } \mathcal{D} \text{ τότε } E \subseteq T]$

επαληθεύονται εύκολα όπως όταν δείχνουμε ότι ο χώρος $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ είναι επαγωγικός.

Αυτό που χρειάζεται επιπλέον είναι να δείξουμε ότι το E **είναι στοιχείο του** $\text{Chains}(P)$. (Στην περίπτωση του χώρου $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ το $E = \bigcup \mathcal{D}$ είναι προφανώς υποσύνολο του A και άρα στοιχείο του $\mathcal{P}(A)$, εδώ χρειάζεται όμως λίγη περισσότερη δουλειά.)

Δείχνουμε ότι το $E \subseteq P$ είναι αλυσίδα ως προς $\leq$. Έστω $x, y \in E = \bigcup \mathcal{D}$. Τότε υπάρχουν $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ με $x \in D_1$ και $y \in D_2$. Επειδή το $\mathcal{D}$ είναι αλυσίδα στον $(\text{Chains}(P), \trianglelefteq)$ θα έχουμε $D_1 \trianglelefteq D_2$ ή $D_2 \trianglelefteq D_1$, δηλαδή $D_1 \subseteq D_2$ ή $D_2 \subseteq D_1$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα $D \in \mathcal{D}$ με $x, y \in D$. Επειδή $\mathcal{D} \subseteq \text{Chains}(P)$ το $D \in \mathcal{D}$ είναι αλυσίδα ως προς $\leq$ και επομένως θα έχουμε $x \leq y$ ή $y \leq x$.

Συνεπώς $E \in \text{Chains}(P)$ και από τις ιδιότητες (1), (2) πιο πάνω έχουμε ότι $E = \sup \mathcal{D}$.

(ii) Έστω μια αλυσίδα $S \subseteq [0,1]$ - αφού η συνήθης διάταξη του $\mathbb{R}$ είναι γραμμική αυτό είναι το ίδιο με το να θεωρήσουμε ένα τυχαίο υποσύνολο του $[0,1]$.

Αν το S είναι μη κενό τότε από το Αξίωμα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ (που είναι θεώρημα των δικών μας αξιωμάτων), υπάρχει το $\sup S$. Μάλιστα το $\sup S$ είναι όριο ακολουθίας του $S \subseteq [0,1]$ συνεπώς $\sup S \in [0,1]$.

Αν $S = \varnothing$ τότε $\sup S = \sup \varnothing = 0 =$ το ελάχιστο στοιχείο του $[0,1]$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει $a \in [0,1]$ που είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του S.

(iii) Το $(0,1]$ δεν είναι επαγωγικός χώρος με τη συνήθη διάταξη του $\mathbb{R}$ γιατί δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, ενώ το $[0,1)$ δεν είναι επαγωγικός χώρος γιατί η αλυσίδα $S = (42^{-1}, 1)$ δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα **μέσα στον χώρο** $([0,1), \leq)$.